



HAL
open science

Sur les ondes stick-slip à l'interface de demi-espaces élastique et rigide sous contact frottant

Huy Duong Bui, Abdelbacet Oueslati

► **To cite this version:**

Huy Duong Bui, Abdelbacet Oueslati. Sur les ondes stick-slip à l'interface de demi-espaces élastique et rigide sous contact frottant. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01421853

HAL Id: hal-01421853

<https://hal.science/hal-01421853>

Submitted on 23 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Sur les ondes stick-slip à l'interface de demi-espaces élastique et rigide sous contact frottant

H.D. Bui^{1,2}, A. Oueslati³

¹ Laboratoire de Mécanique des Solides/CNRS UMR 7649, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

² Lamsid/CNRS UMR 2832, Electricité de France, Clamart, France

³ Université de Lille 1, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Résumé — L'objectif de ce travail est l'étude analytique des ondes stick-slip à l'interface d'un demi-espace élastique en glissement relatif par rapport à un massif rigide sous contact frottant. Le problème est formulé dans le cadre de l'élastodynamique stationnaire à l'aide des potentiels complexes de Radok. Les équations de problème se réduisent à un problème de Hilbert discontinu. On montre qu'il y a une solution unique qui satisfait toutes les conditions requises sauf une : la contrainte de contact normale présente une singularité positive sur une zone de contact très petite.

Mots clés — Contact unilatéral, Frottement de Coulomb, Stick-slip.

1 Introduction

En dynamique des structures, la présence du contact avec frottement de coulomb conduit souvent à des problèmes d'instabilité de glissement stationnaire donnant naissance à des vibrations auto-entretenues sous forme d'ondes stick-slip ou stick-slip-separation [3]. Ces régimes périodiques s'accompagnent généralement d'émission de bruits et sont rencontrés par exemple dans l'étude du crissement des freins, l'analyse et simulations sismiques, etc. L'origine et le mécanisme de déclenchement de ce type d'instabilité dynamique est bien compris [5].

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail qui vise à investiguer analytiquement la possibilité de construction de solutions stick-slip à l'interface d'un demi-espace élastique en glissement relatif par rapport à un massif rigide sous contact unilatéral et frottement de Coulomb.

2 Formulation du problème

Un solide élastique occupant le demi-plan Ω^- est en glissement relatif par rapport à un massif rigide Ω^+ comme l'indique la figure 1. Le contact entre les deux solides est supposé de type unilatéral avec frottement de Coulomb avec un coefficient constant μ . Le corps rigide se déplace à droite avec une vitesse constante V alors que le solide déformable est soumis à l'infini à un chargement $\tau_{yy}^* < 0$, $\tau_{xy}^* > 0$ et τ_{xx}^* tel que $\tau_{xy}^* = -\mu^* \tau_{yy}^*$, (μ^* est le coefficient apparent de frottement). Nous cherchons à construire une famille de solutions d'ondes stick-slip induites par l'instabilité de glissement entre les solides.

Pour traiter ce problème stationnaire, c'est à dire ne dépendant pas explicitement de temps, on se place dans le repère mobile (Oxy) défini par $x = X - ct$ et $y = Y$ et lié à l'onde qui se propage à la célérité c . Par ailleurs, l'interface de contact est subdivisé en des segments d'adhérence

$ST = \cdots [b_{-k-1}, a_{-k}] \cup \cdots [b_{-1}, a_0] \cup \cdots [b_{k-1}, a_k] \cup \cdots$, $k \in \mathbb{N}$ et des segments de glissement
 $SL = \cdots [a_{-k}, b_{-k}] \cup \cdots [a_0, b_0] \cup \cdots [a_k, b_k] \cup \cdots$, $k \in \mathbb{N}$, cf. Fig.1. Les données τ_{xx}^* , τ_{xy}^* , τ_{yy}^* sur

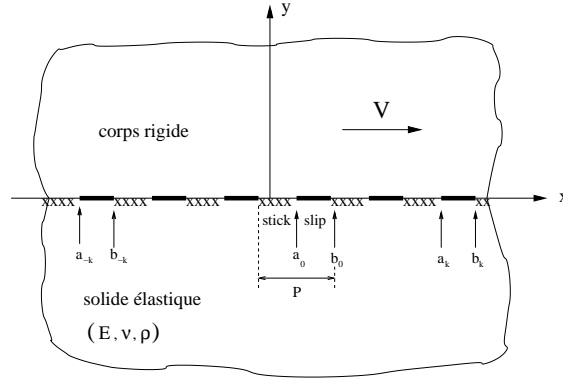


Figure 1 – Glissement avec frottement entre un demi-espace élastique et un massif rigide

l'interface $y = 0$ et à l'infini en x , permettent de calculer $u_{x,x}^*$ par la loi d'élasticité :

$$u_{x,x}^* = \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \tau_{xx}^* - \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{yy}^* \right\} \quad (1)$$

Posons pour la suite $V^* := -cu_{x,x}^* > 0$ si la vitesse $c < 0$. Dans le repère mobile, il y a une vitesse matérielle d'interface V^* supposée positive due au chargement τ_{xx}^* , τ_{yy}^* ou l'allongement $u_{x,x}^* > 0$. La vitesse matérielle des points de l'interface est cherchée sous la forme $dU/dt := V^* + du/dt$, les contraintes additionnelles à τ_{xx}^* , τ_{xy}^* , τ_{yy}^* sont désignées par σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{yy} .

Les conditions aux limites sont : (i) contact établi sur tout l'interface $y = 0$: $u_y = 0$, (ii) condition d'adhérence : $dU/dt = V \Leftrightarrow du/dt = V - V^* \Leftrightarrow -cu_{x,x} = V - V^*$ sur ST^- , (iii) condition de glissement : $\sigma_{xy} + \tau_{xy}^* = -\mu(\sigma_{yy} + \tau_{yy}^*)$ et (iV) condition de nullité des contraintes additionnelles à l'infini : $\sigma_{ij} = O(1/(x^2 + y^2))$.

Notons qu'en raison d'absence de longueur caractéristique dans ce problème, les inconnues principales sont la célérité c et le rapport b/a .

3 Construction de la solution

En adoptant le formalisme de Radok [4] et l'hypothèse des déformations planes, les équations de l'élastodynamique s'expriment en termes de deux potentiels complexes de Radok comme suit :

$$u_x = -\frac{1}{2G} \Re e \left(\phi_1(z_1) + \frac{1+\beta_2^2}{2} \phi_2(z_2) \right), \quad u_y = \frac{1}{G} \Im m \left(\beta_1 \phi_1(z_1) + \frac{1+\beta_2^2}{2\beta_2} \phi_2(z_2) \right) \quad (2)$$

$$\sigma_{xx} = -2 \Re e \left(\frac{2\beta_1^2 - \beta_2^2 + 1}{2} \phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_1) \right), \quad \sigma_{yy} = (1 + \beta_2^2) \Re e \left(\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2) \right) \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = 2 \Im m \left(\beta_1 \phi_1'(z_1) + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_2} \phi_2'(z_2) \right) \quad (4)$$

où $\Re e(Z)$ et $\Im m(Z)$ représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe Z et z_1 et z_2 sont les variables complexes de Radok définies par $z_1 = x + i\beta_1 y$ et $z_2 = x + i\beta_2 y$ avec

$$\beta_1 = \sqrt{1 - c^2/c_1^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{1 - c^2/c_2^2}, \quad c_1 = \sqrt{\lambda + 2G/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{G/\rho} \quad \text{eti} = \sqrt{-1}$$

Dans ces expressions, λ et G sont les coefficients de Lamé et ρ désigne la masse volumique du matériau élastique. c_1 et c_2 désignent respectivement les vitesses des ondes longitudinales et transversales. Cette étude traite le cas des ondes subsonique i.e. $c < c_2$, ce qui implique que l'on a $\beta_1 > 0$

and $\beta_2 > 0$.

En suivant [1], la condition $u_y = 0$ au niveau de l'axe réel $y = 0$ (où $z_1 = z_2 = z = x + i0$) permet d'écrire :

$$\beta_1 \phi_1(z) + \frac{(1 + \beta_2^2)}{2\beta_2} \phi_2(z) = 0 \quad (5)$$

Cette équation conduit à la définition suivante de la fonction ϕ_2 non seulement dans Ω^- mais aussi dans Ω^+ :

$$\phi_2(z_2) := -\frac{2\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_2^2)} \phi_1(z_2) \quad (6)$$

La substitution de (6) dans les équations (2-4) donne les relations suivantes le long de l'interface de contact :

$$u_x = -\frac{(1 - \beta_1\beta_2)}{G} \Re e(\phi_1(z)), \quad \sigma_{yy} = (1 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2) \Re e(\phi_1'(z)) \quad (7)$$

$$\sigma_{xx} = \left((1 + \beta_2^2) + 2\beta_1(\beta_1 - \beta_2) \right) \Re e(\phi_1'(z)), \quad \sigma_{xy} = \beta_1(1 - \beta_2^2) \Im m(\phi_1'(z)) \quad (8)$$

Ainsi tous les champs mécaniques sont déterminés par la fonction ϕ_1 sa dérivée ϕ_1' .

Dans la suite, nous allons désigner par $\Phi := \phi'$ et nous allons chercher une solution sous la forme d'une intégrale de Cauchy avec une densité $f(t)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (9)$$

Si $f(t)$ est une fonction réelle alors la fonction conjuguée de Φ s'écrit :

$$\bar{\Phi}(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\bar{f}(t)}{t-z} dt = -\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{t-z} dt = -\Phi(z) \quad (10)$$

3.1 Solution dans la zone de glissement

La solution est construite pour un segment générique de glissement $[a, b]$ puis sera prolongée par périodicité à toute la région de glissement SL . La condition de glissement s'écrit :

$$\sigma_{xy} + \tau_{xy}^* = -\mu(\sigma_{yy} + \tau_{yy}^*) \Rightarrow \sigma_{xy} + \mu\sigma_{yy} = -\tau_{xy}^* - \mu\tau_{yy}^* := T^* \quad (11)$$

Nous obtenons alors

$$(\gamma_1 + i\mu\gamma_2) \Phi(z^-) - (\gamma_1 - i\mu\gamma_2) \bar{\Phi}(z^+) = 2iT^* \quad (12)$$

où $\gamma_1 = \beta_1(1 - \beta_2^2) > 0$ et $\gamma_2 = 1 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2$.

Par ailleurs la relation $\bar{\Phi}(z^+) = -\Phi(z^+)$ conduit à :

$$-g\Phi(z^-) + \Phi(z^+) = \frac{2iT^*}{\gamma_1 - i\mu\gamma_2} := f_2(t) \quad (13)$$

avec

$$f_2(t) = \frac{2iT^*}{\gamma_1 - i\mu\gamma_2} \quad \text{et} \quad g = -\frac{\gamma_1 + i\mu\gamma_2}{\gamma_1 - i\mu\gamma_2} \quad (14)$$

Observons que le coefficient g peut s'exprimer aussi par $g = -e^{2i\pi\alpha} = e^{2i\pi(\alpha + \frac{1}{2})}$, $|g| = 1$ avec $\tan(\alpha\pi) = \mu \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.

L'équation (13) s'appelle le problème de Riemann-Hilbert qui possède une solution explicite [2]. La solution du problème homogène adéquate à notre problème et périodique est donnée par le produit infini suivant constituant la solution fondamentale :

$$X(z) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(z - (a+k)b \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(z - (k+1)b \right)^{-\frac{1}{2}+\alpha} \quad (15)$$

avec une coupure le long des segments de glissement SL . On pourra montrer que ce produit infini converge absolument vers une limite finie.

Finalement, selon [2], la solution générale de (13) est donnée par :

$$\Phi^{slip}(z) = \frac{f_2}{2i\pi} X(z) \left\{ \int_{SL^+} \frac{1}{X(t^+)} \frac{dt}{t-z} + C_2 \right\} \quad (16)$$

où C_2 est une constante arbitraire.

3.2 Solution dans la zone d'adhérence

Comme précédemment, la solution est construite pour un segment générique d'adhérence $[b_{-1} = 0, a]$ puis étendue par périodicité à la zone d'adhérence ST .

En écrivant que la vitesse de glissement est égale à $V - V^*$, $u_{x,x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{(V - V^*)}{c}$ nous obtenons :

$$u_{x,x} = \frac{(1 - \beta_1 \beta_2)}{4G} \left\{ \Phi + \bar{\Phi}(\bar{z}) \right\} = \frac{(1 - \beta_1 \beta_2)}{4G} \left\{ \Phi(z^-) - \Phi(z^+) \right\} = -\frac{(V - V^*)}{c} \quad (17)$$

Les formules de Plemelj permettent d'avoir l'expression de la densité $f(t)$:

$$f_1(t) = \Phi(t^+) - \Phi(t^-) = -\frac{4G(V - V^*)}{c(1 - \beta_1 \beta_2)} \quad (18)$$

Comme pour le cas de glissement, le potentiel doit être périodique et assurant la continuité du déplacement tangentiel le long de l'interface de contact. Un choix possible de la solution homogène est :

$$X(z) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(z - (a+k)b \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(z - (k+1)b \right)^{-\frac{1}{2}+\alpha}$$

Notons que $X(z)$ est définie à travers la zone d'adhérence et constant à l'infini.

Donc au niveau de la zone d'adhérence on a :

$$\left\{ \frac{\Phi(z^+)}{X(z^+)} - \frac{\Phi(z^-)}{X(z^-)} \right\} = -\frac{4G(V - V^*)}{c(1 - \beta_1 \beta_2)} \frac{1}{X(z^+)} \quad (19)$$

et finalement le potentiel d'adhérence est donné par :

$$\Phi^{stick}(z) = \frac{f_1}{2i\pi} X(z) \left\{ \int_{ST^+} \frac{dt}{X(t^+)(t-z)} + C_1 \right\} \quad (20)$$

où C_1 est une constante arbitraire.

3.3 Solution stick-slip

La solution stick-slip s'obtient en ajoutant les deux potentiels Φ^{stick} et Φ^{slip} :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} X(z) \left\{ f_1 \int_{ST^+} \frac{dt}{X(t^+)(t-z)} + f_2 \int_{SL^+} \frac{dt}{X(t^+)(t-z)} + C_0 \right\} \quad (21)$$

où C_0 est une constante arbitraire, f_1 et f_2 sont les deux constantes données par (14) and (18) respectivement. Par ailleurs, puisque Φ se comporte comme $O(1/z^2)$ à l'infini alors $C_0 = 0$ et le terme en $O(1/z)$ doit être égale à zéro.

Une condition nécessaire pour satisfaire la relation $\Phi(\infty) \cong O(1/z^2)$ est donnée par :

$$\int_0^a f_1 \frac{dt}{(t-a)^{\frac{1}{2}-\alpha}(t-b)^{-\frac{1}{2}+\alpha}} + \int_a^b f_2 \frac{dt}{(t-a)^{\frac{1}{2}-\alpha}(t-b)^{-\frac{1}{2}+\alpha}} = 0 \quad (22)$$

Pour évaluer ces intégrales, on doit calculer explicitement les potentiels Φ^{stick} et Φ^{slip} . En se basant sur les résultats dans [2] et le fait que $X(z)$ tend vers 1 quand $|z|$ tend vers l'infini, on a les résultats suivants :

$$\Phi^{slip}(z) = \frac{f_2}{1-g}(1-X(z)) \quad (23)$$

et après un calcul fastidieux qu'on ne présentera pas ici

$$\Phi^{stick}(z) = \frac{g}{g-1}ie^{-\pi\alpha}\left(\frac{1}{Z(z)}-1\right) \quad (24)$$

où $Z(z)$ est la fonction définie par un réarrangement du produit infini $X(z)$ de manière à obtenir que $Z(z)$ est continue à travers la zone de glissement mais avec une coupure à travers les segments d'adhérences. On peut adopter $Z(z^\pm) := \pm ie^{\mp i\pi\alpha}X(z^\pm)$ à travers la zone d'adhérences ST comme définition de la fonction Z .

Ensuite on peut prouver que l'annulation du terme en $1/z$ à l'infini conduit à :

$$\frac{2GV}{c(1-\beta_1\beta_2)}(\gamma_1 + i\mu\gamma_2)e^{-i\pi\alpha}(a-b_{-1}) + iT^*(b-a) = 0 \quad (25)$$

A priori cette équation est complexe donnant deux équations réelles mais un calcul explicite montre qu'en réalité (25) se réduit à une seule équation réelle de la forme :

$$\frac{2G(V-V^*)}{c(1-\beta_1\beta_2)}(\gamma_1 \cos(\alpha\pi) + \mu\gamma_2 \sin(\alpha\pi)) + T^*(\delta-1) = 0 \quad (26)$$

où $\delta = b/a$.

Nous avons alors besoin d'une deuxième équation. Celle-ci est obtenue en écrivant la continuité du déplacement horizontal le long de l'interface de contact. Après un calcul fastidieux qu'on ne présentera pas dans cette note on aboutira à l'expression suivante du déplacement horizontal sur le segment de glissement $[a, b]$:

$$u_x(x) = D - \frac{(V-V^*)}{c}x + \int_a^x u_{x,x}(t)dt = D - \frac{(V-V^*)}{c}x + \omega(c; V-V^*, T^*) \int_a^x |X(t^-)|dt \quad (27)$$

où D est une constante réelle.

Sur la zone d'adhérence nous obtenons :

$$u_x(z) = -\frac{(V-V^*)}{c}x + F \quad (28)$$

où F est une constante réelle.

4 Résultats et discussion

La continuité de u_x en a permet d'affirmer que l'on a $D = F$ alors que la condition de périodicité se traduit par

$$-\frac{V}{c}\delta + \left\{ \frac{(V-V^*)}{c} - \frac{1-\beta_1\beta_2}{2G} \cos(\alpha\pi) \frac{T^*}{\gamma_1} \right\} \int_a^b |X(t^-)|dt = 0 \quad (29)$$

Le calcul explicite de l'intégrale $\int_a^b |X(t^-)|dt$ permet d'aboutir à la relation finale suivante :

$$-\frac{V}{c}\delta + \left\{ \frac{(V-V^*)}{c} - (1-\beta_1\beta_2) \cos(\pi\alpha) \frac{T^*}{2G\gamma_1} \right\} \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{(\delta-1)}{\cos(\pi\alpha)} = 0 \quad (30)$$

Finalement, les équations permettant la détermination des deux inconnues c et δ sont les équations (26) et (30). Observons que ces 2 équations sont fortement non linéaires en c , pour les résoudre on va procéder d'une manière inverse : $c < 0$ (car l'onde se propage de droite vers la gauche) et δ sont considérés comme données du problème alors que V et T^* seront traitées comme les inconnues du problème. Par ailleurs nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$a = 1, \quad b > 1 \leftarrow \delta = \frac{b}{a}, \quad T \leftarrow \frac{T^*}{G}, \quad v \leftarrow \frac{V}{c_2}, \quad v^* \leftarrow \frac{V^*}{c_2}, \quad \bar{c} \leftarrow \frac{c}{c_2}$$

Nous obtenons alors un système algébrique de deux équations à deux inconnues :

$$\left[\pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{(b-1)}{\cos(\pi\alpha)} - b \right] \frac{v}{\bar{c}} - \left[\pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) (b-1) \frac{(1-\beta_1\beta_2)}{2\gamma_1} \right] T = \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{(b-1)}{\cos(\pi\alpha)} \frac{v^*}{\bar{c}} \quad (31)$$

et

$$\left[2 \frac{(\gamma_1 \cos(\alpha\pi) + \mu \gamma_2 \sin(\alpha\pi))}{(1-\beta_1\beta_2)} \right] \frac{v}{\bar{c}} + [b-1]T = 2 \frac{(\gamma_1 \cos(\alpha\pi) + \mu \gamma_2 \sin(\alpha\pi))}{(1-\beta_1\beta_2)} \frac{v^*}{\bar{c}} \quad (32)$$

La solution de ce système dépend du déterminant $D(b, \bar{c})$ donné par :

$$D(b, \bar{c}) = - \frac{b-1}{4\bar{c}\gamma_1 \cos(\alpha\pi)} \left(4b\gamma_1 \cos(\alpha\pi) + \pi(-1+2\alpha) (\gamma_1(-1+2b+\cos(2\alpha\pi)) + \mu \gamma_2 \sin(2\alpha\pi)) \right) \quad (33)$$

Si $v^* = 0$ alors le système à résoudre est homogène de déterminant strictement négatif. Nous avons alors une solution triviale unique donnée par $v = 0$ et $T = 0$. Il est clair que cette solution correspondant à un problème statique n'est pas acceptable physiquement. Par contre lorsque $v^* \neq 0$, il y a une solution unique donnée par :

$$v = \frac{v^*}{1 + \frac{4b\gamma_1 \cos(\alpha\pi)}{\pi(-1+2\alpha) (\mu\gamma_2 \sin(2\pi\alpha) + \gamma_1(-1+2b+\cos(2\pi\alpha)))}} \quad (34)$$

et

$$T = - \frac{4b\gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_1 \cos(2\alpha\pi) + \mu\gamma_2 \sin(2\alpha\pi))}{(b-1)(-1+\beta_1\beta_2) \left(4b\gamma_1 \cos(\alpha\pi) + \pi(-1+2\alpha) (\mu\gamma_2 \sin(\pi\alpha) + \gamma_1(-1+2b+\cos(\pi\alpha))) \right)} \frac{v^*}{\bar{c}} \quad (35)$$

On vérifié aisément que cette solution vérifie $v > 0$ et $T > 0$ comme c'est requis. On pourra vérifier aussi que cette solution satisfasse toutes les conditions requises sauf une : la contrainte normale présente une singularité positive sur une zone de contact très petite. En effet, on la solution permet d'affirmer que le gradient gradient $u_{x,x}$ présente une singularité négative en b qui du de signe contraire que celui de σ_{yy} . Ceci implique l'existence d'une petite zone de séparation.

Références

- [1] H.D. Bui, A. Oueslati. The sliding interface crack with friction between elastic and rigid bodies, *J. Mech. Phys. Solids*, 53, 1397-1421, 2005.
- [2] N.I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Groningen, 1953.
- [3] Q.S. Nguyen, A. Oueslati, A. Steindl, A. Teufel, H. Troger. Travelling interface waves in a brake-like system under unilateral contact and Coulomb friction, *C.R. Mecanique*, 336, 203-209, 2008.
- [4] J.M.R. Radok. On the solution of problems of dynamic plane elasticity, *Quart. Appl. Math.*, 14, 289, 1956.
- [5] K. Ranjith, J.R. Rice. Slip dynamics at an interface between dissimilar materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 49, 341-361, 2001.