



**HAL**  
open science

# Étude comparative des vibrations non-linéaires amorties de structures composites

Naima Moustaghfir, Nicolas Jacques, El Mostafa Daya

► **To cite this version:**

Naima Moustaghfir, Nicolas Jacques, El Mostafa Daya. Étude comparative des vibrations non-linéaires amorties de structures composites. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01421808

**HAL Id: hal-01421808**

**<https://hal.science/hal-01421808>**

Submitted on 22 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Etude comparative des vibrations non-linéaires amorties de structures composites

N. Moustaghfir<sup>1</sup>, N. Jacques<sup>2</sup>, E.M. Daya<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan, 61 Avenue du Président Wilson 94235 Cachan France

naima.moustaghfir@lmt.ens-cachan

<sup>2</sup> Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes  
2 rue François Verny, 29806 Brest cedex 9, France

<sup>3</sup> Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux  
Université Paul Verlaine Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 9, France

---

**Résumé** – Dans le présent travail, on s'intéresse aux vibrations forcées des structures composites en tenant compte des non linéarités géométriques et de l'effet de l'amortissement. Une approche analytique pour la détermination de la réponse dynamique de ces structures est présentée. Cette approche est basée sur la méthode de balance harmonique couplée avec la technique de Galerkin à un seul mode. Les résultats obtenus analytiquement sont comparés à ceux obtenus numériquement par la méthode des éléments finis en utilisant le code industriel ABAQUS.

**Mots clés** – Vibrations non linéaires, amortissement, réponse dynamique, balance harmonique, méthode de Galerkin, modèle analytique, simulations par éléments finis.

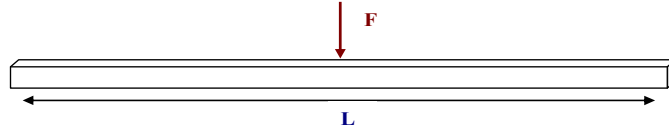
## 1 Introduction

Les structures composites sont des composantes largement utilisées dans plusieurs industries grâce aux gains de poids qu'elles permettent. Lorsque ces structures subissent des chargements intenses ou dont la fréquence d'excitation est proche d'une résonance, l'amplitude des vibrations augmente et les effets des non-linéarités géométriques peuvent devenir significatifs. Un effet bien connu de ces non-linéarités est la variation des fréquences de résonance avec l'amplitude de vibration. Il est important de noter que pour des structures élancées, ces effets non linéaires peuvent déjà être importants pour des amplitudes de vibrations modérées (par exemple, de l'ordre de l'épaisseur dans le cas de plaques). On comprend l'importance, pour l'ingénieur, de disposer d'outils permettant de décrire l'évolution des amplitudes de vibrations libres ou forcées, tenant compte des non-linéarités géométriques et également de l'amortissement, et de connaître le domaine d'applicabilité de ces outils.

Dans le cadre de ce travail, différentes approches sont utilisées pour analyser les vibrations forcées de poutres composites à grandes amplitudes. Tout d'abord, un modèle analytique a été développé. Ce dernier est basé sur l'utilisation de la méthode de balance harmonique et de celle de Galerkin (avec un seul mode) [1,2]. D'autre part, des simulations ont été réalisées à l'aide d'un code de calcul par éléments finis. Les résultats de ces deux approches sont comparés et discutés.

## 2 Formulation

On considère les vibrations transverses d'une poutre composite symétrique de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $h$ . Elle est composée de plusieurs plis de matériau orthotrope.



Dans le cadre de la théorie classique des poutres laminées, le cisaillement transverse est négligé; la déformation axiale  $\varepsilon$  et la courbature  $\kappa$  sont données par :  $\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2$  et  $\kappa = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  avec  $U(x,t)$  et  $W(x,t)$  sont respectivement le déplacement axial et le déplacement

transverse. L'énergie de déformation totale est donnée par :  $V = \frac{1}{2} \int_0^L (N\varepsilon + M\kappa) dx$  avec  $N = AS\varepsilon$  et  $M = DI\kappa$  sont respectivement l'effort normal et le moment de flexion. Avec  $A$ ,  $D$ ,  $S$  et  $I$  sont respectivement la rigidité longitudinale, la rigidité de flexion, la section droite et le moment d'inertie de la poutre. Le travail de l'effort externe  $F(x,t)$  est donné par :  $W_{ext} = \int_0^L FW dx$ . En négligeant l'inertie dans le plan, l'énergie cinétique s'écrit sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx.$$

L'équation gouvernant le mouvement est obtenue à partir de la forme variationnelle du principe de Hamilton.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{ext}) dt = 0, \text{ où } t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont deux instants arbitraires.}$$

### 2.1 Principe de l'approche analytique

Nous présentons ici une approche analytique basée sur la méthode de la balance harmonique et une analyse à un seul mode dans la base de Galerkin. La poutre est soumise à un chargement harmonique transverse qui s'écrit comme suit :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

où  $F_0$  et  $\omega$  sont respectivement l'amplitude et la fréquence de l'excitation. Ainsi, on considère que le déplacement est aussi harmonique et est écrit sous la forme suivante :

$$W(x,t) = a w(x) \sin(\omega t) \quad (2)$$

En insérant les expressions (1) et (2) dans l'équation gouvernante du mouvement, et en appliquant la méthode de balance harmonique on obtient l'équation d'amplitude traduisant la vibration non linéaire forcé de la poutre :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{3 k_{nl} a^2}{4 k_1} - \frac{F_0}{k_1 a} \quad (3)$$

Avec les constantes modales de masse  $m$ , de rigidité linéaire  $k_1$  et de rigidité non linéaire  $k_{nl}$  définies comme suit :

$$m = \rho \cdot b \cdot h \int_0^L w^2 dx ; k_1 = b D I \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx ; k_{nl} = b A \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx \quad (4)$$

Le cas des vibrations non linéaires libres est en considérant un chargement nul  $F_0 = 0$ , on obtient ainsi l'équation décrivant la « backbone curve » :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{3 k_{nl} a^2}{4 k_1} \quad (5)$$

Pour les oscillations forcées non amorties, l'angle de phase entre l'excitation et la réponse périodique  $w(t)$  est égal à 0 ou  $\pi$ . Si on ajoute le terme d'amortissement linéaire, on peut omettre l'angle de phase intermédiaire comme pour le cas d'un oscillateur linéaire. Ainsi, au lieu d'écrire l'excitation sous la forme (1), on tient compte de l'angle de phase en écrivant de préférence l'excitation périodique comme suit :

$$F(t) = F_1 \sin(\omega t) + F_2 \cos(\omega t) \quad (6)$$

Ainsi, en utilisant la méthode de balance harmonique et en négligeant le terme produit par  $\sin(3\omega t)$ , on obtient :

$$-\omega^2 a + \omega_1^2 a + \frac{3 k_{nl} a^3}{4 m} = F_1 \quad (7.1)$$

$$\frac{c}{m} \omega A = F_2 \quad (7.2)$$

$$F_0^2 = F_1^2 + F_2^2 \quad (7.3)$$

Avec  $c$  est la constante d'amortissement modale définie par :  $c = 2\xi m$ .

En insérant (7.1) et (7.2) dans (7.3), on obtient l'équation d'amplitude suivante :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\omega_1^2} \left( \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m}\right)^2 + \frac{3 k_{nl}}{4 m} \pm \sqrt{\left(\frac{F_0}{m \cdot a}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{c}{m}\right)^4 - \left(\frac{c}{m}\right)^2 \left(\omega_1^2 + \frac{3 k_{nl}}{4 m} a^2\right)} \right) \quad (8)$$

L'équation (8) tient compte de l'amortissement du matériau et permet de déterminer l'amplitude de la vibration en fonction du rapport  $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{f}{f_1}$ , où  $\omega = 2\pi f$ .

## 2.2 Calcul par éléments finis

Un calcul en dynamique non-linéaire a été effectué avec le code commercial ABAQUS/Standard, en utilisant une intégration directe en temps. La structure est modélisée en utilisant des éléments coques à quatre nœuds, ayant des fonctions d'interpolation bilinéaires et avec intégration réduite (S4R). Ces éléments tiennent compte de la rigidité due au cisaillement transverse. En tenant compte de la symétrie, seulement un quart de la plaque est maillée. Suite à

une étude de la convergence du maillage, non introduite dans ce papier pour des raisons de breveté, un maillage à 150 (3x50) éléments a été choisi. Comme dans le cas du modèle analytique, nous avons considéré un amortissement de Rayleigh « proportionnel à la masse » (où les forces d'amortissement sont proportionnelles à la vitesse absolue).

La plaque est soumise à des excitations harmoniques. Les calculs sont effectués jusqu'à ce qu'un régime permanent soit atteint pour l'obtention d'une solution stationnaire. Le schéma de Hilbert-Hughes-Taylor (HHT) est utilisé pour l'intégration des équations de mouvement [9]. Nous avons constaté que des résultats obtenus sont précis lorsque le pas de temps est 300 fois plus petit que la période de l'excitation.

### 2.3 Résultats et applications

La structure étudiée est de type poutre composites de fibre de Carbone époxy et une matrice en époxy dont les dimensions sont les suivantes : longueur  $L=956\text{mm}$ , largeur  $b=106\text{ mm}$  et épaisseur  $h=4.16\text{ mm}$ . Elle est composée de 16 plis en séquence symétrique  $\{90/45/0/-45\}_{2S}$ . Les propriétés du matériau sont les suivantes : modules de Young  $E_{11}=160\text{ GPa}$ ;  $E_{22}=8600\text{ MPa}$ ;  $E_{33}=E_{22}$ , coefficients de Poisson  $\nu_{12}=0.32$ ;  $\nu_{12}=\nu_{13}$ ;  $\nu_{23}=0.40$  et coefficients de cisaillement  $G_{12}=4.85\text{GPa}$ ;  $G_{13}=G_{12}$ ;  $G_{23}=2/3*G_{12}$ . On cherche à prédire la courbe de réponse non linéaire forcée et amortie pour le cas d'une poutre encastree ou simplement appuyée aux deux extrémités en utilisant l'équation (8).

On cherche à prédire la réponse non linéaire pour des conditions aux limites de type encastrement ou appui simple, pour des fréquences d'excitation proches de la première fréquence propre de vibration. Les figures 2, 3 et 4 présentent les résultats obtenus avec le modèle analytique ainsi qu'avec le code industriel ABAQUS. On observe que les simulations numériques prévoient une non-linéarité (de type durcissement) plus importante de la courbe de réponse que le modèle analytique. Cependant, les résultats obtenus par les deux méthodes restent en bon accord.

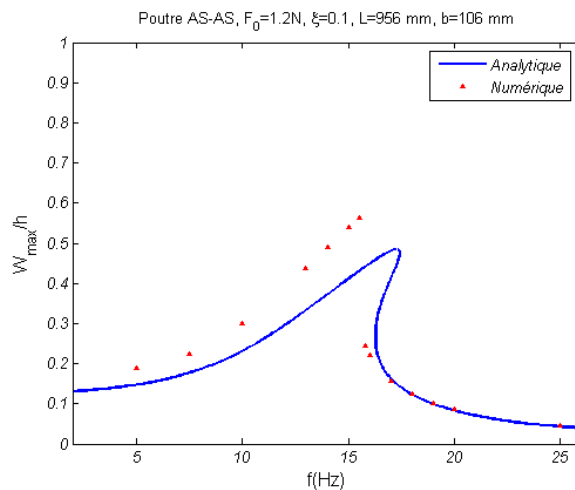


Figure 2 – Courbe de réponse dynamique d'une poutre en Appui Simple Appui Simple (AS-AS) amplitude maximale en fonction de la fréquence.

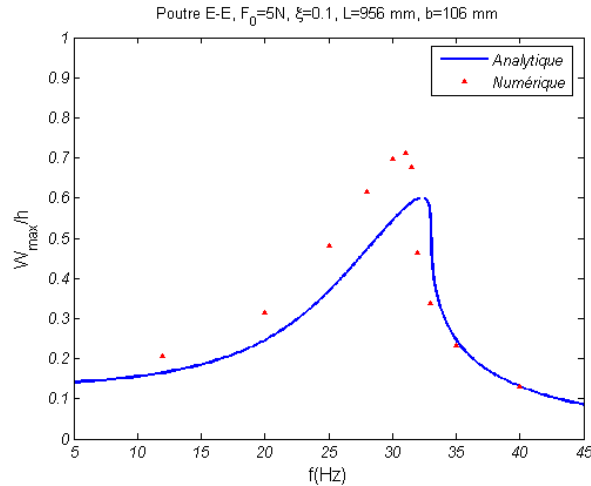


Figure 3 - Courbe de réponse dynamique d'une poutre encastree-encastree (E-E) amplitude maximale en fonction de la frequence.

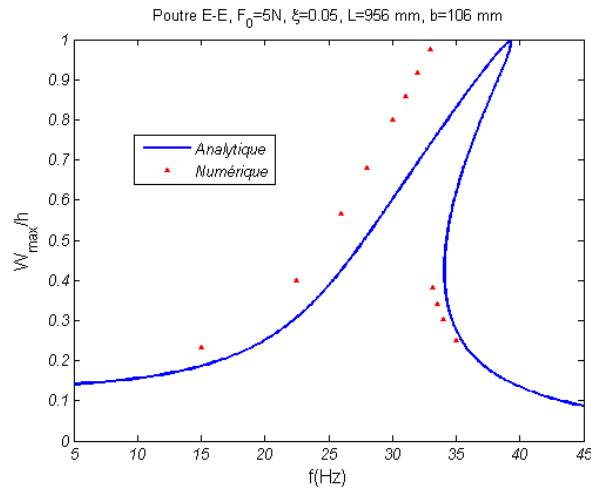


Figure 4 - Courbe de réponse dynamique d'une poutre encastree-encastree (E-E) amplitude maximale en fonction de la frequence.

## 2.4 Conclusions

Une approche analytique pour la réponse non linéaire d'une poutre composite est proposée. L'effet de l'amortissement est pris en considération et la solution est obtenue via la méthode de balance harmonique couplée à la technique de Galerkin à un seul mode. Une validation de l'approche proposée est effectuée au travers de comparaisons avec des simulations numériques par éléments finis.

## Références

- [1] L. Azrar, R. Benamar, R.G. White. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response of beams at large amplitudes, Part I. Journal of Sound and Vibration 2002; 224 (2) : 183-207.

- [2] E.M. Daya, L. Azrar, M. Potier-Ferry. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 2004; 271 (3-5):789-813.
- [3] M.J. Yan, E. H. Dowell, Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams, *Journal of applied Mechanics* 1972 (94): 1041-1046.
- [4] D. K. Rao, Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Sciences* 1978, 20 (5): 271-281.
- [5] E.J. Kovac, W.J. Anderson, R.A. Scott, Forced non linear vibrations of damped sandwich beam, *Journal of Sound and Vibration* 1971, 17 (1) 25-39.
- [6] F. Perignon, Vibrations forcés de structures minces, élastiques, non linéaires, PhD thesis, University of Aix Marseille II. 2004.
- [7] P. Ribeiro, M. Petyt, Non-linear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods, *International Journal of Mechanical Sciences* 1999, 45(4-5): 437-459.
- [8] P. Ribeiro, M.Petyt, Non linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite element method, *Journal of Sound and Vibration* 1999, 224 (4): 591-624.
- [9] Abaqus documentation (version 6.5), ABAQUS Inc., 2004.