HAL
open science

ESTIMATIONS DE STRICHARTZ POUR L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE STRICTEMENT CONVEXE

Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, Fabrice Planchon

To cite this version:

Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, Fabrice Planchon. ESTIMATIONS DE STRICHARTZ POUR L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE STRICTEMENT CONVEXE . Séminaires et congrès, 30, 2017. hal-01421079

HAL Id: hal-01421079

https://hal.science/hal-01421079

Submitted on 21 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ESTIMATIONS DE STRICHARTZ POUR L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE STRICTEMENT CONVEXE

OANA IVANOVICI, GILLES LEBEAU, AND FABRICE PLANCHON

Résumé. On se propose d'établir ici des estimations de Strichartz pour l'équation des ondes dans un domaine strictement convexe (quelconque) de $\mathbb{R}^3$. Dans le papier [5], nous avons obtenu des estimations de dispersions optimales pour la solution de l'équation des ondes dans un domaine convexe particulier (le modèle de Friedlander). Ce résultat, qui montre qu'une perte de $\frac{1}{4}$ par rapport au cas plat est nécessaire, implique, en utilisant la méthode TT^* usuelle, des estimations de type Strichartz sans perte (en termes d'échelle) mais avec des indices modifiés, ce que l'on résume en parlant de perte d'un quart. Pour réussir à faire mieux (obtenir un résultat qui correspondrait à une perte d'au plus $\frac{1}{6}$), il faut s'intéresser au lieu et à la fréquence de l'apparition des caustiques responsables de la perte et montrer qu'elles sont suffisamment exceptionnelles pour que l'effet d'une moyenne en temps, présent dans les estimations de Strichartz, puisse atténuer la perte.

Table des matières

1. Introduction 2
2. Paramétrice pour un domaine modèle 4
3. Paramétrice dans le cas d'un domaine général 6
4. Les estimations de Strichartz optimales dans le régime des queues d'arondes 9
Références 10

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R01, 35A17, 35A18, 35B45, 35L20.
Key words and phrases. Estimations de Strichartz, équation des ondes, domaine strictement convexe.
authors were partially supported by A.N.R. grant GEODISP and ERC project SCAPDE.

1. Introduction

Les estimations dispersives dites "de Strichartz" mesurent la taille et la dispersion des solutions de l'équation des ondes linéaire sur un domaine Ω avec bord $\partial\Omega$ (possiblement vide) :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u(t,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \; \partial_t u|_{t=0} = u_1, \\ Bu = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ici Δ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω. Si $\partial\Omega \neq \emptyset$, on considère ou bien la condition de Dirichlet sur le bord ($B =$ l'opérateur identité) : $u|_{\partial\Omega} = 0$ ou bien la condition de Neumann ($B = \partial_\nu$), où ν est le vecteur unitaire normal au bord.

Pour pouvoir perturber ces équations et étudier les problèmes non-linéaires associés, avoir un contrôle de la "taille" du flot linéaire en termes de la taille des données initiales s'avère crucial. Pour l'équation des ondes non-linéaires, les normes mixtes $L_t^q L^r(\Omega)$ sont particulièrement utiles : au prix d'une moyenne en temps on gagne de l'intégrabilité en espace, parfois jusqu'à $r = \infty$.

Quant aux équations linéaires, une estimation (locale) de base indique que sur toute variété riemannienne sans bord, la solution linéaire de (1) vérifie (pour $T < \infty$)

$$h^\beta \|\chi(hD_t)u\|_{L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C\Big(\|u(0,x)\|_{L^2} + \|hD_t u\|_{L^2}\Big), \tag{2}$$

où $\chi \in C_0^\infty$ est une fonction lisse à support inclus dans un voisinage de 1. Si d désigne la dimension de la variété, on a $\beta = d\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\Big) - \frac{1}{q}$, où le couple (q,r) est admissible pour l'équation des ondes, c.a.d. :

$$\frac{2}{q} + \frac{d-1}{r} \leq \frac{d-1}{2}, \quad q > 2. \tag{3}$$

Lorsque l'égalité a lieu dans (3), la paire (q,r) est dite strictement admissible. Si (2) a lieu pour $T = \infty$, on parle d'inégalité de Strichartz globale en temps. Ces estimations ont été étudiées depuis bien longtemps dans l'espace de Minkowski (métrique plate) : si Ω désigne l'espace $\mathbb{R}^d$ avec la métrique euclidienne $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, la solution $u_{\mathbb{R}^d}(t,x)$ de (1) dans $\mathbb{R}^d$ avec $(u_0 = \delta_a, u_1 = 0)$ est donnée par la formule

$$u_{\mathbb{R}^d}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \cos(t|\xi|) e^{i(x-a)\xi} d\xi$$

et elle vérifie les estimations de dispersion usuelles :

$$\|\chi(hD_t)u_{\mathbb{R}^d}(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}\}. \tag{4}$$

L'interpolation entre (4) et l'estimation de l'énergie, suivie d'un argument classique de dualité dit TT^*, permet d'obtenir facilement les estimations (2). Ces estimations peuvent être généralisées à tout (Ω, g) sans bord grâce à leur caractère local (vitesse de propagation finie). Les estimations (2) sont optimales sur une telle variété riemannienne.

La motivation principale pour les estimations de type Strichartz vient de leurs applications en analyse harmonique et l'étude des problèmes non-linéaires dispersifs. Par exemple, (2) peut être utilisée pour montrer des résultats d'existence pour l'équation des ondes semi-linéaire.

Même si le cas sans bord est relativement bien compris depuis un certain temps, l'obtention de tels résultats sur des variétés à bord s'avère une tache bien plus difficile. Pour des variétés à bord strictement concave, cette théorie a pu être établie grâce à la paramétrice de Melrose et Taylor près de rayons tangents au bord : des estimations de Strichartz optimales pour les ondes à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe ont été obtenues dans [9] et, très récemment, des estimations de dispersion optimales en $d = 3$ ont été établies dans [7], ainsi que des contre-exemples en dimension plus grande à l'extérieur d'une sphère. Pourtant, dès que l'hypothèse de stricte concavité du bord est enlevée, la présence des rayons géodésiques multi-réfléchis et de leurs limites, les rayons glissants, ne permet plus d'avoir une telle paramétrice. En dehors du cas d'un bord concave, il n'y avait que très peu de résultats jusqu'à très récemment : des estimations de Strichartz avec pertes ont été obtenues dans [1] dans un domaine compact, en utilisant les constructions de paramétrices en temps petit de [10], qui, à leurs tour, ont été inspirées des travaux sur des domaines à métriques à régularité faible [11]. L'avantage majeur de [1] est en même temps son point faible : en considérant uniquement des intervals de temps qui ne permettent pas de voir plus d'une réflection d'un paquet d'onde au bord, on peut traiter le problème indépendamment de la géométrie du bord mais on ne peut pas voir l'effect de dispersion dans les directions tangentes (en dimension $d \geq 3$).

Dans cette note qui résume les idées importantes de [6] et [8], le but est d'obtenir des estimations de Strichartz à l'intérieur d'un domaine, meilleures que celles obtenues directement à partir du résultat (optimal) de dispersion de [6] : avant d'énoncer notre résultat principal, on va introduire le modèle de Friedlander d'un demi-espace $\Omega_d = \{(x, y)|x > 0, y \in \mathbb{R}^{d-1}\}$ muni de la métrique g_F héritée de l'opérateur de Laplace suivant : $\Delta_F = \partial_x^2 + (1+x)\Delta_{\mathbb{R}_y^{d-1}}$. On s'aperçoit facilement que (Ω_d, g_F) modélise localement un domaine strictement convexe : en effet, (Ω_d, g_F) peut être regardé comme un modèle simplifié du disque unité $D(0, 1)$ après le passage en coordonnées polaires (r, θ), avec $r = 1 - x/2$, $\theta = y$. Pour ce modèle isotrope particulier, nous avons montré dans [5] qu'une perte de dérivées par rapport à l'estimation de dispersion libre (4) est inévitable, et qu'elle apparaît en raison de la présence de caustiques de type queue d'aronde dans le support singulier de la solution ; ensuite, nous avons obtenu dans [8] des estimations de Strichartz avec perte de moins de $\frac{1}{6}$.

Théorème 1. [5] *Il existe $T > 0$ et il existe une constante $C(d) > 0$ tels que pour tous $a \in (0, 1]$, $h \in (0, 1]$ et $t \in (0, T]$ la solution $u_a(t, x, y) = \cos(t\sqrt{|\Delta_F|})(\delta_{x=a,y=0})$ de (1) avec $\Delta = \Delta_F$ vérifie*

$$|\chi(hD_t)u(t, x)| \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-2}{2}}\gamma(t, h, a)\}, \tag{5}$$

où

$$\gamma(t, h, a) = \begin{cases} (\frac{h}{t})^{1/2} + a^{1/4}(\frac{h}{t})^{1/4}, \text{ si } a \geq h^{4/7-\epsilon} \\ (\frac{h}{t})^{1/3} + h^{1/4}, \text{ si } a \leq h^{1/2}. \end{cases}$$

De plus, il existe une suite de temps $t_n = 4n\sqrt{a(1+a)}$ *pour lesquels on a égalité dans* (5) *pour* $x = a$.

Remarque 2. *L'estimation* (5) *nous dit que dans un domaine strictement convexe on perd une puissance* $\frac{1}{4}$ *dans l'exposant de* h *par rapport à l'estimation* (2) *de l'espace libre, ce qui est due à des phénomènes micro-locaux comme les caustiques générées en temps arbitrairement petit près du bord. Ces caustiques apparaissent lorsque les rayons optiques envoyés d'une même source dans des directions différentes cessent de diverger.*

Notre but est de généraliser les résultats précédents au cas d'un domaine strictement convexe quelconque. Pour cela, on refait d'abord la construction de la paramétrice en suivant la méthode de notre papier [8], mais cette fois dans le cadre d'un opérateur de Laplace général. Cette étape implique plusieurs difficultés techniques importantes : l'idée "simple" consistant à dire qu'on sera proche du cas modèle anisotrope ne trouve pas de traduction élégante dans une preuve qui permettrait de tordre un opérateur sur l'autre. Il faut donc effectuer une construction microlocale perturbative "à la main".

Théorème 3. [6] *Les estimations de Strichartz restent vraies pour la solution de* (1) *dans un domaine strictement convexe* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *avec*

$$\frac{1}{q} = \Big(\frac{d-1}{2} - \frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\Big), \quad d = 3.$$

Remarque 4. *Ce résultat a été démontré en dimension* $d = 2$ *par M.Blair, H.Smith et C.Sogge dans* [1] *pour des métriques arbitraires (i.e. sans l'hypothèse de convexité stricte). Notre théorème de* [8] *améliore tous les résultats connus jusqu'à présent pour* $d \geq 3$. *Le cas d'un strict convexe quelconque, esquissé ici, est traité dans un travail en cours en collaboration avec G.Lebeau, F.Planchon et R.Lascar* [6].

Un point essentiel de la preuve consiste en une description précise de la géométrie des ondes "sphériques" (la "sphère" étant ici un objet singulier en raison des multiples réflexions). La démonstration fournit une analyse assez détaillée de la fonction de Green des ondes, au moins dans certains régimes. En effet, la construction des paramétrices microlocales que j'ai utilisée pour obtenir les contre-exemples de [3], [4] semble instable dans une zone intermédiaire près du bord, où l'estimation de dispersion est obtenue par injection de Sobolev, en remarquant que le flot préserve essentiellement la taille du microsupport.

2. Paramétrice pour un domaine modèle

Dans cette partie on va indiquer comment construire une paramétrice dans le cas d'un opérateur modèle anisotrope. Soit Ω_d définit plus haut. On introduit l'opérateur de Laplace suivant

$$\Delta_M = \partial_x^2 + \sum \partial_{y_j}^2 + x\Big(\sum_{j,k} r_{j,k}\partial_{y_j}\partial_{y_k}\Big),$$

avec la condition de Dirichlet sur le bord. On note $q(\eta) = \sum_{j,k} r_{j,k}\eta_j\eta_k$, où $r_{j,k}$ sont tels que q est définie positive. Sous cette hypothèse (Ω_d, Δ_M) modélise localement un domaine strictement convexe qui coïncide avec le modèle de Friedlander lorsque $q(\eta) = |\eta|^2$. En

prenant la transformation de Fourier dans la variable transverse y, $-\Delta_M$ devient $-\partial_x^2 + \eta^2 + xq(\eta)$, qui, pour $\eta \neq 0$ est auto-adjoint et positif sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ avec résolvante compacte. Il admet une base orthonormale dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ de fonctions propres $\{e_k(x,\eta)\}_{k\geq 0}$ associées aux valeurs propres $\lambda_k(\eta) = \eta^2 + \omega_k q(\eta)^{2/3}$, où $\{-\omega_k\}_{k\geq 1}$ désignent les zéros de la fonction d'Airy en ordre décroissant. On a une formule explicite

$$e_k(x,\eta) = f_k \frac{q(\eta)^{1/6}}{k^{1/6}} Ai\Big(q(\eta)^{1/3}x - \omega_k\Big), \tag{6}$$

où, pour $k \geq 1$, f_k est tel que $\|e_k(.,\eta)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$, $\int_0^\infty Ai^2(x-\omega_k)dx = \frac{k^{1/3}}{|f_k|^2}$.

Pour $a > 0$, soit $\delta_{x=a}$ la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}_+$: alors elle s'écrit comme une somme de modes e_k de la façon suivante

$$\delta_{x=a} = \sum_{k\geq 1} e_k(x,\eta)e_k(a,\eta).$$

On considère la donnée au temps $t = 0$ de la forme $u_0(x,y) = \psi(hD_y)\delta_{x=a,y=0}$, où $h \in (0,1]$ est un petit paramètre et où $\psi \in C_0^\infty((\frac{1}{2},2))$.

On rappelle la formule de la fonction de Green associée au temps t obtenue dans [5] à partir de la décomposition de la donnée u_0 en somme de modes de galerie :

$$G_M(x,y,t,a) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} e^{\pm it\sqrt{\lambda_k(\eta/h)}} e^{iy\eta/h} \psi(\eta) e_k(x,\eta/h) e_k(a,\eta/h) d\eta. \tag{7}$$

Remarque 5. *La fonction G_M est une paramétrice pour l'équation $i\partial_t u \pm \sqrt{-\Delta_M}u = 0$ (et donc de l'équation des ondes (1)) avec donnée au temps $t = 0$ égale à u_0. Elle est valable pour toute distance initiale $a > 0$ au bord.*

Remarque 6. *Notons que dans la somme (7), la contribution principale vient des valeurs $k \simeq \frac{a^{3/2}}{h}$. Pour $k \ll \frac{a^{3/2}}{h}$ ou $k \gg \frac{a^{3/2}}{h}$ il est facile d'obtenir des estimations de dispersion avec perte de $\frac{1}{6}$. Les modes $\frac{1}{h} \lesssim k$ correspondent à des ondes transverses pour lesquelles il n'y a pas de perte dans la dispersion.*

L'estimation de dispersion. On considère deux cas, selon la taille de a.

- Pour de petites valeurs de la distance initiale au bord a, $h^{2/3} \lesssim a \ll h^{22/39}$, on utilise directement la formule explicite de G_M pour estimer la solution de l'équation des ondes dans Ω en norme L^∞. Dans [3, Théorème 1.8.(2)], on a démontré que si la donnée est un mode de galerie, i.e. de la forme

$$u_0^k(x,y) = \frac{1}{h} \int e^{iy\eta/h} \psi(\eta) e_k(x,\eta/h) e_k(a,\eta/h) d\eta, \tag{8}$$

  avec $k \geq 1$ fixé, alors on n'obtient pas de perte dans les estimations de Strichartz par rapport à l'espace $\mathbb{R}^d$ avec métrique plate (mais la constante dépend bien sûr de k). On utilise la même méthode pour montrer que si a est assez petit, étant donné la somme définissant G_M il n'y a pas "trop" de termes, on peut obtenir la dispersion avec une perte d'au plus 1/6.

– Pour $a \gg h^{4/7}$ on obtient une paramétrice sous la forme d'une somme indexée selon le nombre de réflexions au bord. Chaque terme dans la somme est une intégrale dont la phase admet des points critiques dégénérés et il se trouve que si $a > h^{1/3}$, la perte correspondante dans l'estimation L^∞ est bien plus importante pour qu'on puisse espérer appliquer un argument TT^* classique pour obtenir des Strichartz optimales. Dans ce régime, on localise la fonction de Green près de points où une singularité de type queue d'aronde se forme et on obtient des estimations plus raffinées dans de très petits voisinages autour de ces points.

Remarque 7. *Les deux régimes se recouvrent bien car $h^{4/7} \ll h^{22/39}$.*

Théorème 8. [8] *Dans le régime $a \gg h^{4/7}$, le facteur $h^{1/4}$ du Théorème 1 apparaît seulement près d'une suite de points t_n, avec une estimation (optimale) de $\gamma(t,h,a)$ pour t dans l'intervalle $I_n = (t_n(1-a), t_n(1+a))$:*

$$\gamma(t,h,a) \leq (\frac{h}{t})^{1/2} + h^{1/3} + \frac{a^{1/8}h^{1/4}}{n^{1/4} + h^{-1/12}a^{-1/24}|t^2 - t_n^2|^{1/6}}. \tag{9}$$

Notons aussi que pour $t \notin I_n$, le dernier facteur est $\leq (h/t)^{1/3}$. Ce raffinement de $\gamma(t,h,a)$ est donné par une analyse soignée de la dégénérescence des arguments de phase stationnaire autour de t_n dans [5].

3. Paramétrice dans le cas d'un domaine général

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ un domaine strictement convexe à bord C^∞, et Δ le Laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Dans un système de coordonnées géodésiques normales $(x,y) \in \Omega_d = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, la métrique de $\mathbb{R}^d$ est

$$\begin{pmatrix} g(x,.) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où g est la métrique Riemannienne induite sur l'hypersurface $\mathrm{dist}((x,y), \partial\Omega_d) = x$. Dans ces coordonnées le Laplacien s'écrit sous la forme

$$\Delta = \partial_x^2 + R(x,y,\partial_y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1},$$

avec $R_0(y,\partial_y) = R(0,y,\partial_y) = \sum \partial_{y_j}\partial_{y_k} + O(y^2)$ et $R_1(y,\partial_y) = \partial_x R(0,y,\partial_y) = \sum R_1^{j,k}(y)\partial_{y_j}\partial_{y_k}$ (où, grâce à la condition de convexité stricte on sait que la forme quadratique $q(\eta) = \sum R_1^{j,k}(y)\eta_j\eta_k$ est définie positive).

Pour $a > 0$, on cherche à obtenir une solution approchée de

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad (u, \partial_t u)|_{t=0} = (\delta_{x=a,y=0}, 0), \quad u|_{\mathbb{R}\times\partial\Omega_d} = 0, \tag{10}$$

à partir d'une solution (explicite !) de l'opérateur modèle donné par :

$$\triangle_M = \partial_x^2 + \sum \partial_{y_j}^2 + x\Big(\sum R_1^{j,k}(0)\partial_{y_j}\partial_{y_k}\Big).$$

Pour $\Delta = \Delta_M$, une solution de (10) peut être facilement obtenue de façon explicite. Le passage de la solution de l'équation des ondes avec Laplacien modèle (anisotrope) Δ_M

au cas général de Δ nécessite l'utilisation du théorème des surfaces *glancing* de Richard Melrose :

Théorème 9. *(Melrose-Taylor, Eskin) Deux paires de hypersurfaces avec intersection "glancing" sont localement équivalentes, via une transformation canonique symplectique* χ_M.

Dans le cas de l'opérateur modèle Δ_M, les hypersurfaces $\{q_M = x = 0\}$ et $\{p_M = \xi^2 + \eta^2 + xq(\eta) - 1 = 0\}$ ont une intersection *glancing* au point $(x, y, \xi, \eta) = (0, 0, 0, 1)$, c.a.d. qu'elles vérifient la condition suivante :

$$\{p, q\} = 0, \{p, \{p, q\}\} \neq 0 \text{ and } \{q, \{p, q\}\} \neq 0 \text{ en } (0, 0, 0, 1). \tag{11}$$

Dans le cas qui nous concerne, la paire

$$\{q = X = 0\} \text{ and } \{p = \Xi^2 + R(X, Y, \Theta) - 1 = 0\}$$

vérifie aussi la condition (11). Le Théorème de Melrose nous dit qu'il existe une transformation canonique χ_M qui vérifie

$$\chi_M(x = 0, \xi^2 + \eta^2 + xq(\eta) = 1) = (X = 0, \Xi^2 + R(X, Y, \Theta) = 1).$$

A partir d'une fonction génératrice de χ_M on va pouvoir obtenir une paramétrice du cas général à partir d'une paramétrice du cas modèle. En fait, on peut trouver explicitement des symboles $p_{0,1}$ tels que, si on introduit

$$G_M(x, y, \eta, \omega) = e^{iy\eta}\Big(p_0 Ai(xq(\eta)^{1/3} - \omega) + xp_1|\eta|^{-1/3} Ai'(xq(\eta)^{1/3} - \omega)\Big),$$

alors G_M vérifie $-\triangle_M G_M = \rho^2 G_M + O_{C^\infty}(|\eta|^{-\infty})$.

Fonction génératrice. Soit $(X - x)u + (Y - y)v + \Gamma(X, Y, u, v)$ une fonction génératrice de χ_M, alors on peut montrer qu'il existe un symbole $p(x, y, \eta, \omega, \sigma)$ de degré 0, à support compact dans un voisinage de $(0, 0, 0, \eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus 0$ pour lequel

$$G(x, y; \eta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(y\eta + \sigma^3/3 + \sigma(xq(\eta)^{1/3} - \omega) + \rho\Gamma(x, y, \frac{\sigma q(\eta)^{1/3}}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}))} p \, d\sigma$$

vérifie $-\Delta G = \rho^2 G + O_{C^\infty}(|\eta|^{-\infty})$. A partir de G et à l'aide d'une formule sommatoire de type Airy-Poisson on va obtenir une solution de (10) entre deux réflexions successives qui va avoir des propriétés similaires (points critiques dégénérés du même ordre) que celle du cas modèle. Si on note Φ la phase de G et p_h une normalisation de p alors

$$K_\omega(f)(t, x, y) = \frac{h^{2/3}}{2\pi} \int e^{\frac{i}{h}(t\rho(h^{2/3}\omega, \theta) + \Phi - y'\theta - t'h^{2/3}\omega)} p_h f(y', t') \, dy' dt' d\theta ds$$

est une solution de (10) entre $t = 0$ et la première réflexion au bord et il existe f_a tel que $K_\omega(f_a)(0, x, y) = \delta_{x=a, y=0}$. Le but est d'obtenir des paramétrices de la même forme entre deux réflexions successives ; dans ce but on utilise une formule de type Poisson.

Formule d'Airy-Poisson. On pose $A_\pm(z) = e^{\mp i\pi/3} Ai(e^{\mp i\pi/3} z)$. On introduit la fonction suivante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$L(\omega) = \pi + i \log\Big(\frac{A_-(\omega)}{A_+(\omega)}\Big).$$

Lemme 1. *La fonction L est à valeurs réelles, analytique, strictement croissante et vérifie :*

$$L(0) = \pi/3, \quad \lim_{\omega\to-\infty} L(\omega) = 0, \quad L(\Omega) \sim_{\omega\to+\infty} \frac{4}{3}\omega^{3/2},$$

et pour tout $k \geq 1$ on a

$$L(\omega_k) = 2\pi k \Leftrightarrow Ai(-\omega_k) = 0, \quad L'(\omega_k) = \int_0^\infty Ai^2(x-\omega_k)dx.$$

Ici $\{-\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ désignent les zeros de la fonction d'Airy Ai en ordre décroissant.

Le lemme se démontre en utilisant les expansions asymptotiques associées à $A_\pm$ et des calculs élémentaires.

Proposition 1. *On a l'égalité suivante dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\omega)$:*

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} \delta_{\omega=\omega_k}. \tag{12}$$

Remarque 10. *Notons que l'égalité précédente résulte simplement de la classique formule de Poisson reliant la somme des $\exp(-iNx)$ au peigne de Dirac, suivi d'un changement de variable $x = L(\omega)$, qui permet d'indexer la somme de droite sur les zéros d'Airy et non pas sur les nombres naturels (ce qui va rendre nos calculs ultérieurs beaucoup plus limpides).*

On pose maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{h,a}(t,x,y) &= < \sum_{N\in\mathbb{Z}} e^{-iNL(\omega)}, K_\omega(g_{h,a}) >_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \\ &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{L'(\omega_k)} K_{\omega_k}(g_{h,a}). \end{aligned} \tag{13}$$

Proposition 2. *$\mathcal{P}_{h,a}(t,x,y)$ est une paramétrice de (10) qui vérifie la condition de Dirichlet.*

On a ainsi obtenu une solution sous la forme d'une somme d'intégrales oscillantes (la somme sur N) qui sont presque-orthogonales en temps. Estimer la norme L^∞ de la somme à t fixé revient à estimer le sup des normes L^∞ de chaque terme. Chaque terme est une intégrale oscillante avec un unique point critique d'ordre 3 qui apparaît uniquement pour $x = a$ et une suite (t_n, y_n) qui n'est plus explicite mais dépend des directions initiales. On obtient alors l'équivalent du Théorème 8 dans ce cas général [6].

Notons que les termes de la somme sur $k \in \mathbb{N}$ dans (13) sont les "modes de galerie". Ces modes n'apparaissent dans la littérature que dans le cas d'un domaine modèle (la boule unité ou un modèle de Friedlander). Dans le travail [6] on construit des modes de galerie (à partir de la formule de $K_{\omega_k}(g_{h,a})$) dans le cas d'un opérateur général pour k suffisamment

grand, ce qui nous permet d'agir comme dans [5] et de démontrer des estimations de dispersion de façon directe pour des valeurs très petites de la distance initiale au bord a.

4. Les estimations de Strichartz optimales dans le régime des queues d'arondes

Pour simplifier on se restreint au cas de la dimension $d = 3$ et $\Delta = \Delta_F$. On considère la fonction de Green $G(t, x, y, a) = \chi(hD_t)e^{it\sqrt{|\Delta_F|}}(\delta_{x=a,y=0})$ et pour f à support compact dans les variables $(s, a \geq 0, b)$, on pose

$$A(f)(t, x, y) = \int G(t - s, x, y - b, a)f(s, a, b)dsdadb.$$

L'exposant dispersif est dans ce cas $\alpha_d := \frac{d-1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Il s'agit d'estimer la norme de Strichartz $L^{12/5}([0, 1], L^\infty(\Omega_3))$ (donc $r = \infty$ et $q = 12/5$) :

$$h^{2\beta}\|A(f)\|_{L^{12/5}_{t\in[0,1]}L^\infty_{x,y}} \leq C\|f\|_{L^{12/7}_s L^1_{a,b}}, \quad 2\beta = (d - \alpha_d) = 3 - 5/6 = 13/6.$$

On résume la situation : les singularités de type queue d'aronde apparaissent seulement en t_n, $x = a$; elles ont un effet sur les intervalles de temps $I_n := (t_n(1 - a), t_n(1 + a))$. En dehors de I_n on ne voit que des cusps qui font perdre $(\frac{h}{t})^{-1/6}$ dans la dispersion et induisent donc les estimations de Strichartz avec $q = 12/5$. L'estimation de $\gamma(t, h, a)$ dans (9) permet de se localiser précisément là où l'argument usuel de type TT^* ne s'applique plus.

On écrit $G(t, x, y, a) = G_0(t, x, y, a) + G_s(t, x, y, a)$ où G_s dénote la partie singulière, associée à une localisation en espace - temps de G dans des boules centrées aux points où les queues d'arondes apparaissent, i.e. en

$$|x - a| \leq \frac{a}{n^2}, \quad |t - t_n| \leq a^{3/2}n.$$

En utilisant la section précédente, on obtient les estimations raffinées suivantes :

Proposition 3.

$$h^{2\beta}\sup_{x,y}|G_0(t, x, y, a)| \leq C|t|^{-5/6};$$

$$h^{2\beta}\sup_{x,y}|G_s(t, x, y, a)| \leq D(t, a, h), \quad \sup_{a,h}\int_{-1}^{1}|D(t, a, h)|^p dt < \infty, \quad \forall p < 3.$$

Soit $A = A_0 + A_s$, le découpage correspondant à la décomposition précédente. L'estimation pour A_0 en découle facilement, car la convolution par $|t|^{-5/6}$ envoie $L^{12/7}$ dans $L^{12/5}$. En utilisant la Proposition 3 on déduit que $h^{2\beta}A_s$ est borné de $L^1_s L^1_{a,b}$ dans $L^{3-\epsilon}_t L^\infty_{x,y}$: remarquons qu'il est indispensable de faire la convolution $(L^p * L^1 \to L^p)$ avant d'intégrer

en a :

$$\begin{aligned}
\|A_s(f)(t,x,y)\|_{L^\infty_{x,y}} &\leq \int \sup_{x,y} |G_s(t-s,x,y-b,a)| \times |f(s,a,b)| dsdadb \\
&\lesssim \int h^{-2\beta} D(t-s,a,h)||f(s,a,b)|dsdadb \\
\|A_s(f)(t,x,y)\|_{L^p_t L^\infty_{x,y}} &\lesssim h^{-2\beta} \int \|D(t-s,a,h)\|_{L^p_t} \|f(s,a,b)\|_{L^1_s} dadb \\
\|A_s(f)(t,x,y)\|_{L^p_t L^\infty_{x,y}} &\lesssim h^{-2\beta} \sup_{a,h} \|D(t,a,h)\|_{L^p_t} \|f(s,a,b)\|_{L^1_{s,a,b}} .
\end{aligned}$$

Comme on travaille avec des normes locales en temps, on en déduit immédiatement l'estimation souhaitée puisque $1 < 12/7$ et $12/5 < 3$.

Références

[1] Matthew D. Blair, Hart F. Smith, and Christopher D. Sogge. Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5) :1817–1829, 2009.

[2] L. Hormander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. 274, Springer, Berlin 1985

[3] Oana Ivanovici. Counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation in domains. *Math. Ann.*, 347(3) :627–673, 2010.

[4] Oana Ivanovici. Counterexamples to the Strichartz inequalities for the wave equation in general domains with boundary. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5) :1357–1388, 2012.

[5] O. Ivanovici, G. Lebeau, F. Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains I : the Friedlander model case, *Annals of Math.*, vol. 180, issue 1 (2014), pages 323-380.

[6] O. Ivanovici, G. Lebeau, R. Lascar, F. Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains II : the general case, http ://www.arxiv.org/abs/1605.08800, 2016.

[7] O. Ivanovici, G. Lebeau. Dispersive estimates for the wave and Schrödinger equations outside strictly convex obstacles and counterexamples, prépublication 2016.

[8] O. Ivanovici, G. Lebeau, F. Planchon. Stricharz inequalities for the wave equation in strictly convex domains : $d = 2$, prépublication 2016.

[9] Hart F. Smith, Christopher D. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(4) :879–916, 1995.

[10] Hart F. Smith, Christopher D. Sogge. On the L^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary. *Acta. Math.*, 198(1) :107–153, 2007.

[11] Daniel Tataru. Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with nonsmooth coefficients. III. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :419–442, 2002.

Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 7351, CNRS et Université Nice Côte d'Azur, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France
E-mail address: oana.ivanovici@unice.fr

Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 7351, Université Nice Côte d'Azur, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France
E-mail address: gilles.lebeau@unice.fr

Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 7351, Université Nice Côte d'Azur, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France
E-mail address: fabrice.planchon@unice.fr