



**HAL**  
open science

# Modèle d'homogénéisation analytique pour la torsion de plaques orthotropes de type carton ondulé

Boussad Abbès, Anis Batti, Mehdi Kharbouch, Ying Qiao Guo

## ► To cite this version:

Boussad Abbès, Anis Batti, Mehdi Kharbouch, Ying Qiao Guo. Modèle d'homogénéisation analytique pour la torsion de plaques orthotropes de type carton ondulé. 9e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01419969

**HAL Id: hal-01419969**

**<https://hal.science/hal-01419969v1>**

Submitted on 20 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Modèle d'homogénéisation analytique pour la torsion de plaques orthotropes de type carton ondulé

B. Abbès, A. Batti, M. Kharbouch, Y.Q. Guo

Université de Reims Champagne Ardenne  
GRESPI/LMN-Laboratoire de Modélisation Numérique  
UFR Sciences, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims  
[boussad.abbes@univ-reims.fr](mailto:boussad.abbes@univ-reims.fr), [yq.guo@univ-reims.fr](mailto:yq.guo@univ-reims.fr)

---

**Résumé** – Cet article présente un modèle d'homogénéisation pour la torsion de plaques orthotropes. Pour un carton ondulé, la rigidité de torsion suivant la direction *CD* (*Cross Direction*) est calculée analytiquement selon la théorie de torsion de poutre à parois minces fermées. Nous avons montré que la rigidité de torsion suivant la direction *MD* (*Machine Direction*) est négligeable par rapport à celle suivant *CD*. La cohérence des théories de torsion de poutre et de plaque est étudiée afin d'appliquer correctement les rigidités de torsion de poutre à la simulation de plaques homogénéisées.

**Mots clés** – Plaque orthotrope, rigidité de torsion, homogénéisation analytique.

---

## 1 Introduction

La modélisation numérique des plaques composites orthotropes de type carton ondulé (composé d'au moins 3 strates) par des éléments de coque est trop fastidieuse et trop coûteuse. L'homogénéisation de ce genre de structures 3D permet d'obtenir une plaque 2D homogène équivalente et donc de rendre le calcul beaucoup plus efficace. Cela consiste à déterminer les rigidités globales équivalentes qui lient les déformations généralisées aux efforts résultants. De nombreux modèles d'homogénéisation ont été obtenus par des méthodes analytiques [1, 2, 5], numériques [3, 4] et expérimentales [1, 2]. Beaucoup d'études portent sur les problèmes de traction et de flexion, mais les travaux sur les problèmes de torsion sont rares dans la littérature.

Dans le cas d'une plaque en carton ondulé que nous avons modélisé en une structure 3D (2 peaux et une cannelure), les résultats ont montré que la courbure de torsion peut être séparée en 2 taux de torsion égaux de type poutre suivant *MD-x* et *CD-y*. Cela nous permet, d'une part de calculer analytiquement la rigidité de torsion du carton suivant *CD-y* en utilisant la théorie de torsion de poutre à parois minces multicellulaires et d'autre part de montrer par une simulation numérique que la rigidité suivant *MD-x* est négligeable devant celle de la direction *CD-y*. La cohérence entre les théories de torsion de poutre et de plaque est étudiée pour appliquer correctement la rigidité de torsion obtenue par la théorie de poutre à la simulation de la plaque homogénéisée.

Une plaque de carton ondulé en torsion permet de valider le présent modèle d'homogénéisation de torsion.

## 2 Rappel des théories classiques de plaque en torsion

La théorie de Mindlin est souvent utilisée pour les plaques épaisses ou composites. Elle suppose qu'un segment droit et normal à la surface moyenne reste droit mais non perpendiculaire à la surface après la déformation. Cette hypothèse permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transverse. La théorie de Mindlin donne les déformations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\beta_{x,x} & ; & & \varepsilon_y &= z\beta_{y,y} & ; & & \gamma_{xy} &= z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\ \gamma_{xz} &= w_{,x} + \beta_x & ; & & \gamma_{yz} &= w_{,y} + \beta_y \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\beta_x$  est l'angle de rotation de la normale de  $z$  vers  $x$  ou l'angle de rotation autour de  $y$  ( $\beta_x = \theta_y$ ),  $\beta_y$  est l'angle de rotation de la normale de  $z$  vers  $y$  ou l'angle de rotation autour de  $-x$  ( $\beta_y = -\theta_x$ ).

Selon la théorie des stratifiés [6], les moments de flexion et de torsion sont obtenus par une intégration des contraintes suivant l'épaisseur :

$$\{M(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = [D] \{\kappa\} \quad (2)$$

où  $[Q]$  est la matrice d'élasticité,  $[D]$  la matrice de rigidité de flexion-torsion,  $\{\kappa\}$  le vecteur de courbures. Si on ne considère que la torsion, le moment de torsion et le travail virtuel interne correspondant sont définis comme suit :

$$M_{xy} = M_{yx} = D_{xy} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \quad (3)$$

$$W_{int} = \int_A (\delta\beta_{x,y} + \delta\beta_{y,x}) D_{xy} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) dA \quad (4)$$

Les équations ci-dessus sont valables pour les plaques de matériaux orthotropes, mais certaines équations ne sont plus valables pour les plaques orthotropes dues à la structure alvéolaire des constituants, comme les plaques en carton ondulé dans lesquelles les distributions des déformations et des contraintes ne sont plus linéaires suivant l'épaisseur [5]. On ne peut plus utiliser la théorie des stratifiés, il faut donc traiter le carton ondulé comme une structure 3D au lieu d'un milieu continu.

### 3 Cohérence entre les théories de poutre et de plaque

La rigidité de torsion calculée par la théorie de poutre ci-dessus ne peut pas être directement utilisée pour la simulation de la plaque homogénéisée, car la définition de la rigidité de torsion est différente dans les théories de poutre et de plaque pour une même structure. On considère une plaque élancée de longueur  $L$ , de largeur  $B$  et d'épaisseur  $e$  soumise à un moment de torsion suivant  $x$  ( $M_{tx}$ ), alors la théorie de plaque donne le travail virtuel interne suivant :

$$W_{int} = \int_L (\delta\beta_{x,y} + \delta\beta_{y,x}) B D_{xy} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) dx \quad (5)$$

Tandis que la théorie de poutre donne une expression différente :

$$W_{int} = \int_L \delta\theta_{x,x} GJ \delta\theta_{x,x} dx \quad (6)$$

Nous avons toujours  $\beta_{x,y} = \theta_{y,y}$  ;  $\beta_{y,x} = -\theta_{x,x}$  ;  $\beta_{x,y} = \beta_{y,x}$ , la comparaison entre les équations (5) et (6) nous permet d'obtenir la relation suivante entre la rigidité de torsion de plaque et celle de poutre :

$$D_{xy} = GJ / 4B \quad (7)$$

Pour une plaque composite orthotrope de type carton ondulé, on peut calculer sa rigidité de torsion de poutre  $GJ$  (analytiquement ou numériquement) et en déduire sa rigidité de plaque  $D_{xy}$  qui sera utilisée dans le modèle d'homogénéisation du carton pour la simulation des structures d'emballage.



$$J = 4 \sum_{i=1}^n \bar{q}_i F_i \quad ; \quad q_i = \bar{q}_i \frac{2M_t}{J} \quad (12)$$

Le problème de torsion d'un carton de 10 cellules a été résolu par la méthode de Bredt ci-dessus. La Fig. 2 montre que dans les parois intérieures entre deux cellules les flux de contraintes tangentielles sont très faibles par rapport aux flux dans les parois extérieures. Dans la pratique, un panneau de carton ondulé a souvent plus de 100 cellules, les flux deviennent quasiment nuls sur la plupart des parois de la cannelure (flux dans le cas de 50 cellules : 1, 0.32, 0.100, 0.030, 0.01, 0.004, 0.001, 0.0004, 0.0001, 0.000 ...), cela nous permet de négliger ces parois internes et de calculer la rigidité de torsion avec la formule de Bredt pour une section monocellulaire :

$$J = \frac{4S^2}{\oint_s \frac{ds}{t}} \quad (\text{Bredt}) \quad (13)$$

$$GJ = \frac{4S^2}{\oint_s \frac{ds}{Gt}} = \frac{4L^2h^2}{\frac{L}{G^i t^i} + \frac{L}{G^s t^s} + \frac{2l}{G^c t^c}} \approx \frac{4Lh^2 G^s t^s G^i t^i}{G^s t^s + G^i t^i} \quad (14)$$

où  $L$  et  $h$  sont la longueur et la hauteur de la cannelure de la plaque de carton ondulé,  $l$  la longueur d'une demi-onde sinusoidale de la cannelure appartenant au contour extérieur (Fig. 2). Généralement,  $l$  est beaucoup plus petit que  $L$  et donc négligeable.

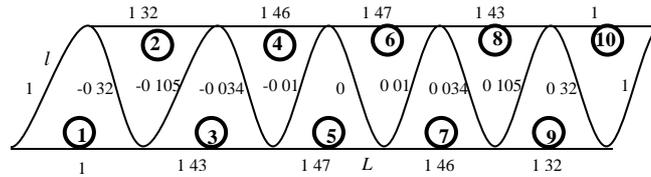


Figure 2 - Flux relatifs de la contrainte tangentielle sur une section  $CD$  à 10 cellules

Les rigidités de torsion  $CD$  du carton ondulé avec 4, 10, 50 et 100 cellules calculées par la formule de Bredt sont comparées avec celles calculées par notre formule analytique simplifiée (Tableau 1). La présente méthode permet d'obtenir de bons résultats pour de grandes largeurs (au-delà de 50 cellules).

$GJ_{CD}$	4 cellules	10 cellules	50 cellules	100 cellules
Bredt	9765 N.mm	13145 N.mm	16895 N.mm	16451 N.mm
Bredt simplifiée	16000 N.mm	16000 N.mm	16000 N.mm	16000 N.mm
Erreur	+63.85 %	+21.72 %	-5.30 %	-2.74 %

Tableau 1 - Rigidité de torsion par unité de longueur pour la torsion sur section  $CD$

## 4.2 Rigidité de torsion selon la direction $MD$

La torsion du carton ondulé sous un moment suivant  $MD$ - $x$  est un problème très complexe. Nous avons modélisé cette structure 3D par des éléments de coque et nous constatons que ce moment de torsion extérieur implique les efforts tranchants, les moments de torsion et les moments de flexion dans les 3 strates. Il est impossible de trouver une solution analytique. Pour déterminer la rigidité de torsion suivant  $MD$ , nous avons modélisé le carton ondulé par des éléments de poutre pour éviter l'effet de couplage avec la torsion suivant  $CD$ . Nous avons comparé la rigidité de torsion de type poutre suivant  $MD$  à celle suivant  $CD$  calculée d'après l'équation (14). Le tableau 2 montre que, pour 3 largeurs différentes les rigidités de torsion suivant  $MD$  par unité de largeur ( $GJ_{MD}/B$ ) sont négligeables devant celles suivant  $CD$  ( $GJ_{CD}/L$ ).

B	$M_{tx}$	$GJ_{MD}/B$	$GJ_{CD}/L$
400	130.90	83.33	8000
200	65.45	83.33	8000
100	32.72	83.32	8000

Tableau 2 – Comparaison des rigidités de torsion par unité de largeur des sections  $MD$  et  $CD$

## 5 Validation numérique sur la torsion d'un carton ondulé

Une plaque en carton ondulé est considérée pour valider notre modèle de torsion. Sa longueur est  $L=400$  mm et sa largeur est  $B=400, 200$  ou  $100$  mm. Le matériau des 3 strates est supposé isotrope avec  $E=3500$  MPa,  $\nu=0.4$ . La géométrie de la cannelure est définie par :

$$H(x) = \left( h_c - \frac{e_p}{2} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (15)$$

où  $h_c = 2$  mm est la demi-hauteur du carton,  $e_p = 0.2$  mm l'épaisseur des peaux et de la cannelure,  $\lambda = 8$  mm la longueur d'une période d'ondulation.

Trois types de calculs sont effectués pour valider notre modèle de torsion : simulation 3D par éléments de coque d'Abaqus, calcul analytique de la rigidité de torsion  $CD$  et simulation 2D par notre élément T3γ18/carton avec homogénéisation.

### 5.1 Simulation 3D par Abaqus et calcul analytique

La plaque est fixée en torsion à une extrémité et soumise à un angle de torsion ( $\theta_x$ ) imposé autour de la direction  $MD-x$  à l'autre extrémité. Le tableau 3 montre que pour 3 largeurs différentes les deux taux de torsion ( $\theta_{x,x}$  et  $-\theta_{y,y}$ ) sont toujours identiques et que les rigidités de torsion par unité de largeur ( $GJ_{MD}/B$ ) sont très proches (les erreurs sont dues aux effets de bord du carton). La rigidité de torsion du carton ondulé  $GJ_{MD}$  est calculée par  $GJ_{MD} = M_{total} / \theta_{x,x}$  selon la théorie de poutre.

B	$M_{total}$	$\theta_{x,x}$	$\theta_{y,y}$	$GJ_{MD}/B$
400	11891.70	0.00381	-0.00381	7805.06
200	5819.38	0.00380	-0.00380	7658.41
100	2783.70	0.00380	-0.00379	7332.64

Tableau 3 – Simulation 3D par Abaqus avec angle de torsion ( $\theta_x$ ) imposé autour de  $MD-x$

Dans le cas d'un angle de torsion ( $\theta_y$ ) imposé autour de la direction  $CD-y$ , le tableau 4 montre que pour 3 largeurs différentes les deux taux de torsion ( $\theta_{x,x}$  et  $-\theta_{y,y}$ ) sont toujours identiques et que les rigidités de torsion par unité de largeur ( $GJ_{CD}/L$ ) sont très proches. La rigidité de torsion du carton ondulé  $GJ_{CD}$  est calculée par  $GJ_{CD} = M_{total} / \theta_{y,y}$  selon la théorie de poutre.

B	$M_{total}$	$\theta_{y,y}$	$\theta_{x,x}$	$GJ_{CD}/L$
400	12009.20	0.00383	-0.00383	7837.52
200	23390.80	0.00744	-0.00748	7858.27
100	44464.20	0.00141	-0.00143	7878.35

Tableau 4 – Simulation 3D par Abaqus avec angle de torsion ( $\theta_y$ ) imposé autour de  $CD-y$

Les rigidités sous les torsions suivant  $MD$  et  $CD$  calculées numériquement par Abaqus sont très proches (tableaux 3 et 4). Ces valeurs sont dues à l'influence réciproque des rigidités de torsions suivant les 2 directions. En effet, la rigidité de torsion suivant  $CD$  est calculée

analytiquement par l'équation (14) (tableau 2,  $GJ_{CD}/L=8000$ ) et la rigidité de torsion suivant  $MD$  a été calculée numériquement (tableau 2,  $GJ_{MD}/B=83.33$ ). En comparant leur somme (8083.33) avec les valeurs des rigidités obtenues par Abaqus (tableaux 3 et 4), nous trouvons des erreurs comprises entre 2.54% et 9.28%.

## 5.2 Simulation 2D par le modèle d'homogénéisation

Selon l'équation (10), la rigidité de torsion d'une plaque homogénéisée est égale à un quart de la somme des rigidités de poutre par unité de longueur, et comme nous avons montré que la rigidité de torsion suivant  $MD$  pouvait être négligée devant celle selon  $CD$ , alors :

$$D_{xy} = \frac{1}{4}(GJ_{MD}/B + GJ_{CD}/L) \approx \frac{1}{4}GJ_{CD}/L \quad (16)$$

Cette rigidité de torsion  $D_{xy}$  est utilisée pour la simulation de la plaque 2D homogénéisée avec notre élément de coque T3γ18/carton. Les conditions utilisées sont les mêmes que pour les simulations 3D avec Abaqus. Le tableau 5 montre que cette rigidité permet d'obtenir les moments de torsion très proches de ceux obtenus dans les tableaux 3 et 4.

$B$	$D_{xy}$ (Abaqus 3D)	$\theta_x$ imposé on $MD$		$\theta_y$ imposé on $CD$	
		$M_{total}$	Erreur	$M_{total}$	Erreur
400	1955.32	12194.80	2.5%	12194.70	1.5%
200	1939.58	6027.50	3.6%	24110.40	3.1%
100	1901.37	2934.59	5.4%	46951.80	5.6%

Tableau 5 – Simulation 2D d'une plaque homogénéisée avec T3γ18/carton

## 6 Conclusions

Cet article a présenté un modèle d'homogénéisation pour calculer la rigidité de torsion de plaques en carton ondulé. Nous avons démontré que les rigidités de torsion suivant les directions  $MD$  et  $CD$  sont très différents et que la torsion selon  $CD$  du carton ondulé peut être considérée comme la torsion d'une poutre à section de parois minces multicellulaire. La rigidité de torsion  $CD$  est ainsi déterminée analytiquement en utilisant la théorie de torsion de Bredt. Nous avons également montré que la rigidité selon  $MD$  peut être négligée par rapport à celle suivant  $CD$ . La somme des rigidités de type poutre suivant les deux directions doit être divisée par 4 pour obtenir la rigidité correspondante pour la simulation de la plaque homogénéisée 2D.

## Références

- [1] L.A. Carlsson, T. Nordstrand, B. Westerlind, "On the elastic stiffness of corrugated core sandwich plate". *J Sandwich Structures and Materials*, 3, p253-267, 2001.
- [2] Z. Aboura, N. Talbi, S. Allaoui, M.L. Benzeggagh, "Elastic behaviour of corrugated cardboard: experiments and modelling". *Composite Structures*, 63, p53-62, 2004.
- [3] N. Buannic, P. Cartraud, T. Quesnel, "Homogenization of corrugated core sandwich panels". *Composite Structures*, 59, 299-312, 2003.
- [4] M.E. Biancolini, "Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board". *Composite Structures*, 69, 322-328, 2005.
- [5] N. Talbi, A. Batti, R. Ayad, Y.Q. Guo, "An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard", *Composite Structures*, 69, 322-328, 2005.
- [6] J.M. Berthelot, *Matériaux composites*. 2ème Edition Masson, 1996.
- [7] S. Timoshenko, S. Woinowski-Krieger, *Théorie des plaques et coques*, Edition Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Liège, 1961.