



**HAL**  
open science

# Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales de frontière en élastodynamique 3D. Application à la propagation d'ondes sismiques

Stéphanie Chaillat

► **To cite this version:**

Stéphanie Chaillat. Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales de frontière en élastodynamique 3D. Application à la propagation d'ondes sismiques. 9e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01419934

**HAL Id: hal-01419934**

**<https://hal.science/hal-01419934v1>**

Submitted on 20 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales de frontière en élastodynamique 3D. Application à la propagation d'ondes sismiques.

Stéphanie Chaillat<sup>1 2</sup>

**Contexte et motivations.** La propagation des ondes sismiques peut être simulée à l'aide de différentes méthodes numériques. La méthode des éléments de frontière (BEM, pour *Boundary Element Method*) présente l'avantage de ne nécessiter que la discrétisation de la frontière du domaine de calcul considéré et permet de simuler des milieux étendus en évitant la forte dispersion numérique associée à d'autres schémas. Les solveurs adaptés à ce type de problèmes sont de deux types : (i) les solveurs directs, de complexité  $O(N^3)$  en temps et  $O(N^2)$  en mémoire ( $N$  étant le nombre de degrés de liberté), et donc inutilisables dès que  $N$  devient grand, et (ii) les solveurs itératifs, construisant une suite convergeant vers la solution, de complexité  $O(n_{\text{iter}} \times N^2)$  en temps et en mémoire. Le principal inconvénient de la BEM, sous sa forme traditionnelle, est de conduire à un système linéaire dont la matrice est pleine (et non symétrique). Cela crée des difficultés sérieuses à partir de  $O(10^4)$  degrés de liberté (DDLs) inconnus, et en particulier limite fortement (en termes de géométrie, hétérogénéité, longueur d'onde...) les configurations accessibles à la méthode.

L'idée est alors d'appliquer une méthode d'accélération de l'évaluation des opérateurs intégraux, étape essentielle du calcul d'un produit matrice-vecteur utilisé par le solveur itératif (GMRES dans notre cas) afin de diminuer le temps CPU d'une itération mais aussi les besoins en stockage. Cette réorganisation du calcul est rendue possible par la méthode multipôle rapide (*Fast Multipole Method* ou FMM en anglais). Initialement développée pour les problèmes à  $N$  corps par Rokhlin et Greengard [4] dans les années 80, la méthode a ensuite été adaptée aux équations de l'électromagnétisme par Rokhlin [6] et Chew [8]. La FMM est appliquée dans de nombreux domaines [5].

**Principaux résultats de la thèse.** Dans la première partie de la thèse, la formulation de la FMM pour les équations de l'élastodynamique 3-D, ainsi que sa mise en oeuvre et validation ont été effectuées [1]. La présence du terme  $\exp(ikr)/r$  (fonction de Green pour l'équation de Helmholtz, pour l'espace infini) dans les tenseurs de Green de l'espace infini élastique (où  $k$  est le nombre d'onde et  $(x, y)$  un couple de points sur la frontière), permet de les reformuler en termes de développements en séries multipôles, analogues à ceux connus en électromagnétisme [8]. Ainsi, les variables  $x$  et  $y$  de l'intégrale sont séparées. Il n'est plus nécessaire de recalculer les solutions élémentaires pour chaque couple de points sur la frontière de l'objet et, dans l'intégrale, il est possible de réutiliser les intégrations précédentes selon  $x$ . Les contributions mutuelles entre tous les points  $x$  et  $y$  sont ainsi réduites à quelques contributions entre paquets de points  $x$  et paquets lointains de points  $y$ . Afin de diminuer le coût mémoire et le temps de calcul du produit matrice-vecteur, la matrice du système n'est jamais explicitement assemblée (contrairement à la méthode BEM classique). Cette partie était limitée aux milieux homogènes. Pour étudier des configurations réalistes, cette limitation est trop restrictive. La deuxième partie de la thèse a donc consisté à une extension de la formulation précédente à des configurations multi-domaines, basée sur une stratégie de couplage élément de frontière-élément de frontière [2]. Cette méthode repose sur l'utilisation, de manière indépendante dans chaque sous-domaine homogène, de la FMM. Cette stratégie de couplage a été validée sur un problème de propagation d'ondes planes dans un bassin sédimentaire, pour lequel une solution de référence est disponible dans la littérature (Fig. 1a). Des calculs à plus hautes fréquences ont ensuite été effectués grâce à ce nouveau solveur (Fig. 1b), qui a également été exploité pour calculer des réponses en domaine temporel au moyen d'une synthèse de Fourier. Une méthode de préconditionnement a ensuite été introduite afin de réduire le nombre d'itérations du

1. LMS, École Polytechnique, Palaiseau, & LCPC, Paris

2. Actuellement : College of Computing, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA. stephanie.chaillat@cc.gatech.edu

solveur itératif et ainsi accélérer le temps de résolution. Ce dernier réduit de manière significative le nombre d'itérations pour des problèmes de propagation d'ondes planes dans des canyons ou bassins sédimentaires canoniques. La méthode est finalement utilisée pour traiter un problème plus réaliste, à savoir la diffraction d'ondes planes par une vallée sédimentaire alpine (Grenoble, Fig. 2). Les résultats numériques présentés dans ce travail concernent des modèles BEM 3-D comprenant  $O(10^5)$  à  $O(7 \cdot 10^5)$  DDLs de frontière.

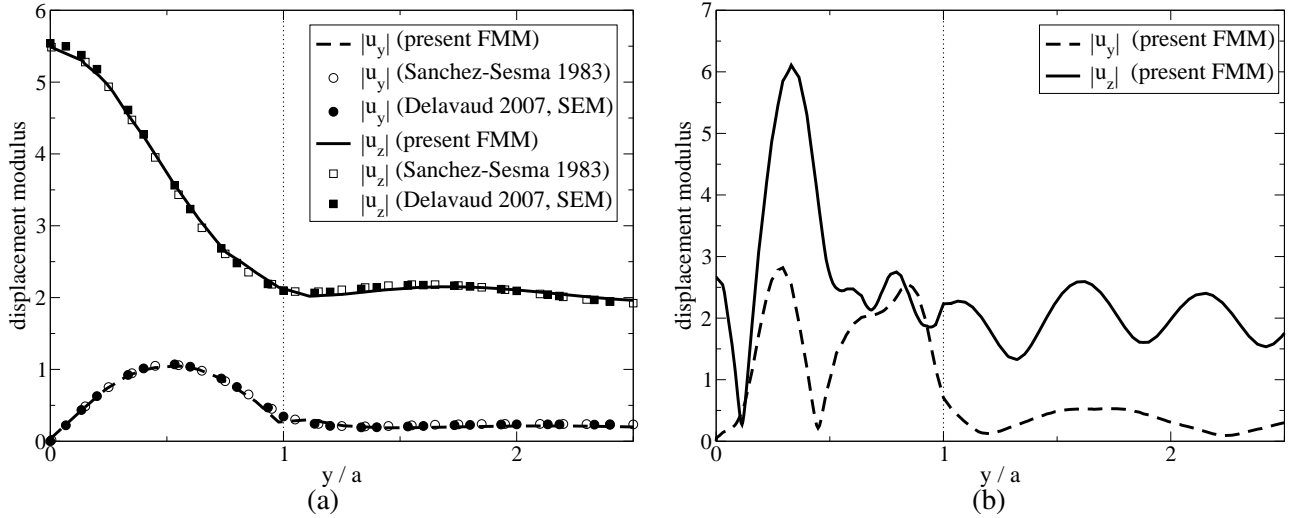


FIGURE 1 – Diffraction d'une onde P plane (incidence verticale) par un bassin sédimentaire hémisphérique : déplacements à la surface pour  $k_p^{(1)} a / \pi = 0.5$  ((a), comparaisons avec [3] et [7]) et pour  $k_p^{(1)} a / \pi = 2$  (b).

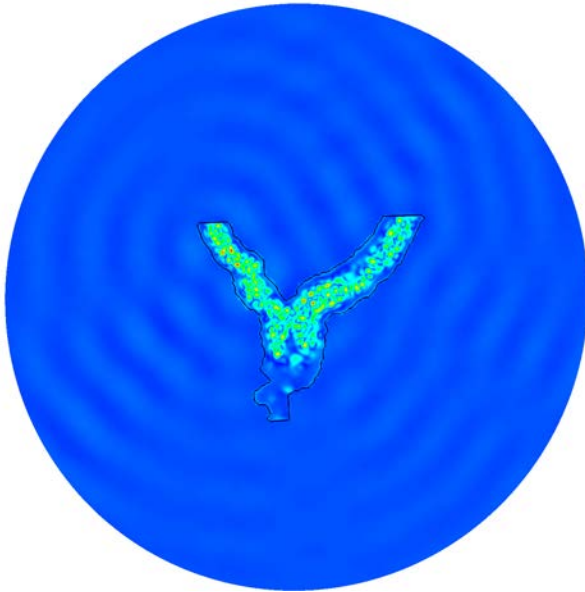


FIGURE 2 – Diffraction d'une onde P plane (incidence verticale) par une vallée sédimentaire alpine (Grenoble) : déplacement vertical à la surface pour une fréquence  $f = 0.6$  Hz.

## Références

- [1] S. Chaillat, M. Bonnet, and J. F. Semblat. A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 197 :4233–4249, 2008.
- [2] S. Chaillat, M. Bonnet, and J. F. Semblat. A new fast multi-domain BEM to model seismic wave propagation and amplification in 3D geological structures. *Geophys. J. Int.*, (à paraître), 2009.
- [3] E. Delavaud. *Simulation numérique de la propagation d'ondes en milieu géologique complexe : application à l'évaluation de la réponse sismique du bassin de Caracas (Venezuela)*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, 2007.
- [4] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comp. Phys.*, 73 :325–348, 1987.
- [5] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4), July 2002.
- [6] V. Rokhlin. Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions. *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 1 :82–93, 1993.
- [7] F. J. Sánchez-Sesma. Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 73 :1621–1636, 1983.
- [8] J. M. Song, C. C. Lu, and W. C. Chew. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering. *IEEE Antennas and Propagation*, 45 :1488–1493, 1997.