



HAL
open science

Comportement dynamique d'une plaque épaisse de dimension finie

Loïc Le Marrec, Nicolas Bideau, Lalaonirina Rakotomanana-Ravelonarivo

► **To cite this version:**

Loïc Le Marrec, Nicolas Bideau, Lalaonirina Rakotomanana-Ravelonarivo. Comportement dynamique d'une plaque épaisse de dimension finie. 9e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01419927

HAL Id: hal-01419927

<https://hal.science/hal-01419927>

Submitted on 20 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Comportement dynamique d'une plaque épaisse de dimension finie

L. Le Marrec¹, N. Bideau¹, L. Rakotomanana¹

¹ IRMAR, UMR 6625 (CNRS-Université de Rennes 1)

Campus de Beaulieu, 35042, Rennes cedex.

{loic.lemarrec,nicolas.bideau,lalaonirina.rakotomanana-ravelonarivo}@univ-rennes1.fr

Résumé — Le problème de déformation d'une plaque élastique est abordé à partir du modèle de Rayleigh-Lamb et de deux méthodes approchées : une approximation des formes générales des solutions pour de faibles épaisseurs et un modèle de poutre de Timoshenko. Les résultats sont comparés à partir de leurs équations de dispersion respectives. Le premier modèle approché fournit un résultat comparativement équivalent au modèle de Timoshenko au terme d'une approche moins élégante et plus fastidieuse.

Mots clés — Vibration, équation de dispersion, plaque et poutre, Rayleigh-Lamb, Timoshenko.

1 Définition du problème

La mesure des fréquences propres de vibration d'une plaque est couramment exploitée tant dans le monde industriel qu'académique. L'extraction de ces fréquences peut notamment être un moyen efficace pour la caractérisation du matériau sollicité [1, 2]. Parmi les modèles directs utilisés pour des problèmes bidimensionnels deux approches sont couramment exploitées : soit un modèle de plaque ou de poutre de dimension finie soit un modèle de Rayleigh-Lamb [3]. Pour les modèles de plaque ou poutre, les conditions aux limites peuvent être prises en compte rigoureusement mais les modes de vibration propre dans la direction transverse sont approchés ou négligés : le spectre obtenu est donc moins riche car il ne contient pas les fréquences propres des degrés de liberté négligés. Dans le cadre des modèles de type Rayleigh-Lamb, on considère en général une plaque de dimension infinie, les conditions aux limites dans les directions longitudinales ne sont pas prises en compte ou a posteriori.

2 Formulation du problème de Rayleigh-Lamb

On considère une plaque de faible épaisseur $2h$ suivant \mathbf{e}_2 , de longueur L suivant \mathbf{e}_1 et de très grande dimension dans la direction \mathbf{e}_3 . Nous traitons le problème dans le cadre de l'hypothèse de déformations planes dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En élasticité linéaire, le système formé par les équations d'équilibres, la déformation et la loi de comportement, est réduit dans le plan à la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta,\beta} &= \rho u_{\alpha,tt} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2G \varepsilon_{\alpha\beta}; \quad \sigma_{\alpha 3} = 0\end{aligned}\tag{1}$$

où σ et ε sont les tenseurs des contraintes et des déformations, \mathbf{u} est le champ de déplacement et enfin λ et μ sont les coefficients de Lamé. Les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2 et

la convention d'Einstein est utilisée. Pour un problème de déformation plane, nous avons $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$, le champ de déplacement dans la direction \mathbf{e}_3 est indépendant de x_3 . La loi de comportement implique également $\sigma_{33} = \nu\sigma_{\gamma\gamma}$ où ν est le coefficient de Poisson.

2.1 Champ de solution

Les relations (1) impliquent que les composantes du déplacement dans le plan ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) sont harmoniques en temps et vis-à-vis des coordonnées du plan : x_1 et x_2 . Le système (1) ne donnant pas d'informations sur la dépendance en x_3 nous recherchons des solutions de la forme :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = [A_1 f_1(x_3)\mathbf{e}_1 + A_2 f_2(x_3)\mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3] e^{i(kx_1 + k_2 x_2 - \omega t)}$$

En introduisant ces formes dans le système (1), nous disposons d'un système homogène de deux équations à deux inconnues (A_1 et A_2) dont le déterminant doit être nul afin d'assurer les solutions non triviales. Cette condition implique une relation admissible entre les nombres d'ondes k_1 et k_2 et la pulsation ω ; de plus le déterminant du système étant nul, les amplitudes A_1 et A_2 sont linéairement dépendantes. Deux familles de solutions sont obtenues :

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 &= \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \omega^2 \\ A_2 &= A_1 \frac{k_2 f_1}{k_1 f_2} \end{aligned} \right| \begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 &= \frac{\rho}{\mu} \omega^2 \\ A_2 &= -A_1 \frac{k_1 f_1}{k_2 f_2} \end{aligned}$$

La première famille caractérise les ondes longitudinales (dilatation-compression), tandis que la seconde les ondes transversales (cisaillement). Les relations $\varepsilon_{13} = 0$ et $\varepsilon_{23} = 0$ impliquent $f_1'(x_3) = f_2'(x_3) = 0$ ainsi $\sigma_{33,3} = 0$ ce qui implique un déplacement uniforme par rapport à x_3 dans la direction \mathbf{e}_3 . Nous négligerons dorénavant cette contribution. Ainsi l'on peut exprimer chaque mode, la solution générale étant obtenue par combinaison linéaire de ces solutions :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_l &= A_l (\mathbf{e}_1 + \frac{k_l}{k} \mathbf{e}_2) e^{i(kx_1 + k_l x_2 - \omega t)} ; & k_l^2 + k^2 &= \frac{\omega^2}{c_l} ; & c_l &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ \mathbf{u}_t &= A_t (\mathbf{e}_1 - \frac{k}{k_t} \mathbf{e}_2) e^{i(kx_1 + k_t x_2 - \omega t)} ; & k_t^2 + k^2 &= \frac{\omega^2}{c_t} ; & c_t &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Conditions de bords libres

Les faces supérieures et inférieures de la plaque $x_2 = \pm h$ sont libres de contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0} \quad , \quad x_2 = \pm h \quad , \quad 0 \leq x_1 \leq L \quad (3)$$

Afin de satisfaire cette condition, il est pratique de décomposer le champ de déplacement en composantes symétrique \mathbf{u}^s et antisymétrique \mathbf{u}^a obtenu à partir de combinaisons des modes de longitudinaux et transverses ; en omettant dorénavant le terme $e^{-i\omega t}$:

$$\mathbf{u}_l^a = A^a (\sin k_l x_2 \mathbf{e}_1 + \frac{k_l}{ik} \cos k_l x_2 \mathbf{e}_2) e^{ikx_1} \quad (4a)$$

$$\mathbf{u}_t^a = B^a (\sin k_t x_2 \mathbf{e}_1 + \frac{ik}{k_t} \cos k_t x_2 \mathbf{e}_2) e^{ikx_1} \quad (4b)$$

$$\mathbf{u}_l^s = A^s (\cos k_l x_2 \mathbf{e}_1 - \frac{k_l}{ik} \sin k_l x_2 \mathbf{e}_2) e^{ikx_1} \quad (4c)$$

$$\mathbf{u}_t^s = B^s (\cos k_t x_2 \mathbf{e}_1 - \frac{ik}{k_t} \sin k_t x_2 \mathbf{e}_2) e^{ikx_1} \quad (4d)$$

Le problème possède alors 4 inconnues. En exprimant ces conditions pour les composantes symétriques du déplacement nous aboutissons à un système linéaire homogène vis-à-vis des variables A^s et B^s . La recherche de solutions non triviales impose la nullité du déterminant du système soit :

$$(k_t^2 - k^2) \sin(k_t h) \cos(k_l h) + 4k^2 k_l k_t \sin(k_l h) \cos(k_t h) = 0 \quad (5)$$

De même en introduisant ces conditions aux limites dans le cas antisymétrique on a :

$$(k_t^2 - k^2) \sin(k_l h) \cos(k_t h) + 4k^2 k_l k_t \sin(k_t h) \cos(k_l h) = 0 \quad (6)$$

Ces relations fournissent une relation entre les nombres d'ondes dans la direction \mathbf{e}_1 : k et dans la direction transverse : k_t et k_l (Fig.1). La condition de bords libres implique également les relations

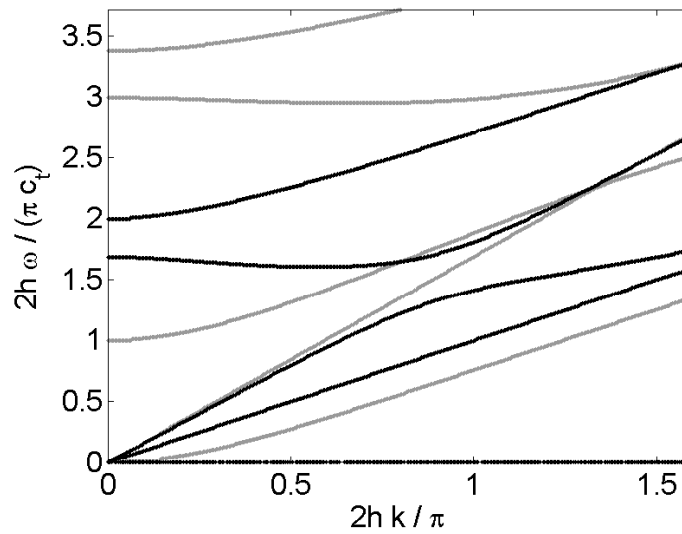


Figure 1 – Courbes de dispersion de Rayleigh-Lamb en déformation plane. Les modes antisymétriques en gris, symétriques en noir.

entre les inconnues de problème :

$$A^s = B^s \frac{k^2 - k_t^2 \sin k_t h}{2k_l k_t \sin k_l h} \quad ; \quad A^a = B^a \frac{k^2 - k_t^2 \cos k_t h}{2k_l k_t \cos k_l h} \quad (7)$$

Les champs de déplacement ont donc une forme simplifiée :

$$u_1^s = \left[\sin k_l h \cos k_t x_2 + (k^2 - k_t^2) \sin k_t h \cos k_l x_2 \right] \frac{B^s e^{ikx_1}}{2k_l k_t \sin k_l h} \quad (8a)$$

$$u_2^s = \left[2k^2 \sin k_l h \sin k_t x_2 - (k^2 - k_t^2) \sin k_t h \sin k_l x_2 \right] \frac{B^s e^{ikx_1}}{2ikk_t \sin k_l h} \quad (8b)$$

$$u_1^a = \left[\cos k_l h \sin k_t x_2 + (k^2 - k_t^2) \cos k_t h \sin k_l x_2 \right] \frac{B^a e^{ikx_1}}{2k_l k_t \cos k_l h} \quad (8c)$$

$$u_2^a = \left[-2k^2 \sin k_l h \cos k_t x_2 + (k^2 - k_t^2) \cos k_t h \cos k_l x_2 \right] \frac{B^a e^{ikx_1}}{2ikk_t \cos k_l h} \quad (8d)$$

Le modèle de Rayleigh-Lamb en déformation plane est régulièrement exploité pour étudier le comportement d'une plaque en flexion. Cependant, la recherche des racines des équations (6) et (5) données sur la Fig.1 n'est pas analytique. Diverses approches ont été abordées afin de contourner

cette difficulté. Parmi elles, il a souvent été envisagé d'aborder le problème en effectuant des développements limités de ces équations séculaires par rapport à la fréquence et aux nombres d'ondes [6, 3]. Cependant ces méthodes fournissent des résultats convaincant au voisinage des solutions mais ne permettent pas de fournir une approximation fiable pour une racine sur la gamme des nombres d'onde caractéristique des premiers modes propres (pour des conditions aux limites de types appui simple : $k = n\pi/L$ par exemple).

3 Approximation pour une faible épaisseur

Le problème approché est effectué à partir de la décomposition des champs sous leurs formes générales (4), c'est à dire sans supposer a priori que les faces supérieure et inférieure sont libres. L'approximation est basée sur l'hypothèse que x_2 est suffisamment petit vis-à-vis de k_l et k_t pour justifier un développement limité des fonctions trigonométriques autour de 0. A l'ordre trois nous avons donc :

$$u_1^a = \left[A^a(k_l x_2 + \frac{k_l^3 x_2^3}{6}) + B^a(k_t x_2 + \frac{k_t^3 x_2^3}{6}) \right] e^{ikx_1} \quad (9a)$$

$$u_2^a = \left[\frac{k_l}{ik} A_a(1 + \frac{k_l^2 x_2^2}{2}) + \frac{ik}{k_t} B_s(1 + \frac{k_t^2 x_2^2}{2}) \right] e^{ikx_1} \quad (9b)$$

$$u_1^s = \left[A^s(1 + \frac{k_l^2 x_2^2}{2}) + B^s(1 + \frac{k_t^2 x_2^2}{2}) \right] e^{ikx_1} \quad (9c)$$

$$u_2^s = - \left[\frac{k_l}{ik} A_s(k_l x_2 + \frac{k_l^3 x_2^3}{6}) + \frac{ik}{k_t} B_s(k_t x_2 + \frac{k_t^3 x_2^3}{6}) \right] e^{ikx_1} \quad (9d)$$

La cinématique de la section est exploitée afin de déterminer le tenseur des déformations et des contraintes à partir des lois de comportement. Nous appliquons les équations d'équilibre sur une section S de normale $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$. La force résultante F dans une section quelconque

$$F := \int_S \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) ds \quad (10)$$

peut être décomposée sous la forme d'un effort tranchant T suivant \mathbf{e}_2 (relatif aux composantes symétriques) et d'une force normale N suivant \mathbf{e}_1 (relatif aux composantes antisymétriques). Le couple résultant sur la section est relatif aux composantes symétriques :

$$M(x_1) := \int_S \mathbf{GM} \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) ds \quad (11)$$

Les équations d'équilibre en translation et en rotation appliquées à la section (de masse volumique uniforme) prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}_G}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M}{\partial x_1} + \mathbf{e}_1 \times F &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{GM} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) ds \end{aligned} \quad (12)$$

Projetées suivant les deux directions principales du système on aboutit à une équation relative aux termes symétriques

$$ik N \cdot \mathbf{e}_1 + \rho A \omega^2 u_1^s(0,0) = 0 \quad (13)$$

et deux équations relatives aux termes antisymétriques des champs :

$$\begin{aligned} ik T \cdot \mathbf{e}_2 + \rho A \omega^2 u_2^a(0,0) &= 0 \\ ik M \cdot \mathbf{e}_3 + T \cdot \mathbf{e}_2 - \rho \omega^2 \int_A x_2 u_1^a dA &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

En exploitant les conditions cinématiques (9) dans le système (14) il est donc possible de déterminer l'équation aux fréquences satisfaite par les modes antisymétriques. Cette équation est un polynôme de degré 8 en k et 6 en ω . Si l'on se limite à l'ordre 4, nous avons

$$\frac{4c_t^2(c_l^2 - c_t^2)h^2}{3c_t^2}k^4 + \frac{(10c_t^2 - 13c_l^2)h^2}{6c_l^2}k^2\omega^2 + \frac{h^2}{2c_t^2}\omega^4 - \omega^2 = 0 \quad (15)$$

Cette approche est incomplète pour les modes symétriques, le modèle nécessitant une équation supplémentaire. Nous ne traiterons pas ce cas qui mérite une discussion complémentaire.

4 Modèle de Timoshenko

Le modèle de poutre de Timoshenko est basé sur l'hypothèse que les sections droites possèdent une cinématique de corps rigide. Cela permet de prendre en compte, à la fois la flexion de la fibre moyenne et les phénomènes de glissement (e.g. [5]). Soit $\mathbf{u}_G(s, t)$ le déplacement de la fibre moyenne et $\theta(s, t)$ la rotation de la section, la cinématique de tout élément de la section S à l'abscisse curviligne s est définie pour un problème de flexion dans son plan :

$$\mathbf{u}(s, t) = \mathbf{u}_G(s, t) - x_2 \sin \theta(s, t) \mathbf{e}_1 + x_2(1 - \cos \theta(s, t)) \mathbf{e}_2 \quad (16)$$

Les deux inconnues du problème sont donc les fonctions \mathbf{u}_G et θ . La relation entre le moment fléchissant et le changement de courbure est :

$$M := EI_G \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

dans laquelle I_G est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe $G\mathbf{e}_2$. L'effort tranchant est lié au glissement de la section :

$$T := k_F GA \left(\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} - \theta \right)$$

où $k_F \approx 5/6$ est un coefficient correctif lié à la non-uniformité des contraintes de cisaillement le long de la section. Pour de petits déplacements ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$) et en négligeant les termes quadratiques, les équations du mouvement prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[k_F GA \left(\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} - \theta \right) \right] &= \rho A \frac{\partial^2 u_{G1}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(EI_G \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) + k_F GA \left(\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} - \theta \right) &= \rho I_G \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Les solutions de ce problème sont des fonctions harmoniques en temps et en espace, liées par la relation de dispersion :

$$\frac{EI_G}{\rho A} k^4 - \left(\frac{I_G}{A} + \frac{EI_G}{k_F GA} \right) k^2 \omega^2 + \frac{\rho I_G}{k_F GA} \omega^4 - \omega^2 = 0 \quad (17)$$

Le problème possède deux racines paires, qui peuvent être obtenues analytiquement et qui sont représentées en Fig.2 (voir également [4, 7]). En comparant ces coefficients avec ceux obtenus en (15), les coefficients en ω^2 et k^4 sont égaux, tandis les erreurs sont de l'ordre de 20% et 15% pour les termes en ω^4 et en $k^2 \omega^2$ respectivement.

5 Analyse comparative

Les équations de dispersion pour les modes antisymétriques sont présentées en Fig.2. Les modèles approchés à l'ordre 3 fournissent une approximation convenable de l'ordre du modèle de Timoshenko. Cependant, compte tenu du degré élevé en ω et k des polynômes obtenus des racines parasites apparaissent ; ces dernières n'ont pas de lien avec le modèle de Rayleigh-Lamb utilisé comme référence. En réduisant l'approximation à l'ordre 1 en x_2 , comme c'est le cas du

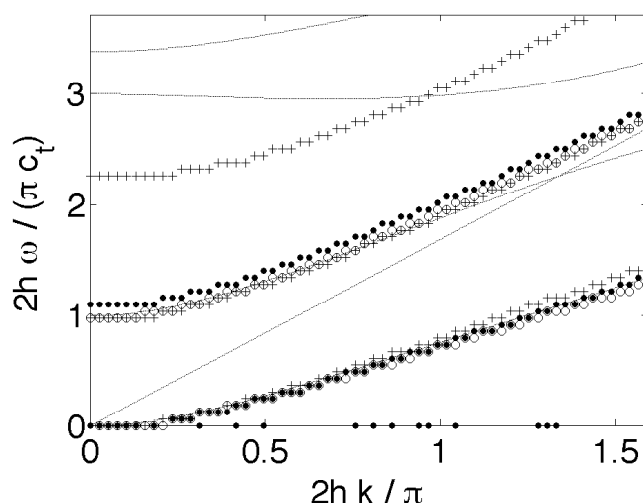


Figure 2 – Courbes de dispersion pour les modes antisymétriques : Rayleigh-Lamb (noir), Timoshenko (o), modèle approché à l'ordre 3 (●) et à l'ordre 1 (+).

modèle de Timoshenko, le modèle fourni un nombre réduit de racines sans branches. Les résultats correspondent au modèle de Timoshenko obtenu en l'absence du terme correctif : $k_F = 1$. On observe donc en conclusion que l'augmentation de l'ordre d'approximation du modèle n'est pas une solution pertinente pour étendre le domaine de validité du modèle. Une approche plus adaptée serait de comparer les courbes de Rayleigh-Lamb avec les courbes de dispersion obtenues à partir du modèle de Mindlin-Reissner (e.g.[5]).

Références

- [1] G. Villain, O. Abraham, L. Le Marrec, L. Rakotomanana, Determination of the bulk elastic moduli of various concrete by resonance frequency analysis of slabs submitted to degradations, *Proceedings of the Non-Destructive Testing in Civil Engineering Conference*, 2009
- [2] D. Royer and E. Dieulesaint, *Ondes Élastiques dans les Solides - Tome II*, Masson, 1999
- [3] J.D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, H.A. Lauwerier and W.T. Koiter, 1973.
- [4] N. Bideau, P. Eyi-Assoumou, L. Le Marrec, L. Rakotomanana, Influence de la pré-contrainte sur la propagation d'ondes dans un poutre de Timoshenko non-linéaire, *Actes du 9e Colloque National en Calcul des Structures*, 2009.
- [5] L.R. Rakotomanana, *Éléments de Dynamique des Solides et Structures Déformables*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Collection Mécanique, Lausanne, 2009
- [6] C.J. Chapman, and S.V. Sorokin, The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading, *Journal of Sound and Vibration*, 281(3-5), 719 - 741, 2005.
- [7] A. Bhaskar, Elastic waves in Timoshenko beams : the 'lost and found' of an eigenmode, *Proc. R. Soc. A*, 465, 239–255, 2009