



HAL
open science

Théorème de comparaison pour les cycles proches par un morphisme sans pente

Matthieu Kochersperger

► **To cite this version:**

Matthieu Kochersperger. Théorème de comparaison pour les cycles proches par un morphisme sans pente. *Journal of Singularities*, 2017, 16, pp.52-72. 10.5427/jsing.2017.16b . hal-01419725v2

HAL Id: hal-01419725

<https://hal.science/hal-01419725v2>

Submitted on 8 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES CYCLES PROCHES PAR UN MORPHISME SANS PENTE

par

Matthieu Kochersperger

Résumé. — Le but de cet article est de démontrer le théorème de comparaison entre les cycles proches algébriques et topologiques associés à un morphisme sans pente. Nous obtenons en particulier que dans le cas d'une famille de fonctions holomorphes sans pente, l'itération des isomorphismes de comparaison des cycles proches associés à chacune de ces fonctions ne dépend pas de l'ordre d'itération.

Abstract (Comparison theorem for nearby cycles of a morphism without slopes)

The goal of this article is to prove the comparison theorem between algebraic and topological nearby cycles of a morphism without slopes. We prove in particular that for a family of holomorphic functions without slopes, if we iterate comparison isomorphisms for nearby cycles of each function the result is independent of the order of iteration.

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. V -multifiltration canonique et foncteurs cycles proches.....	2
3. Morphisme de comparaison.....	10
Appendice A. Hypercomplexes.....	14
Appendice B. Filtrations compatibles.....	16
Références.....	17

1. Introduction

1.1. Théorème de comparaison pour une fonction. — Soit X une variété analytique complexe et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ la donnée d'un faisceau pervers sur X et d'un \mathcal{D}_X -module holonome régulier associés par la correspondance de Riemann-Hilbert, c'est-à-dire $\mathcal{F} = \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})$. Le foncteur *cycles proches topologiques* Ψ_f de P. Deligne associe à \mathcal{F} un faisceau pervers à support $f^{-1}(0)$ muni d'un automorphisme de monodromie. Prolongeant une construction de B. Malgrange [Mal83], M. Kashiwara introduit dans [Kas83] le foncteur *cycles proches algébriques* Ψ_f^{alg} (voir aussi [MM04]) qui associe à \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome régulier à support $f^{-1}(0)$ muni d'un automorphisme de monodromie. Ces deux foncteurs sont reliés par un isomorphisme de comparaison qui commute à la monodromie :

$$(1) \quad \Psi_f(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{DR}_X \Psi_f^{\text{alg}}(\mathcal{M}).$$

Classification mathématique par sujets (2000). — 32S40.

Mots clefs. — Monodromie, cycles proches, modules multispécialisables, morphismes sans pente, V -multifiltration, théorème de comparaison.

1.2. Théorème de comparaison pour plusieurs fonctions. — Soit maintenant $p \geq 2$ et f_1, \dots, f_p des fonctions holomorphes sur X . Notons $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p) : X \rightarrow \mathbb{C}^p$ le morphisme associé. En général, les foncteurs Ψ_{f_i} ($i = 1, \dots, p$) ne commutent pas entre eux, de même que les foncteurs $\Psi_{f_i}^{\text{alg}}$.

Dans [Mai13] Ph. Maisonobe montre que sous la condition *sans pente* pour le couple $(\mathbf{f}, \text{car}(\mathcal{F}))$ on peut définir les foncteurs cycles proches topologiques et algébriques associés à \mathbf{f} . Il montre alors l'existence d'isomorphismes

$$\Psi_{\mathbf{f}} \mathcal{F} \simeq \Psi_{f_{\sigma(1)}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}} \mathcal{F}$$

et

$$\Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}} \mathcal{M} \simeq \Psi_{f_{\sigma(1)}}^{\text{alg}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}}^{\text{alg}} \mathcal{M}$$

pour toute permutation σ de $\{1, \dots, p\}$. Ceci assure la commutativité des foncteurs cycles proches associés aux fonctions f_i pour $1 \leq i \leq p$. Dans l'introduction Ph. Maisonobe mentionne que, par itération de l'isomorphisme (1), ses résultats permettent d'obtenir pour tout σ des isomorphismes de comparaison

$$(2) \quad \Psi_{\mathbf{f}} \mathcal{F} \simeq \Psi_{f_{\sigma(1)}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}} (\mathcal{F}) \simeq \mathbf{DR}_X \Psi_{f_{\sigma(1)}}^{\text{alg}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}}^{\text{alg}} (\mathcal{M}) \simeq \mathbf{DR}_X \Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}} \mathcal{M}.$$

Dans cet article, nous montrerons (corollaire 3.7) que cet isomorphisme ne dépend pas de la permutation σ . Pour ce faire, nous exhibons un morphisme de comparaison entre $\Psi_{\mathbf{f}} \mathcal{F}$ et $\mathbf{DR}_X \Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}} \mathcal{M}$ et nous montrons qu'il coïncide avec les isomorphismes de comparaison itérés (2) pour toute permutation σ .

1.3. Un exemples de morphisme sans pente. — On appelle singularité quasi-ordinaire un germe d'espace analytique réduit admettant une projection finie sur \mathbb{C}^p dont le lieu de ramification est contenu dans un diviseur à croisements normaux. Si S est une hypersurface de \mathbb{C}^n à singularité quasi-ordinaire pour S . Le faisceau $\Psi_f \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^n}$ est pervers et dans cette situation le couple $(\pi, \text{car}(\Psi_f \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^n}))$ est sans pente.

Les singularités quasi-ordinaires apparaissent en particulier dans la méthode de Jung de résolution des surfaces singulières (voir [Lip75]).

Remerciements. — Cet article a été écrit dans le cadre de ma thèse sous la direction de Claude Sabbah que je remercie vivement pour ses nombreux conseils durant l'élaboration de ce travail. Je remercie Philippe Maisonobe pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je remercie également le rapporteur pour ses remarques constructives.

2. V -multifiltration canonique et foncteurs cycles proches

Dans cette section on définit les cycles proches algébriques à l'aide de la V -multifiltration canonique d'un \mathcal{D}_X -module sans pente. On démontre des propriétés de cette multifiltration ainsi que de ses gradués. On définit ensuite les cycles proches topologiques associés à plusieurs fonctions. Enfin on introduit les fonctions de classe de Nilsson à plusieurs variables et on en montre des propriétés utilisées dans la section suivante pour établir un lien entre cycles proches algébriques et cycles proches topologiques.

2.1. V -multifiltration canonique d'un \mathcal{D}_X -module sans pente. — On notera dans la suite

- $d_x := \dim_{\mathbb{C}} X$
- $\partial_i := \partial_{t_i}$
- $E_i := t_i \partial_i$
- $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_{d_X-p})$
- $\mathbf{1}_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en position i .
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$
- $\boldsymbol{\alpha}_I := (\alpha_i)_{i \in I}$ pour $I \subset \{1, \dots, p\}$
- $\mathbf{t} := t_1 \dots t_p$
- $\mathbf{t}^{\mathbf{s}} := t_1^{s_1} \dots t_p^{s_p}$
- $\mathcal{D}_X[\mathbf{s}] := \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$
- $\mathbf{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$ où les H_i sont des hypersurfaces lisses dont la réunion définit un diviseur à croisements normaux. On se place ici dans le cas où il existe localement des coordonnées $(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p)$ telles que

$$\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{C}^p \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) & \mapsto & (t_1, \dots, t_p) \end{array}$$

et $H_i = f_i^{-1}(0)$.

Définition 2.1. — Notons, pour tout $1 \leq i \leq p$, \mathcal{I}_i l'idéal de l'hypersurface H_i et $\mathcal{I}^{\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^p \mathcal{I}_i^{k_i}$. Pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$ et pour tout $x \in X$ on définit :

$$(V_{\mathbf{k}}\mathcal{D}_X)_x := \{P \in \mathcal{D}_{X,x} \mid \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^p, P(\mathcal{I}_x^{\mathbf{k}+\mathbf{m}}) \subset \mathcal{I}_x^{\mathbf{k}+\mathbf{m}}\},$$

ceci permet de définir une filtration croissante de \mathcal{D}_X indexée par \mathbb{Z}^p .

Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Une V -multifiltration $U_{\bullet}\mathcal{M}$ de \mathcal{M} est une filtration croissante indexée par \mathbb{Z}^p satisfaisant à $V_{\mathbf{k}}\mathcal{D}_X \cdot U_{\mathbf{k}'}\mathcal{M} \subset U_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}\mathcal{M}$ pour tout \mathbf{k} et \mathbf{k}' dans \mathbb{Z}^p . Une telle V -multifiltration est *bonne* si elle est engendrée localement par un nombre fini de sections $(m_j)_{j \in J}$, c'est-à-dire que pour tout $j \in J$ il existe $\mathbf{k}_j \in \mathbb{Z}^p$ tel que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$

$$U_{\mathbf{k}}\mathcal{M} = \sum_{j \in J} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_j}\mathcal{D}_X \cdot m_j.$$

Lorsque des inégalités entre nombres complexes apparaîtront, l'ordre considéré sera toujours l'ordre lexicographique sur \mathbb{C} , c'est-à-dire

$$x + iy \leq a + ib \iff x < a \text{ ou } (x = a \text{ et } y \leq b).$$

En suivant [Mai13] on commence par donner les conditions pour qu'un couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente puis on définit la V -multifiltration de Malgrange-Kashiwara.

Définition 2.2. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent.

1. On dit que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente* si au voisinage de tout point de X , il existe une bonne V -multifiltration $U_{\bullet}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} et des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $1 \leq i \leq p$ tels que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$, $b_i(E_i + k_i)U_{\mathbf{k}}\mathcal{M} \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$.
2. On dit que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente par section* si, pour toute section locale m de \mathcal{M} , il existe des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $1 \leq i \leq p$ tels que $b_i(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}\mathcal{D}_X \cdot m$.

Rappelons la proposition 1 de [Mai13] :

Proposition 2.3. — Les deux définitions précédentes sont équivalentes et si la première est satisfaite pour une bonne V -multifiltration de \mathcal{M} , elle l'est pour toute. On dit alors que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente.

On fixe \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente.

Définition 2.4. — Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant la propriété 1. de la définition pour l'indice i est appelé *polynôme de Bernstein-Sato d'indice i de la V -multifiltration $U_{\bullet}(\mathcal{M})$* , on le note $b_{i,U_{\bullet}(\mathcal{M})}$.

Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant la propriété 2. de la définition pour l'indice i est appelé *polynôme de Bernstein-Sato d'indice i de la section m* , on le note $b_{i,m}$.

Proposition 2.5. — Soient, pour $1 \leq i \leq p$, des sections $\sigma_i : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ de la projection naturelle $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il existe une unique bonne V -multifiltration $V_{\bullet}^{\sigma}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} telle que pour tout i les racines de $b_{i,V_{\bullet}^{\sigma}(\mathcal{M})}$ soient dans l'image de σ_i .

La démonstration de cette proposition et de la proposition 2.7 est identique à celle du théorème 1. de [Mai13].

Définition 2.6. — On définit la multifiltration $V_{\bullet}(\mathcal{M})$ indexée par \mathbb{C}^p et vérifiant :

$$\forall x \in X, V_{\alpha}(\mathcal{M})_x := \{m \in \mathcal{M}_x; s_i \geq -\alpha_i - 1, \forall s_i \in b_{i,m}^{-1}(0) \text{ et } 1 \leq i \leq p\}.$$

Cette V -multifiltration est appelée *V -multifiltration canonique* ou *V -multifiltration de Malgrange-Kashiwara*.

Si on considère l'ordre partiel standard sur \mathbb{C}^p

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p$$

on peut définir

$$V_{<\alpha}(\mathcal{M}) := \sum_{\beta < \alpha} V_{\beta}(\mathcal{M})$$

et

$$\text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M}) := V_{\alpha}(\mathcal{M})/V_{<\alpha}(\mathcal{M}).$$

Soit $I \subset \{1, \dots, p\}$ et I^c son complémentaire, on définit

$$V_{<\alpha_I, \alpha_{I^c}}(\mathcal{M}) := \sum_{\beta_I < \alpha_I} V_{\beta_I, \alpha_{I^c}}(\mathcal{M}).$$

Proposition 2.7. — On a l'égalité des V -multifiltrations $V_{(\langle \alpha_I, \alpha_{I^c} \rangle) + \mathbf{k}}(\mathcal{M}) = V_{\mathbf{k}}^{\sigma < \alpha_I, \alpha_{I^c}}(\mathcal{M})$ où $\sigma < \alpha_I, \alpha_{I^c}$ est la section dont l'image est l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \in \mathbb{C}^p \text{ tel que } -\alpha_i - 1 \leq a_i < -\alpha_i \ \forall i \in I^c \\ \text{et} \quad -\alpha_i - 1 < a_i \leq -\alpha_i \ \forall i \in I \end{array} \right\}.$$

Il existe un ensemble fini $A \subset [-1, 0]^p$ tel que la V -multifiltration canonique soit indexée par $A + \mathbb{Z}^p$. Ainsi la V -multifiltration canonique est cohérente.

Soit $I \subset \{1, \dots, p\}$ et $J \subset I^c$. Comme pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents, on a une notion de $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -module multispécialisable sans pente le long des hypersurfaces $\mathbf{H}_J := (H_i)_{i \in J}$.

Définition 2.8. — Soit \mathcal{M} un $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -module cohérent et $J \subset I^c$, on note $q := \#J$.

1. On dit que le couple $(\mathbf{H}_J, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente* (ou *spécialisable* si $q = 1$) si au voisinage de tout point de X , il existe une bonne V -multifiltration $U_\bullet(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} et des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $i \in J$ tels que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q$, $b_i(E_i + k_i)U_{\mathbf{k}}\mathcal{M} \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$.
2. On dit que le couple $(\mathbf{H}_J, \mathcal{M})$ est *multispécialisable sans pente par section* (ou *spécialisable par section* si $q = 1$) si, pour toute section locale m de \mathcal{M} , il existe des polynômes $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$ pour tout $i \in J$ tels que $b_i(E_i)m \in V_{-\mathbf{1}_i}^{\mathbf{H}_I}(V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X) \cdot m = V_{-\mathbf{1}_i} \mathcal{D}_X \cdot m$.

Remarque 2.9. — Comme pour les \mathcal{D}_X -modules (proposition 2.3) les deux définitions sont équivalentes et si elle sont satisfaites on dira que le couple $(\mathbf{H}_J, \mathcal{M})$ est sans pente (ou spécialisable si $q = 1$). Les analogues des propositions 2.5 et 2.7 sont vraies pour les $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -modules sans pente.

Proposition 2.10. — Soit $I \subset \{1, \dots, p\}$ et \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Alors le couple $(\mathbf{H}_I, \mathcal{M})$ est sans pente et pour tout α_I le couple $(\mathbf{H}_{I^c}, V_{\alpha_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{M})$ est sans pente. De plus, pour $I, J \subset \{1, \dots, p\}$ disjoints, les V -multifiltrations de Malgrange-Kashiwara satisfont à :

$$(3) \quad V_{\alpha_I, \alpha_J}^{\mathbf{H}_I \cup \mathbf{H}_J}(\mathcal{M}) = V_{\alpha_I}^{\mathbf{H}_I}(\mathcal{M}) \cap V_{\alpha_J}^{\mathbf{H}_J}(\mathcal{M}) = V_{\alpha_I}^{\mathbf{H}_I}(V_{\alpha_J}^{\mathbf{H}_J}(\mathcal{M})).$$

On a également l'analogue de [MM04, corollaire 4.2-7]

Proposition 2.11. — Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $j \in I^c$, l'application $\mathcal{M} \mapsto V_{\alpha}^{\mathbf{H}_j}(\mathcal{M})$ définit un foncteur exact de la catégorie des $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -modules spécialisables le long de H_j vers la catégorie des $V_0^{\mathbf{H}_j}(V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}) \mathcal{D}_X$ -modules.

Sachant que la V -multifiltration canonique est indexée par $A + \mathbb{Z}^p$ avec $A \subset [-1, 0]^p$ fini, quitte à renuméroter ces indices on peut la supposer indexée par \mathbb{Z}^p et appliquer la définition B.3 de l'appendice B aux V -filtrations canoniques de \mathcal{M} .

La condition *sans pente* s'interprète de manière naturelle comme une condition de compatibilité des V -filtrations relatives aux différentes hypersurfaces considérées.

Proposition 2.12. — Si le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente alors les filtrations $V_{\bullet}^{\mathbf{H}_1}(\mathcal{M}), \dots, V_{\bullet}^{\mathbf{H}_p}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} sont compatibles au sens de la définition B.3.

Démonstration. — Soit $\alpha < \beta \in \mathbb{C}$ et notons $I_q := \{1, \dots, q\}$. On va construire par récurrence sur l'entier p le p -hypercomplexe X_p correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$V_{\alpha_1}^{\mathbf{H}_{I_p}}(V_{\beta_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}} \mathcal{M}), \dots, V_{\alpha_p}^{\mathbf{H}_{I_p}}(V_{\beta_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}} \mathcal{M}) \subseteq V_{\beta_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}} \mathcal{M}.$$

D'après la remarque B.2, deux filtrations sont toujours compatibles. Supposons construit le q -hypercomplexe X_q . D'après la proposition 2.10 la propriété sans pente assure que les objets qui apparaissent dans X_q sont des $V_{\mathbf{0}_{I_q}}^{\mathbf{H}_{I_q}} \mathcal{D}_X$ -modules cohérents spécialisables le long de H_{q+1} . On déduit alors de la proposition 2.11 que l'application de $V_{\alpha_{q+1}}^{\mathbf{H}_{q+1}}(\cdot)$ et $V_{\beta_{q+1}}^{\mathbf{H}_{q+1}}(\cdot)$ à de tels objets sont deux foncteurs exacts munis d'un monomorphisme de foncteurs donné par l'inclusion naturelle déduite de l'inégalité $\alpha_{q+1} \leq \beta_{q+1}$. On applique alors ces deux foncteurs à X_q , la functorialité fournit un $(q+1)$ -hypercomplexe

$$0 \longrightarrow V_{\alpha_{q+1}}^{\mathbf{H}_{q+1}}(X_q) \xrightarrow{i} V_{\beta_{q+1}}^{\mathbf{H}_{q+1}}(X_q) \longrightarrow \text{Coker}(i) \longrightarrow 0.$$

C'est le $(q+1)$ -hypercomplexe X_{q+1} voulu. L'exactitude des différentes suites courtes provient de l'exactitude des suites courtes de X^q , de l'exactitude des foncteurs $V^{\mathbf{H}_{q+1}}$ -filtration ainsi que de l'exactitude du foncteur $\text{Coker}(\cdot)$ appliqué à des inclusions (lemme du serpent). On utilise également ici les identifications (3). Ceci nous donne par récurrence le p -hypercomplexe X_p . En prenant alors la limite inductive

des p -hypercomplexes X_p sur $\beta \in \mathbb{C}^p$ on obtient le p -hypercomplexe correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$V_{\alpha_1}^{H_1}(\mathcal{M}), \dots, V_{\alpha_p}^{H_p}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Ceci étant vérifié pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^p$ la proposition est démontrée. \square

La proposition B.5 fournit le corollaire suivant

Corollaire 2.13. — *Si le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente alors l'objet obtenu en appliquant successivement les gradués $\text{gr}_{\alpha_i}^{H_i}$ par rapport aux V -filtrations canoniques $V_{\bullet}^{H_i}$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique ces foncteurs et est égal à $\text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M})$.*

Proposition 2.14. — *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent tel que $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente et soit $1 \leq i \leq p$. Alors le \mathcal{D}_X -module $\mathcal{M}(*H_i)$ est cohérent et le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*H_i))$ est sans pente. De plus, pour tout α vérifiant $\alpha_i < 0$, le morphisme naturel de $V_0\mathcal{D}_X$ -modules :*

$$V_{\alpha}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{\alpha}(\mathcal{M}(*H_i))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente, \mathcal{M} est spécialisable le long de H_i et on peut appliquer [MM04, proposition 4.4-3] qui assure que $\mathcal{M}(*H_i)$ est cohérent, spécialisable le long de H_i et que pour $\alpha_i < 0$,

$$V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}(*H_i))$$

est un isomorphisme.

Montrons que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*H_i))$ est sans pente. C'est un problème local, on peut supposer que $H_i = \{t_i = 0\}$. Soit m' une section de $\mathcal{M}(*H_i)$, on a $m' = m/t_i^k$ où m est dans l'image de $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}[1/t_i]$ et $k \in \mathbb{N}$. Le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ étant sans pente, pour tout $1 \leq j \leq p$ il existe un polynôme non nul $b_j(s_j)$ satisfaisant à

$$b_j(E_j)m \in V_{-1_j}(\mathcal{D}_X)m.$$

On a alors

$$\begin{aligned} b_j(E_j)t_i^k m' &\in V_{-1_j}(\mathcal{D}_X)t_i^k m' \\ t_i^k b_j(E_j + \delta_{ij}k)m' &\in t_i^k V_{-1_j}(\mathcal{D}_X)m'. \end{aligned}$$

En divisant par t_i^k on obtient, $b_j(E_j + \delta_{ij}k)m' \in V_{-1_j}(\mathcal{D}_X)m'$, ce qui permet de conclure que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*H_i))$ est sans pente.

D'après la proposition 2.10 $V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M})$ et $V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}(*H_i))$ sont des $V_0^{H_i}\mathcal{D}_X$ -modules sans pente le long de $\mathbf{H}_{\{i\}^c}$ donc, si α satisfait à $\alpha_i < 0$, on a un isomorphisme

$$V_{\alpha}(\mathcal{M}) \simeq V_{\alpha_{\{i\}^c}}^{\mathbf{H}_{\{i\}^c}}(V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} V_{\alpha_{\{i\}^c}}^{\mathbf{H}_{\{i\}^c}}(V_{\alpha_i}^{H_i}(\mathcal{M}(*H_i))) \simeq V_{\alpha}(\mathcal{M}(*H_i))$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. \square

Corollaire 2.15. — *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent tel que $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Alors le \mathcal{D}_X -module $\mathcal{M}(*(H_1 \cup \dots \cup H_p))$ est cohérent et le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*(H_1 \cup \dots \cup H_p)))$ est sans pente. De plus pour tout α vérifiant $\alpha_i < 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$, le morphisme naturel de $V_0\mathcal{D}_X$ -modules :*

$$V_{\alpha}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{\alpha}(\mathcal{M}(*(H_1 \cup \dots \cup H_p)))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On effectue une récurrence sur le nombre d'hypersurfaces par rapport auxquelles on localise \mathcal{M} et le corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente. \square

2.2. Gradués d'un \mathcal{D}_X -module sans pente et cycles proches algébriques. — Ici on démontre des propriétés des gradués de la V -multifiltration de Malgrange-Kashiwara et on définit les cycles proches algébriques.

Proposition 2.16. — *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module tel que $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$ et tout $1 \leq i \leq p$, l'endomorphisme $(E_i + \beta + 1)$ de*

$$V_{\beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})/V_{<\beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})$$

est nilpotent.

Démonstration. — Notons $\sigma := \sigma_{\beta, \alpha_{\{i\}^c}}$ et $b_i(s)$ le polynôme de Bernstein-Sato d'indice i de la multifiltration correspondant à la section σ . Les racines de b_i sont donc dans l'intervalle $[-\beta - 1, -\beta[$. Soit ℓ la multiplicité de la racine $-\beta - 1$ de b_i . On pose $b_i(s) = b'_i(s)(s + \beta + 1)^\ell$. On considère comme dans la preuve de [Kas83, Théorème 1] la V -multifiltration de \mathcal{M} suivante :

$$U_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) := V_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}^\sigma(\mathcal{M}) + (E_i + k_i + \beta + 1)^\ell V_{\mathbf{k}}^\sigma(\mathcal{M}).$$

On peut montrer que c'est une bonne V -multifiltration, que ses polynômes de Bernstein-Sato d'indice $j \neq i$ divisent ceux de V_{\bullet}^σ et que son polynôme de Bernstein-Sato d'indice i divise $b'_i(s)(s + \beta)^\ell$. Les racines de $b'_i(s)(s + \beta)^\ell$ sont dans $] -\beta - 1, -\beta]$, par unicité la multifiltration $U_{\bullet}(\mathcal{M})$ est égale à la multifiltration $V_{\bullet}^{\tilde{\sigma}}(\mathcal{M})$ où $\tilde{\sigma} = \sigma_{<\beta, \alpha_{\{i\}^c}}$. On a donc $U_0(\mathcal{M}) = V_{<\beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})$ et on en déduit que $(E_i + \beta + 1)^\ell$ annule

$$V_{\beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})/V_{<\beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M}).$$

□

Étant donnée la définition de $\text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M})$ on déduit immédiatement de cette proposition le corollaire suivant :

Corollaire 2.17. — *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module tel que $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^p$ et tout $1 \leq i \leq p$, l'endomorphisme $(E_i + \alpha_i + 1)$ de $\text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M})$ est nilpotent.*

Définition 2.18. — Étant donné un couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ sans pente, on définit les *cycles proches algébriques* de \mathcal{M} relatifs à la famille d'hypersurfaces \mathbf{H} de la manière suivante

$$\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M} := \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M}).$$

C'est un $\text{gr}_0^V \mathcal{D}_X$ -modules cohérent. Or, si l'on note $X_0 := \bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i$, on a $\text{gr}_0^V \mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_{X_0}[E_1, \dots, E_p]$. Le corollaire 2.17 implique ainsi que $\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M}$ est un \mathcal{D}_{X_0} -module cohérent. Les cycles proches algébriques sont munis d'endomorphismes de monodromie pour $1 \leq i \leq p$

$$T_i := \exp(-2i\pi E_i).$$

La proposition suivante est une conséquence du corollaire 2.13

Proposition 2.19. — *Soit $I \subset \{1, \dots, p\}$, on a alors un morphisme naturel, fonctoriel en \mathcal{M} , de $\text{gr}_0^V \mathcal{D}_X$ -modules*

$$\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M} \rightarrow \Psi_{\mathbf{H}_I}(\Psi_{\mathbf{H}_I^c}\mathcal{M})$$

qui est un isomorphisme si le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente.

Dans le cas général $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{C}^p$, l'inclusion du graphe de \mathbf{f} permet de définir les cycles proches algébriques.

Définition 2.20. — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_{\mathbf{f}}} & X \times \mathbb{C}^p \\ & \searrow \mathbf{f} & \downarrow \pi = (\pi_1, \dots, \pi_p) \\ & & \mathbb{C}^p. \end{array}$$

où $i_{\mathbf{f}}$ est le graphe de \mathbf{f} . Soit $H_i := \pi_i^{-1}(0)$. D'après ce qui précède, si le couple $(\mathbf{H}, i_{\mathbf{f}+}\mathcal{M})$ est sans pente, alors $\Psi_{\mathbf{H}}i_{\mathbf{f}+}\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{X \times 0}$ -module cohérent à support $\{(\mathbf{x}, 0) \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}$. On peut le voir comme un \mathcal{D}_X -module cohérent à support $\mathbf{f}^{-1}(0)$, on le note alors $\Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}}\mathcal{M}$.

On déduit de la proposition 2.19 l'isomorphisme

$$\Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}}\mathcal{M} \rightarrow \Psi_{\mathbf{f}_I}^{\text{alg}}(\Psi_{\mathbf{f}_I^c}^{\text{alg}}\mathcal{M}).$$

2.3. Cycles proches topologiques. — Ici on définit le foncteur cycles proches topologiques associé à une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$ et appliqué à la catégorie des complexes de faisceaux à cohomologie \mathbb{C} -constructible.

Définition 2.21. — Considérons le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* & \xleftarrow{p} & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f|_{X^*} & & \downarrow \widetilde{f} \\ \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^p & \xleftarrow{j} & (\mathbb{C}^*)^p & \xleftarrow{p} & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \end{array}$$

Ici $X^* = X - F^{-1}(0)$ avec $F = f_1 \dots f_p$ et $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}$ est le revêtement universel de $(\mathbb{C}^*)^p$.

Si \mathcal{F} est un complexe de faisceaux à cohomologie \mathbb{C} -constructible, on définit :

$$\Psi_f \mathcal{F} := i^{-1} \mathbf{R}j_* p_* p^{-1} j^{-1} \mathcal{F}$$

c'est le *foncteur cycles proches*. On peut identifier le morphisme $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^p$ à

$$\begin{array}{ccc} \exp : & \mathbb{C}^p & \rightarrow & (\mathbb{C}^*)^p \\ & (z_1, \dots, z_p) & \mapsto & (e^{2i\pi z_1}, \dots, e^{2i\pi z_p}). \end{array}$$

Pour $1 \leq i \leq p$ les translations

$$\begin{array}{ccc} \tau_i : & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} & \rightarrow & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \\ & (z_1, \dots, z_i, \dots, z_p) & \mapsto & (z_1, \dots, z_i + 1, \dots, z_p). \end{array}$$

permettent d'induire des endomorphismes de monodromie $T_i : \Psi_f \mathcal{F} \rightarrow \Psi_f \mathcal{F}$.

Supposons que les f_i définissent un diviseur à croisements normaux \mathbf{H} où $H_i = \{f_i = 0\}$ et que $\mathcal{F} = \mathbf{DR}(\mathcal{M})$. Dans [Mai13] Ph. Maisonobe démontre la proposition suivante

Proposition 2.22. — Soit $I \subset \{1, \dots, p\}$, il existe un morphisme naturel

$$(4) \quad \Psi_f \mathcal{F} \rightarrow \Psi_{f_I} (\Psi_{f_I^c} \mathcal{F}).$$

De plus si le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente alors ce morphisme est un isomorphisme.

2.4. Fonctions de classe de Nilsson. — On se place ici dans le cas d'une famille d'hypersurfaces qui forment un diviseur à croisements normaux, quitte à diminuer X , on suppose qu'il existe un système de coordonnées $(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p)$ tel que pour tout $1 \leq i \leq p$, l'hypersurface H_i ait pour équation $t_i = 0$. On note

$$\begin{array}{ccc} \pi : & X & \rightarrow & \mathbb{C}^p \\ & (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) & \mapsto & (t_1, \dots, t_p). \end{array}$$

Définition 2.23. — Soit $\alpha \in [-1, 0]^p$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$. On note $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}$ la connexion méromorphe sur \mathbb{C}^p :

$$\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}} = \bigoplus_{0 \leq \ell \leq \mathbf{k}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p} \left[\frac{1}{z_1 \dots z_p} \right] e_{\alpha, \ell}$$

avec la structure de \mathcal{D} -module donnée par la formule

$$z_i \partial_{z_i} e_{\alpha, \ell} = (\alpha_i + 1) e_{\alpha, \ell} + e_{\alpha, \ell - \mathbf{1}_i}.$$

On définit T_i le morphisme de monodromie d'indice i par la formule

$$T_i e_{\alpha, \ell} = \exp(2i\pi(\alpha_i + 1)) \sum_{0 \leq m \leq \ell_i} \frac{(2i\pi)^m}{m!} e_{\alpha, \ell - m \cdot \mathbf{1}_i}.$$

Remarque 2.24. — Pour se souvenir de la structure de \mathcal{D} -module et de la monodromie il faut remarquer que la section $e_{\alpha, \ell}$ se comporte comme la fonction multiforme $z^{\alpha+1} \frac{\log^{\ell_1} z_1}{\ell_1!} \dots \frac{\log^{\ell_p} z_p}{\ell_p!}$.

Définition 2.25. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. On définit :

$$\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} = \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1} (\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1} (\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}).$$

D'autre part on a

$$\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi^+ (\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}})$$

où π^+ est l'image inverse dans la catégorie des \mathcal{D} -modules. Ceci permet de munir $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$ d'une structure naturelle de \mathcal{D}_X -module. Notons $Y := \bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i$. La restriction de $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$ à Y est munie d'endomorphismes T_i induits par les morphismes de monodromie de $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}$ et définis par :

$$T_i(m \otimes e_{\alpha, \ell}) = m \otimes T_i e_{\alpha, \ell}.$$

Proposition 2.26. — Soit $\alpha \in [-1, 0]^p$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$ et \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. Alors le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$ est sans pente. De plus, pour tout $\beta \in \mathbb{C}^p$, on a :

$$V_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0} \leq \ell \leq \mathbf{k}} V_{\alpha + \beta + 1} \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) e_{\alpha, \ell}.$$

On commence par un lemme qui sera utile dans la démonstration de cette proposition.

Définition 2.27. — Soit (x, t_1, \dots, t_p) un système de coordonnées locales où $t_i = 0$ est une équation de H_i . Soit $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}] \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$ le $\mathcal{O}_X[\mathbf{s}]$ -module isomorphe à $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}]$ par l'application $m \mapsto m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$. Il est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X[\mathbf{s}]$ -module par la formule :

$$\partial_i(m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}) := (\partial_i m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} + \left(\frac{s_i m}{t_i} \right) \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$$

Lemme 2.28. — Soit m une section locale de $\mathcal{M}[1/t]$ et $b(s) \in \mathbb{C}[s]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $b(E_i)m \in V_{-1_i}(\mathcal{D}_X)m$
2. $b(-s_i - 1)m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}] t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$

Démonstration. — Montrons que 1 implique 2. Dans $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}] \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$ on a l'égalité

$$(t_i \partial_i m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} = (-s_i - 1)m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} + \partial_i(t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}).$$

On montre alors par récurrence que pour tout k

$$((t_i \partial_i)^k m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} - (-s_i - 1)^k m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}] t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}.$$

On a donc pour tout polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$

$$(b(E_i)m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} - b(-s_i - 1)m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}] t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}.$$

D'autre part, si $b(E_i)m \in V_{-1_i}(\mathcal{D}_X)m$ une récurrence permet de montrer que $(b(E_i)m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}] t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$ et on en déduit 2.

Montrons que 2 implique 1. D'une part, on peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leq \ell \leq k$, il existe $m_{k, \ell} \in \mathcal{M}[1/t]$ satisfaisant à :

$$(5) \quad s_i^k m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} = ((-\partial_i t_i)^k m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} + \sum_{\ell=1}^k \partial_i^{\ell} (m_{k, \ell} \mathbf{t}^{\mathbf{s}}).$$

D'autre part, en faisant opérer les $\partial^{\alpha} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_p^{\alpha_p}$ et en annulant les coefficients du polynôme en les s_i que l'on obtient, on peut montrer le résultat suivant :

$$(6) \quad \left[\sum_{\alpha} \partial^{\alpha} (m_{\alpha} \mathbf{t}^{\mathbf{s}}) = 0 \right] \Rightarrow [m_{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha]$$

pour une somme finie sur les α . Enfin, si l'on regarde plus précisément la récurrence faite dans la première partie de la démonstration on obtient

$$(b(E_i)m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} - b(-s_i - 1)m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} \in \partial_i \mathcal{D}_X[\mathbf{s}] t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}.$$

L'hypothèse 2 implique

$$b(-s_i - 1)m \mathbf{t}^{\mathbf{s}} = \sum_{\alpha, \mathbf{k}} \partial^{\alpha} s^{\mathbf{k}} A_{\alpha, \mathbf{k}} t_i m \mathbf{t}^{\mathbf{s}}$$

où $A_{\alpha, \mathbf{k}}$ est un opérateur différentiel indépendant des ∂_i pour tout $1 \leq i \leq p$. En utilisant l'égalité (5) on peut substituer les s_j et on obtient

$$(b(E_i)m) \mathbf{t}^{\mathbf{s}} - \sum_{\mathbf{k}} [(-t_1 \partial_1 - 1)^{k_1} \dots (-t_p \partial_p - 1)^{k_p} A_{\mathbf{0}, \mathbf{k}} t_i m] \mathbf{t}^{\mathbf{s}} = \sum_{\alpha > \mathbf{0}} \partial^{\alpha} (m_{\alpha} \mathbf{t}^{\mathbf{s}})$$

avec $m_{\alpha} \in \mathcal{M}[1/t]$. En utilisant (6) et le fait que $(-t_1 \partial_1 - 1)^{k_1} \dots (-t_p \partial_p - 1)^{k_p} A_{\mathbf{0}, \mathbf{k}} t_i \in V_{-1_i}(\mathcal{D}_X)$ on conclut que $b(E_i)m \in V_{-1_i}(\mathcal{D}_X)m$. □

Démonstration de la proposition 2.26. — On commence par montrer que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$ est sans pente. Quelque soit $1 \leq i \leq p$, le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^p}$ -module $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}/\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}-\mathbf{1}_i}$ s'identifie à $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}-k_i \cdot \mathbf{1}_i}$. On a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}-\mathbf{1}_i} \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}-k_i \cdot \mathbf{1}_i} \rightarrow 0.$$

Pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$ le $\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}$ -module $\pi^{-1}\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}$ est à fibres plates car libres, il est donc acyclique pour le foncteur de produit tensoriel par $\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}]$ et on a la suite exacte :

$$(7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}-\mathbf{1}_i} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}-k_i \cdot \mathbf{1}_i} \rightarrow 0.$$

Le module central est sans pente si et seulement si les deux autres modules le sont. En effet, comme dans le cas des bonnes V -filtration pour $p = 1$ (cf [MM04]), une bonne V -multifiltration du terme central induit des bonnes V -multifiltration des termes extrêmes. On considère alors la suite exacte

$$0 \rightarrow U_{\ell}\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}-\mathbf{1}_i} \rightarrow U_{\ell}\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} \rightarrow U_{\ell}\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}-k_i \cdot \mathbf{1}_i} \rightarrow 0$$

et on observe que la condition multispécialisable sans pente de la définition 2.2 est satisfaite pour le module central si et seulement si elle l'est pour les deux autres modules. Par récurrence on est alors ramené à montrer que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{0}})$ est sans pente. Soit m une section locale de $\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}]$. D'après la proposition 2.15 le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}])$ est sans pente et par conséquent le lemme 2.28 fournit localement, pour $1 \leq i \leq p$, des polynômes b_i non nuls vérifiant :

$$b_i(s_i)mt^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[s]t_i mt^{\mathbf{s}}.$$

Par définition du $\mathcal{D}_X[s]$ -module $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}]t^{\mathbf{s}}$, on obtient les équations :

$$(8) \quad b_i(s_i + \alpha_i + 1)(m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[s]t_i(m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{\mathbf{s}}.$$

Soit $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{N}^p$ tel que pour tout $k_i \in \mathbb{N}$ vérifiant $k_i \geq k_{0,i} + 1$, l'entier $-k_i$ n'est pas racine de $b_i(s_i + \alpha_i + 1) \in \mathbb{C}[s_i]$. En remplaçant les s_i par les entiers k_i dans la relation (8) et en multipliant éventuellement par des t_i on obtient que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$

$$(m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{\mathbf{k}} \in \mathcal{D}_X((m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{-\mathbf{k}_0}).$$

De plus pour tout $1 \leq i \leq p$, l'égalité $(\partial_i(m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}}))t^{\mathbf{k}} = \partial_i((m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{\mathbf{k}}) + k_i(m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}$ montre que $(\partial_i(m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}}))t^{\mathbf{k}} \in \mathcal{D}_X((m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{-\mathbf{k}_0})$ pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$. Comme \mathcal{M} est engendré par un nombre fini de sections, en utilisant des extensions successives on peut supposer que m engendre \mathcal{M} . On a donc $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{0}} = \mathcal{D}_X((m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{-\mathbf{k}_0})$. La filtration $\mathcal{D}_X(l)((m \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}})t^{-\mathbf{k}_0})$ étant une bonne filtration du \mathcal{D}_X -module $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{0}}$, celui-ci est cohérent. Les équations (8) ainsi que le lemme 2.28 permettent alors de conclure que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{0}})$ est sans pente et donc par ce qui précède que $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$ l'est.

Pour démontrer la deuxième partie de la proposition on commence par noter

$$U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) := \bigoplus_{\mathbf{0} \leq \ell \leq \mathbf{k}} V_{\alpha+\beta+1} \left(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}] \right) e_{\alpha, \ell}$$

et on va montrer que c'est une bonne V -multifiltration qui satisfait à toutes les propriétés caractéristiques de la multifiltration de Malgrange-Kashiwara. Soit $m \in \mathcal{M}$, $\ell \in \mathbb{N}^p$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $1 \leq i \leq p$. On a localement

$$(9) \quad (t_i \partial_i + \beta)(m \otimes e_{\alpha, \ell}) = ((t_i \partial_i + \beta + \alpha_i + 1)m) \otimes e_{\alpha, \ell} + m \otimes e_{\alpha, \ell - \mathbf{1}_i}$$

et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^p$

$$t^{\mathbf{n}}(m \otimes e_{\alpha, \ell}) = (t^{\mathbf{n}}m) \otimes e_{\alpha, \ell}.$$

Ceci permet de montrer que $U_{\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$ est une V -multifiltration de $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$ (c'est-à-dire que cette multifiltration vérifie $V_{\ell}\mathcal{D}_X.U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) \subset U_{\beta+\ell}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$ pour tout $\beta \in \mathbb{C}^p$ et pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^p$).

Pour montrer que c'est une bonne V -multifiltration on fixe $\beta \in \mathbb{C}^p$ et on montre que la V -multifiltration indexée par \mathbb{Z}^p , $U_{\beta+\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$, est une bonne V -multifiltration de $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$. Comme la V -multifiltration indexée par \mathbb{Z}^p , $V_{\alpha+\beta+\bullet+1}(\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}])$, est une bonne V -multifiltration elle est engendrée localement par un nombre fini de sections $\{m_j\}_{j \in J}$. Si $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ l'égalité (9) permet de montrer que les sections $\{m_j \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}}\}_{j \in J}$ engendrent la V -multifiltration $U_{\beta+\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{0}})$. On peut alors montrer par récurrence, en considérant la suite exacte (7) et l'égalité (9), que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$ les sections $m_j \otimes e_{\alpha, \ell}$, pour $j \in J$ et $0 \leq \ell \leq \mathbf{k}$, engendrent la V -multifiltration $U_{\beta+\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$. C'est donc une bonne V -multifiltration de $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$.

On fixe maintenant $\beta \in \mathbb{C}^p$ et on va construire, pour tout $1 \leq i \leq p$, un polynôme $b_i(s)$ qui satisfait à

$$b_i(t_i \partial_i)U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) \subset U_{\beta-\mathbf{1}_i}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}).$$

Par définition de la multifiltration de Malgrange-Kashiwara on peut choisir, pour tout $1 \leq i \leq p$, un polynôme $c_i(s)$ vérifiant

$$c_i(t_i \partial_i + \alpha_i + \beta_i + 1) V_{\alpha+\beta+1} \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) \subset V_{\alpha+\beta+1-i} \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right)$$

et ayant ses racines dans l'intervalle $[-1, 0[$. Soit $m \in V_{\alpha+\beta+1} \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right)$, l'égalité (9) permet de montrer que

$$c_i(t_i \partial_i + \beta_i)(m \otimes e_{\alpha, \ell}) = (c_i(t_i \partial_i + \beta_i + \alpha_i + 1)m) \otimes e_{\alpha, \ell} + \tilde{m}$$

où $\tilde{m} \in U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, k-1_i})$ si on pose $U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, \ell}) = 0$ pour $\ell_i < 0$. On peut donc construire par récurrence un polynôme $b_{i,m}(s)$ ayant ses racines dans l'intervalle $[-1, 0[$ et vérifiant

$$b_{i,m}(t_i \partial_i + \beta_i)(m \otimes e_{\alpha, \ell}) \in U_{\beta-1_i}(\mathcal{M}_{\alpha, k}).$$

Comme $U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, k})$ est localement engendré par un nombre fini de sections de la forme $m \otimes e_{\alpha, \ell}$ pour $0 \leq \ell \leq k$ on peut construire $b_i(s)$ ayant ses racines dans $[-1, 0[$ tel que

$$b_i(t_i \partial_i + \beta_i) U_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, k}) \subset U_{\beta-1_i}(\mathcal{M}_{\alpha, k}).$$

Les racines du polynôme de Bernstein-Sato de la V -multifiltration $U_{\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, k-1_i})$ sont donc dans l'intervalle $[-1, 0[$, ce qui permet de conclure que c'est bien la V -multifiltration de Malgrange-Kashiwara :

$$V_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, k}) = \bigoplus_{0 \leq \ell \leq k} V_{\alpha+\beta+1} \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) e_{\alpha, \ell}.$$

□

3. Morphisme de comparaison

On va construire un morphisme de comparaison entre les cycles proches algébriques de \mathcal{M} et les cycles proches topologiques de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ relativement à l'application

$$\begin{aligned} \pi : \quad X &\rightarrow \mathbb{C}^p \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) &\mapsto (t_1, \dots, t_p). \end{aligned}$$

On établira le lien avec la composition du morphisme de comparaison relatif aux r premières coordonnées t_i et de celui relatif aux $p-r$ coordonnées t_i suivantes pour $1 < r < p$.

3.1. Comparaison avec les gradués. — Commençons par donner deux définitions.

Définition 3.1. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module tel que le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ soit sans pente. On considère la famille $\{\mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leq i \leq p}$ composée des objets $\mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M})$ pour $\mathbf{k} \in \{0,1\}^p$ et des morphismes $\partial_i : \mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathrm{gr}_{\mathbf{k}+1_i}(\mathcal{M})$. On définit

$$i^{\dagger} \mathcal{M} := s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathcal{M})))|_{X_0}$$

où $s(\cdot)$ et $\mathrm{Cube}(\cdot)$ sont les foncteurs définis dans l'appendice A.2 et A.5 et $X_0 = \pi^{-1}(0)$.

Par exemple pour $p=2$ on a

$$\begin{aligned} i^{\dagger} \mathcal{M} = 0 &\rightarrow \mathrm{gr}_{-1,-1}(\mathcal{M})|_{X_0} \rightarrow \mathrm{gr}_{0,-1}(\mathcal{M})|_{X_0} \oplus \mathrm{gr}_{-1,0}(\mathcal{M})|_{X_0} \rightarrow \mathrm{gr}_{0,0}(\mathcal{M})|_{X_0} \rightarrow 0 \\ m &\mapsto (\partial_1 m, -\partial_2 m) \\ &\quad (m_1, m_2) \mapsto \partial_2 m_1 + \partial_1 m_2 \quad . \end{aligned}$$

Définition 3.2. — De la même manière que pour la définition précédente on considère la famille $\{V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leq i \leq p}$ composée des objets $V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M})$ pour $\mathbf{k} \in \{0,1\}^p$ et des morphismes $\partial_i : V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{\mathbf{k}+1_i}(\mathcal{M})$. On définit

$$i^{\#} \mathcal{M} := s(\mathrm{Cube}(V_{\bullet}(\mathcal{M})))|_{X_0}$$

où $X_0 = \pi^{-1}(0)$.

Remarque 3.3. — 1. Notons que si on considère la famille $\mathcal{M} := \{\mathcal{M}, \partial_i\}_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leq i \leq p}$ on a

$$s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}))|_{X_0} \simeq \mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})|_{X_0}$$

où l'on considère la projection

$$\begin{aligned} \tau : \quad X &\rightarrow X_0 \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) &\mapsto (\mathbf{x}, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

2. On étend ces définitions aux complexes en commençant par appliquer $\text{Cube}(\cdot)$ en chaque degré puis en prenant le complexe simple associé à l'hypercomplexe obtenu. On note encore $i^\#$ et i^\dagger ces foncteurs appliqués aux complexes.

D'après la remarque précédente les morphismes naturels pour tout $\mathbf{k} \in \{0, 1\}^p$

$$\text{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \leftarrow V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

induisent les morphismes de complexes

$$(10) \quad \boxed{i^\dagger \mathcal{M} \leftarrow i^\# \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})}$$

où l'on omet de noter la restriction de $\mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})$ à X_0 . Soit $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$ les r premiers entiers pour $r < p$, on note

$$\pi_I : \quad X \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}^r \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) \mapsto (t_1, \dots, t_r)$$

et $X_0^I := \pi_I^{-1}(0)$. On note V_\bullet^I la V -multifiltration par rapport aux fonctions t_1, \dots, t_r . La V -multifiltration de Malgrange-Kashiwara de \mathcal{M} induit une V^{I^c} -multifiltration du $\mathcal{D}_{X_0^I}$ -module $\text{gr}_{\alpha_I}^I(\mathcal{M})$ pour tout $\alpha_I \in \mathbb{C}^r$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^p$ on a le diagramme commutatif suivant

$$(11) \quad \begin{array}{ccccc} \text{gr}_\alpha \mathcal{M} & \longleftarrow & & & V_\alpha \mathcal{M} \\ \downarrow & & & & \parallel \\ \text{gr}_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(\text{gr}_{\alpha_I}^I \mathcal{M}) & \longleftarrow & V_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(\text{gr}_{\alpha_I}^I \mathcal{M}) & \longleftarrow & V_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(V_{\alpha_I}^I \mathcal{M}). \end{array}$$

On définit les foncteurs i_I^\dagger et $i_I^\#$ en considérant respectivement les familles $\{\text{gr}_{\mathbf{k}_I}(\mathcal{M}'), \partial_i\}_{\mathbf{k}_I \in \{0,1\}^r, 1 \leq i \leq r}$ et $\{V_{\mathbf{k}_I}(\mathcal{M}'), \partial_i\}_{\mathbf{k}_I \in \{0,1\}^r, 1 \leq i \leq r}$. On définit de manière analogue les foncteurs $i_{I^c}^\dagger$ et $i_{I^c}^\#$ appliqués à la catégorie des $\mathcal{D}_{X_0^I}$ -modules en considérant la projection

$$\pi_{I^c}|_{X_0^I} : \quad X_0^I \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}^{p-r} \\ (\mathbf{x}, t_{p-r}, \dots, t_p) \mapsto (t_{p-r}, \dots, t_p).$$

Les propriétés des hypercomplexes, du foncteur $s(\cdot)$ et le diagramme commutatif (11) pour $\alpha \in \{0, 1\}^p$ fournissent le diagramme commutatif suivant

$$(12) \quad \begin{array}{ccccccc} i^\dagger \mathcal{M} & \longleftarrow & i^\# \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{DR}_{X/X_0} \mathcal{M} & & \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \\ i_{I^c}^\dagger(i_I^\dagger \mathcal{M}) & \longleftarrow & i_{I^c}^\#(i_I^\dagger \mathcal{M}) & \longleftarrow & i_{I^c}^\#(i_I^\# \mathcal{M}) & \longrightarrow & i_{I^c}^\#(\mathbf{DR}_{X/X_0^I} \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{DR}_{X_0^I/X_0}(\mathbf{DR}_{X/X_0^I} \mathcal{M}). \end{array}$$

3.2. Le morphisme «Nils». — D'après la proposition 2.26 on a

$$\text{gr}_{-1}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0} \leq \ell \leq \mathbf{k}} \text{gr}_\alpha \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) e_{\alpha, \ell}.$$

La proposition 2.15 assure que pour $\alpha \in [-1, 0]^p$ on a l'isomorphisme

$$\text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) \simeq \text{gr}_\alpha \left(\mathcal{M} \left[\frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right).$$

On définit alors le morphisme suivant

$$\Phi : \quad \text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) \quad \longrightarrow \quad \text{gr}_{-1}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) \\ m \quad \longmapsto \quad \sum_{\mathbf{0} \leq \ell \leq \mathbf{k}} [(-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_p} (t_1 \partial_1 + \alpha_1 + 1)^{\ell_1} \dots (t_p \partial_p + \alpha_p + 1)^{\ell_p} m] \otimes e_{\alpha, \ell}$$

qui induit un morphisme de complexes

$$\boxed{\text{Nils} : \text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow i^\dagger \mathcal{M}_\alpha}$$

où l'on identifie $\text{gr}_\alpha(\mathcal{M})$ avec un complexe concentré en degré zéro et où \mathcal{M}_α est la limite inductive des $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$ prise sur $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$.

Remarque 3.4. — Remarquons ici que \mathcal{M}_α n'est pas un \mathcal{D}_X -module de type fini. Mais le fait qu'il soit limite des $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$ et que les couples $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$ soient sans pente suffit pour le reste de la construction et pour le théorème de comparaison.

En utilisant la définition 2.23 on obtient

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}) \simeq \left(\mathcal{O}_X \otimes_{\pi_I^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}} \pi_I^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha_I, \mathbf{k}_I}) \right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{O}_X \otimes_{\pi_{I^c}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p-r}}} \pi_{I^c}^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha_{I^c}, \mathbf{k}_{I^c}}) \right).$$

On déduit de cet isomorphisme et de la définition du morphisme Φ le diagramme commutatif suivant

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} \text{gr}_{\alpha} \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{Nils}} & i^{\dagger} \mathcal{M}_{\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}_{\alpha_{I^c}}^{I^c} (\text{gr}_{\alpha_I}^I \mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{gr}_{\alpha_{I^c}}^{I^c} (i_I^{\dagger} \mathcal{M}_{\alpha_I}) \longrightarrow i_{I^c}^{\dagger} \left[(i_I^{\dagger} \mathcal{M}_{\alpha_I})_{\alpha_{I^c}} \right]. \end{array}$$

3.3. Le morphisme «Topo». — Rappelons le diagramme commutatif utilisé pour définir les cycles proches topologiques :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* & \xleftarrow{p} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi|_{X^*} & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^p & \xleftarrow{j} & (\mathbb{C}^*)^p & \xleftarrow{p} & \widehat{(\mathbb{C}^*)^p}. \end{array}$$

Lemme 3.5. — Soit $\alpha \in \mathbb{C}^p$, il existe un morphisme naturel

$$\boxed{\text{Topo} : \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\alpha}) \rightarrow \Psi_{\pi} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).}$$

Démonstration. — Par définition, $\mathcal{M}_{\alpha} = \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}\mathcal{N}_{\alpha}$, or on a une inclusion $\mathcal{N}_{\alpha} \subset j_* p_* p^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ dans le faisceau des fonctions holomorphes multiformes. Par functorialité on a donc le morphisme :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\alpha}) \rightarrow \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes \pi^{-1} j_* p_* p^{-1} \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}).$$

L'adjonction des foncteurs image inverse et image directe fournit un morphisme de foncteurs $\pi^{-1}(j \circ p)_* \rightarrow (j \circ p)_* \tilde{\pi}^{-1}$. Ceci donne le morphisme :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes \pi^{-1} j_* p_* p^{-1} \mathcal{O}) \rightarrow \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* \tilde{\pi}^{-1} p^{-1} \mathcal{O}) = \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* p^{-1} \pi|_{X^*}^{-1} \mathcal{O}).$$

Par adjonction on a le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* p^{-1} \pi|_{X^*}^{-1} \mathcal{O}) &\rightarrow \mathbf{R}j_* j^{-1} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_* p_* p^{-1} \pi|_{X^*}^{-1} \mathcal{O}) \\ &= \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(j^{-1} \mathcal{M} \otimes j^{-1} j_* p_* p^{-1} \pi^{-1} \mathcal{O}) \\ &= \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(j^{-1} \mathcal{M} \otimes p_* p^{-1} \pi^{-1} \mathcal{O}). \end{aligned}$$

On applique ensuite le morphisme (2.3.21) de [KS94] (formule de projection) à la fonction p , en considérant le fait que p_* est un foncteur exact car p est à fibres discrètes. Par functorialité on a alors le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(j^{-1} \mathcal{M} \otimes p_* p^{-1} \pi^{-1} \mathcal{O}) &\rightarrow \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(p_* p^{-1} (j^{-1} \mathcal{M} \otimes \pi^{-1} \mathcal{O})) \\ &= \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(p_* p^{-1} j^{-1} \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Sachant que $\mathbf{DR}_X \mathcal{M} = \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$, on peut appliquer le morphisme (2.6.21) de [KS94] à p (formule de projection) et on obtient le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}j_* \mathbf{DR}_X(p_* p^{-1} j^{-1} \mathcal{M}) &\rightarrow \mathbf{R}j_* p_* \mathbf{DR}_X(p^{-1} j^{-1} \mathcal{M}) \\ &= \mathbf{R}j_* p_* p^{-1} j^{-1} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Si l'on compose tous les morphismes naturels que l'on vient de construire on obtient bien le morphisme naturel attendu :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_{\alpha}) \rightarrow \Psi_{\pi} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

□

La naturalité de ce morphisme ainsi que la définition du morphisme (4)

$$\Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) \rightarrow \Psi_{\pi_I c}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}))$$

permettent de montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{DR}_X \mathcal{M}_\alpha & \xrightarrow{\text{Topo}} & \Psi_\pi \mathbf{DR}_X \mathcal{M} \\ \parallel & & \downarrow \\ \mathbf{DR}_X [(\mathcal{M}_{\alpha_I})_{\alpha_{I^c}}] & \longrightarrow \Psi_{\pi_I c}(\mathbf{DR}_X \mathcal{M}_{\alpha_I}) \longrightarrow & \Psi_{\pi_I c}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X \mathcal{M}). \end{array}$$

3.4. Le morphisme de comparaison. — En combinant les morphismes (10), **Nils** et **Topo** on obtient la suite de morphismes suivante

$$(15) \quad \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\text{Nils}} \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \mathbf{DR}_{X_0} i^\dagger \mathcal{M}_\alpha \leftarrow \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \mathbf{DR}_{X_0} i^\# \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_\alpha) \xrightarrow{\text{Topo}} \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

On a appliqué les morphisme (10) à \mathcal{M}_α , on a ensuite appliqué le foncteur \mathbf{DR}_{X_0} et on a pris la somme sur $\alpha \in]-1, 0]^p$ en utilisant la définition

$$\Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \text{gr}_\alpha(\mathcal{M}).$$

Théorème 3.6. — *Si le couple $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$ est sans pente alors les morphismes (15) sont des isomorphismes qui commutent aux endomorphismes de monodromie T_i , on obtient l'isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

De plus si $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$ et si l'on applique successivement cet isomorphisme de comparaison par rapport aux familles d'hypersurfaces \mathbf{H}_I et \mathbf{H}_{I^c} le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique l'isomorphisme. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}_{I^c}}(\Psi_{\mathbf{H}_I} \mathcal{M}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}_I}(\Psi_{\mathbf{H}_{I^c}} \mathcal{M}) \\ \Big| \simeq & & \Big| \simeq & & \Big| \simeq \\ \Psi_{\pi_I c}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})) & \xleftarrow{\sim} & \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\pi_I}(\Psi_{\pi_I c} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})). \end{array}$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le nombre p d'hypersurfaces dans \mathbf{H} , le cas $p = 1$ est traité par Ph. Maisonobe et Z. Mebkhout dans [MM04, théorème 5.3-2] ou par Morihiko Saito dans [Sai88, lemmes 3.4.4 et 3.4.5].

Pour $p > 1$, soit $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$ avec $1 < r < p$, on va considérer les diagrammes commutatifs (12), (13) et (14). L'hypothèse sans pente permet d'appliquer la proposition 2.19 (resp. 2.22) qui assure que les flèches verticales des diagrammes (12) et (13) (resp. (14)) sont des isomorphismes. La commutativité de ces diagrammes permet de se ramener aux cas de r et $p - r$ hypersurfaces en appliquant successivement les deux isomorphismes de comparaison obtenus par récurrence. La commutativité donne alors également directement la deuxième partie du théorème. \square

Pour un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$, l'inclusion du graphe de f permet de donner une version générale de ce théorème :

Corollaire 3.7. — *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits et \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome régulier tel que le couple $(\mathbf{H}, i_{f+} \mathcal{M})$ soit sans pente. On a un isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{DR}_X \Psi_f^{\text{alg}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_f \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

De plus si $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$ et si l'on applique successivement cet isomorphisme de comparaison par rapport aux fonctions f_I et f_{I^c} le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique l'isomorphisme. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{DR}_X \Psi_{f_{I^c}}^{\mathrm{alg}}(\Psi_{f_I}^{\mathrm{alg}} \mathcal{M}) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{DR}_X \Psi_f^{\mathrm{alg}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{DR}_X \Psi_{f_I}^{\mathrm{alg}}(\Psi_{f_{I^c}}^{\mathrm{alg}} \mathcal{M}) \\ \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. \\ \Psi_{f_{I^c}}(\Psi_{f_I} \mathrm{DR}_X(\mathcal{M})) & \xleftarrow{\sim} & \Psi_f \mathrm{DR}_X(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{f_I}(\Psi_{f_{I^c}} \mathrm{DR}_X(\mathcal{M})). \end{array}$$

Démonstration. — On applique le théorème 3.6 à $i_{f_+} \mathcal{M}$, on obtient l'isomorphisme

$$\mathrm{DR}_{X_0} \Psi_{\mathrm{H}}(i_{f_+} \mathcal{M}) \simeq \Psi_{\pi} \mathrm{DR}_{X \times \mathbb{C}^p}(i_{f_+} \mathcal{M}).$$

où $\pi : X \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ est la projection. On applique le foncteur i_f^{-1} à cette isomorphisme. On observe qu'un théorème de changement de base propre donne l'isomorphisme de foncteur $\Psi_f i_f^{-1} \simeq i_f^{-1} \Psi_{\pi}$. On en déduit l'isomorphisme

$$i_f^{-1} \mathrm{DR}_{X_0} \Psi_{\mathrm{H}}(i_{f_+} \mathcal{M}) \simeq \Psi_f i_f^{-1} \mathrm{DR}_{X \times \mathbb{C}^p}(i_{f_+} \mathcal{M}).$$

On déduit enfin de l'équivalence de Kashiwara appliquée à l'injection du graphe de f dans $X \times \mathbb{C}^p$ l'isomorphisme attendu

$$\mathrm{DR}_X \Psi_f^{\mathrm{alg}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_f \mathrm{DR}_X(\mathcal{M}).$$

La suite du corollaire se démontre de la même manière. \square

On déduit en particulier de ce corollaire que, dans le cas sans pente, si l'on applique l'isomorphisme de comparaison par rapport aux fonctions f_1, \dots, f_p l'une après l'autre l'isomorphisme

$$\mathrm{DR}_X \left(\Psi_{f_{\sigma(p)}}^{\mathrm{alg}} \left(\dots \Psi_{f_{\sigma(2)}}^{\mathrm{alg}} \left(\Psi_{f_{\sigma(1)}}^{\mathrm{alg}} \mathcal{M} \right) \right) \right) \simeq \Psi_{f_{\sigma(p)}} \left(\dots \Psi_{f_{\sigma(2)}} \left(\Psi_{f_{\sigma(1)}} \mathrm{DR}_X(\mathcal{M}) \right) \right)$$

ne dépend pas de la permutation σ de $\{1, \dots, p\}$.

Appendice A. Hypercomplexes

On définit ici les n -hypercomplexes qui correspondent aux complexes n^{uple} naïfs introduits par P. Deligne au paragraphe 0.4 de [Del73].

Définition A.1. — Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, on définit par induction la catégorie abélienne des n -hypercomplexes de la façon suivante :

- Les 1-hypercomplexes sont les complexes d'objets de \mathcal{C} .
- Les n -hypercomplexes sont les complexes de $(n-1)$ -hypercomplexes.

On notera $\mathcal{C}^n(\mathcal{C})$ la catégorie abélienne des n -hypercomplexes d'objets de \mathcal{C} . Par exemple les 2-hypercomplexes sont les complexes doubles. Un n -hypercomplexe est donc la donnée pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ d'un objet $X^{\mathbf{k}}$ de \mathcal{C} et, pour tout $1 \leq i \leq n$ de morphismes $d^{(i)\mathbf{k}} : X^{\mathbf{k}} \rightarrow X^{\mathbf{k}+1_i}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} d^{(i)} \circ d^{(i)} &= 0 && \text{pour tout } i \\ d^{(i)} \circ d^{(j)} &= d^{(j)} \circ d^{(i)} && \text{pour tout } (i, j) \end{aligned}$$

pour les exposants \mathbf{k} convenables.

Soit X un n -hypercomplexe, pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $m \in \mathbb{Z}$ on note X_i^m le $(n-1)$ -hypercomplexe composé des $X^{\mathbf{k}}$ avec $k_i = m$ et des différentielles correspondantes. Les différentielles $d^{(i)\mathbf{k}}$ avec $k_i = m$ définissent un morphisme :

$$d_i^m : X_i^m \rightarrow X_i^{m+1}$$

qui vérifie $d_i^{m+1} \circ d_i^m = 0$ par définition d'un n -hypercomplexe. On a donc pour tout $1 \leq i \leq n$ un foncteur :

$$\begin{aligned} F_i : \mathcal{C}^n(\mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}^{(n-1)}(\mathcal{C})) \\ X &\mapsto \{X_i^m, d_i^m\}_{m \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

de la catégorie des n -hypercomplexes dans la catégorie des complexes de $(n-1)$ -hypercomplexes. On introduit alors le $(n-1)$ -hypercomplexe :

$$H_i^p(X) := H^p(F_i(X)),$$

et le n -hypercomplexe :

$$H_i(X) := \dots \rightarrow H_i^p(X) \xrightarrow{0} H_i^{p+1}(X) \rightarrow \dots$$

où toutes les flèches horizontales sont nulles.

Définition A.2. — Si un n -hypercomplexe X vérifie la propriété de finitude suivante :

$$(16) \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z} \text{ l'ensemble } \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_1 + \dots + k_n = m, X^{\mathbf{k}} \neq 0\} \text{ est fini,}$$

alors on peut associer à X un complexe simple $s(X)$. On pose

$$s(X)^m := \bigoplus_{k_1 + \dots + k_n = m} X^{\mathbf{k}}.$$

Soit $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ tel que $k_1 + \dots + k_n = m$. On note $i_{\mathbf{k}} : X^{\mathbf{k}} \rightarrow s(X)^m$ et $p_{\mathbf{k}} : s(X)^m \rightarrow X^{\mathbf{k}}$ les morphismes naturels. On peut alors définir la différentielle $d_{s(X)}^m : s(X)^m \rightarrow s(X)^{m+1}$ du complexe $s(X)$ par :

$$p_l \circ d_{s(X)}^m \circ i_{\mathbf{k}} = \begin{cases} (-1)^{k_1 + \dots + k_{j-1}} d^{(j)\mathbf{k}} & \text{si } \#\{i \mid k_i \neq l_i\} = 1 \text{ où } j \text{ vérifie } k_j \neq l_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout \mathbf{k} et \mathbf{l} vérifiant $k_1 + \dots + k_n = m$ et $l_1 + \dots + l_n = m+1$. On peut alors vérifier que $d_{s(X)}^{m+1} \circ d_{s(X)}^m = 0$ et $(s(X), d_{s(X)})$ est donc bien un complexe. On a défini un foncteur

$$\begin{aligned} s : \mathbf{C}_f^n(\mathcal{C}) &\rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{C}) \\ X &\mapsto (s(X), d_{s(X)}) \end{aligned}$$

où $\mathbf{C}_f^n(\mathcal{C})$ est la catégorie des n -hypercomplexes vérifiant la propriété (16). De plus on observe facilement que $s(\cdot)$ est un foncteur exact.

Théorème A.3. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de n -hypercomplexes où X et Y vérifient la propriété (16) et supposons que f induise un isomorphisme :

$$f : H_1(H_2(\dots H_n(X)\dots)) \simeq H_1(H_2(\dots H_n(Y)\dots)).$$

Alors $s(f) : s(X) \rightarrow s(Y)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 1$ c'est la définition d'un quasi-isomorphisme, pour $n = 2$ c'est le théorème 1.9.3 de [KS94]. On suppose que $n \geq 3$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a deux $(n-1)$ -hypercomplexes, $H_n^p(X)$ et $H_n^p(Y)$, qui vérifient les hypothèses du théorème et donc par hypothèse de récurrence f induit un quasi-isomorphisme entre $s(H_n^p(X))$ et $s(H_n^p(Y))$. Or $H_n^p(X) = H^p(F_n(X))$ et $H^p(\cdot)$ est un foncteur additif, il commute donc avec le foncteur $s(\cdot)$ et f induit un quasi-isomorphisme entre $H^p(\{s(X_n^m), s(d_n^m)\}_{m \in \mathbb{Z}})$ et $H^p(\{s(Y_n^m), s(d_n^m)\}_{m \in \mathbb{Z}})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Mais ce quasi-isomorphisme correspond aux conditions du théorème pour les complexes doubles $\{s(X_i^m), s(d_i^m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ et $\{s(Y_i^m), s(d_i^m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, les complexes simples associés à ces deux complexes doubles sont donc quasi-isomorphes par hypothèse de récurrence pour $n = 2$. En appliquant la définition du foncteur s on montre alors que ces deux derniers complexes simples sont en fait les complexes simples associés à X et à Y ce qui conclut la démonstration du théorème. \square

Corollaire A.4. — Soit X un n -hypercomplexe tel qu'il existe un indice i pour lequel le complexe $F_i(X)$ soit exact, alors $s(X)$ est quasi-isomorphe au complexe nul.

Démonstration. — Le théorème précédent est évidemment vérifié si l'on permute les indices des H_i . Si le complexe $F_i(X)$ est exact alors $H_i(X) \simeq H_i(0_n)$ où 0_n est le n -hypercomplexe nul. On a donc

$$H_1(\dots H_{i-1}(H_{i+1}(\dots H_n(H_i(X))\dots)) \simeq H_1(\dots H_{i-1}(H_{i+1}(\dots H_n(H_i(0_n))\dots))$$

et on peut appliquer le théorème précédent, $s(X) \simeq s(0_n)$, $s(X)$ est quasi-isomorphe au complexe nul. \square

Définition A.5. — Soit $\{X^{\mathbf{k}}, f^{(i)\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq i \leq n}$ une famille d'objets de \mathcal{C} et de morphismes $f^{(i)\mathbf{k}} : X^{\mathbf{k}} \rightarrow X^{\mathbf{k}+1_i}$, on appelle *hypercube associé à X* le n -hypercomplexe noté $\text{Cube}(X)^\bullet$ vérifiant

$$\text{Cube}(X)^{k_1, \dots, k_n} = \begin{cases} X^{k_1-1, \dots, k_n-1} & \text{si } \mathbf{k} \in \{0, 1\}^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les morphismes étant ceux donnés par les $f^{(i)\mathbf{k}}$. On vérifie facilement que $\text{Cube}(\cdot)$ définit un foncteur exact.

Par exemple, pour $n = 3$ on a

$$\text{Cube}(X) = \begin{array}{ccccc} & & X^{-1,0,0} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,0,0} \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\ X^{-1,-1,0} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,-1,0} & & \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & X^{-1,0,-1} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,0,-1} \\ & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\ X^{-1,-1,-1} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,-1,-1} & & \end{array}$$

où le reste de l'hypercomplexe est nul et $X^{-1,-1,-1}$ est en degré $(0, 0, 0)$.

Appendice B. Filtrations compatibles

Les définitions qui suivent ont été introduites par Morihiko Saito dans [Sai88]

Définition B.1. — Soit A un objet de la catégorie abélienne \mathcal{C} et $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ des sous-objets de A . On dit que A_1, \dots, A_n sont des *sous-objets compatibles* de A si il existe un n -hypercomplexe X satisfaisant à :

1. $X^{\mathbf{k}} = 0$ si $\mathbf{k} \notin \{-1, 0, 1\}^n$.
2. $X^{\mathbf{0}} = A$.
3. $X^{0-1_i} = A_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
4. Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $\mathbf{k} \in \{-1, 0, 1\}^n$ tel que $k_i = 0$, la suite

$$0 \rightarrow X^{\mathbf{k}-1_i} \rightarrow X^{\mathbf{k}} \rightarrow X^{\mathbf{k}+1_i} \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

Remarque B.2. — — En utilisant les propriétés universelles fournies par les suites exactes courtes on observe que si les sous-objets A_1, \dots, A_n sont compatibles, alors le n -hypercomplexe X est déterminé de manière unique. Par exemple si $\mathbf{k} \in \{-1, 0\}^n$ et si $I = \{i; k_i = -1\} \subset \{1, \dots, n\}$ alors

$$X^{\mathbf{k}} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

— Si $n = 1$, le complexe X est la suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow A/A_1 \rightarrow 0.$$

— Si $n = 2$ deux sous-objets A_1 et A_2 sont toujours compatibles et X est le complexe double suivant

$$\begin{array}{ccccc} A_1/(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & A/A_2 & \longrightarrow & A/(A_1 + A_2) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/A_1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_1 \cap A_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_2/(A_1 \cap A_2). \end{array}$$

— Si $n \geq 3$ des sous-objets A_1, \dots, A_n ne sont pas compatibles en général.

— Par définition si $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ sont compatibles alors pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ les sous-objets $(A_i)_{i \in I} \subseteq A$ sont compatibles et l'hypercomplexe correspondant est le $\#I$ -hypercomplexe X_I dont les objets sont les $X^{\mathbf{k}}$ tels que $k_i = 0$ pour tout $i \in I^c$.

Définition B.3. — Soient $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$ des filtrations croissantes indexées par \mathbb{Z} d'un objet A , on dit que ces filtrations sont *compatibles* si pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^n$ les sous-objets $F_{\ell_1}^1, \dots, F_{\ell_n}^n$ de A sont compatibles.

Remarque B.4. — — D’après la remarque précédente toute sous famille d’une famille de filtrations compatibles est compatible.

— On peut montrer que si $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$ sont compatibles alors pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ les filtrations induites par $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^{n-1}$ sur $\mathrm{gr}_{\ell}^{F_n}$ sont compatibles.

— Si $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$ sont compatibles alors les filtrations induites sur $F_{\ell_1}^1 \cap \dots \cap F_{\ell_n}^n$ sont compatibles.

La proposition suivante correspond à [Sai88, corollaire 1.2.13]

Proposition B.5. — Soit $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$ des filtrations compatibles d’un objet A . L’objet obtenu en appliquant successivement les gradués $\mathrm{gr}_{\ell_{\sigma(j)}}^{F_{\sigma(j)}}$ par rapport aux filtrations $F_{\sigma(j)}$ induites sur $\mathrm{gr}_{\ell_{\sigma(j-1)}}^{F_{\sigma(j-1)}} \dots \mathrm{gr}_{\ell_{\sigma(1)}}^{F_{\sigma(1)}} A$ pour $1 \leq j \leq n$ ne dépend pas de la permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ et est égal à

$$\frac{F_{\ell_1}^1 A \cap \dots \cap F_{\ell_n}^n A}{\sum_j F_{\ell_1}^1 A \cap \dots \cap F_{\ell_{j-1}}^1 A \cap \dots \cap F_{\ell_n}^n A}$$

Références

- [Del73] P. DELIGNE – « Cohomologie à supports propres (exposé XVII) », in *SGA 4*, Lect. Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, 1973, p. 252–480.
- [Kas83] M. KASHIWARA – « Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations », in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lect. Notes in Math., vol. 1016, Springer-Verlag, 1983, p. 134–142.
- [KS94] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, Corrected reprint of the 1990 original.
- [Lip75] J. LIPMAN – « Introduction to resolution of singularities », in *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, p. 187–230.
- [Mai13] P. MAISONOBE – « Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente », *J. Singul.* **7** (2013), p. 157–189.
- [Mal83] B. MALGRANGE – « Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence », in *Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 243–267.
- [MM04] P. MAISONOBE & Z. MEBKHOUT – « Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 311–389.
- [Sai88] M. SAITO – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24** (1988), no. 6, p. 849–995 (1989).