



**HAL**  
open science

# THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES CYCLES PROCHES PAR UN MORPHISME SANS PENTE

Matthieu Kochersperger

► **To cite this version:**

Matthieu Kochersperger. THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES CYCLES PROCHES PAR UN MORPHISME SANS PENTE . 2016. hal-01419725v1

**HAL Id: hal-01419725**

**<https://hal.science/hal-01419725v1>**

Preprint submitted on 19 Dec 2016 (v1), last revised 8 Jun 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES CYCLES PROCHES PAR UN MORPHISME SANS PENTE

par

Matthieu Kochersperger

---

**Résumé.** — Le but de cet article est de démontrer le théorème de comparaison entre les cycles proches algébriques et topologiques associés à un morphisme sans pente. Nous obtenons en particulier que dans le cas d'une famille de fonctions holomorphes sans pente, l'itération des isomorphismes de comparaison des cycles proches associés à chacune de ces fonctions ne dépend pas de l'ordre d'itération.

**Abstract (Comparison theorem for nearby cycles of a morphism without slopes)**

The goal of this article is to prove the comparison theorem between algebraic and topological nearby cycles of a morphism without slopes. We prove in particular that for a family of holomorphic functions without slopes, if we iterate comparison isomorphisms for nearby cycles of each function the result is independent of the order of iteration.

## Table des matières

1. Introduction.....	1
2. $V$ -multifiltration canonique et foncteurs cycles proches.....	2
3. Morphisme de comparaison.....	10
Appendice A. Hypercomplexes.....	14
Appendice B. Filtrations compatibles.....	16
Références.....	17

## 1. Introduction

**1.1. Théorème de comparaison pour une fonction.** — Soit  $X$  une variété analytique complexe et  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Soit  $(\mathcal{F}, \mathcal{M})$  la donnée d'un faisceau pervers sur  $X$  et d'un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome régulier associés par la correspondance de Riemann-Hilbert, c'est-à-dire  $\mathcal{F} = \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})$ . Le foncteur *cycles proches topologiques* de P. Deligne  $\Psi_f$  associe à  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers à support  $f^{-1}(0)$  muni d'un automorphisme de monodromie. Prolongeant une construction de B. Malgrange [Mal83], M. Kashiwara introduit dans [Kas83] le foncteur *cycles proches algébriques*  $\Psi_f^{\text{alg}}$  (voir aussi [MM04]) qui associe à  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome régulier à support  $f^{-1}(0)$  muni d'un automorphisme de monodromie. Ces deux foncteurs sont reliés par un isomorphisme de comparaison qui commute à la monodromie :

$$(1) \quad \Psi_f(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{DR}_X \Psi_f^{\text{alg}}(\mathcal{M}).$$

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 32S40.

*Mots clefs.* — Monodromie, cycles proches, modules multispécialisables, morphismes sans pente,  $V$ -multifiltration, théorème de comparaison.

**1.2. Théorème de comparaison pour plusieurs fonctions.** — Soit maintenant  $p \geq 2$  et  $f_1, \dots, f_p$  des fonctions holomorphes sur  $X$ . Notons  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p) : X \rightarrow \mathbb{C}^p$  le morphisme associé. En général, les foncteurs  $\Psi_{f_i}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ne commutent pas entre eux, de même que les foncteurs  $\Psi_{f_i}^{\text{alg}}$ .

Dans [Mai13] P. Maisonobe montre que sous la condition *sans pente* pour le couple  $(\mathbf{f}, \text{car}(\mathcal{F}))$  on peut définir les foncteurs cycles proches topologiques et algébriques associés à  $\mathbf{f}$ . Il montre alors l'existence d'isomorphismes

$$\Psi_{\mathbf{f}}\mathcal{F} \simeq \Psi_{f_{\sigma(1)}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}}\mathcal{F}$$

et

$$\Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}}\mathcal{M} \simeq \Psi_{f_{\sigma(1)}}^{\text{alg}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}}^{\text{alg}}\mathcal{M}$$

pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, p\}$ . Ceci assure la commutativité des foncteurs cycles proches associés aux fonctions  $f_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

D'autre part, par itération de l'isomorphisme (1), on obtient pour tout  $\sigma$  des isomorphismes de comparaison

$$(2) \quad \Psi_{f_{\sigma(1)}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}}(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{DR}_X \Psi_{f_{\sigma(1)}}^{\text{alg}} \dots \Psi_{f_{\sigma(p)}}^{\text{alg}}(\mathcal{M}).$$

Dans cet article, nous montrerons (corollaire 3.6) que cet isomorphisme ne dépend pas de la permutation  $\sigma$ . Pour ce faire, nous exhibons un morphisme de comparaison entre  $\Psi_{\mathbf{f}}\mathcal{F}$  et  $\mathbf{DR}_X \Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}}\mathcal{M}$  et nous montrons qu'il coïncide avec les isomorphismes de comparaison itérés 2 pour toute permutation  $\sigma$ .

**1.3. Un exemples de morphisme sans pente.** — Un exemple de morphisme sans pente est donné par les singularités quasi-ordinaires. On appelle ainsi les espaces analytiques admettant une projection finie sur  $\mathbb{C}^p$  dont le lieu de ramification est contenu dans un diviseur à croisements normaux. Si  $S$  est une hypersurface de  $\mathbb{C}^n$  à singularité quasi-ordinaire définie par une fonction holomorphe  $f$ , il existe une projection  $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  quasi-ordinaire pour  $S$ . Le faisceau  $\Psi_f \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^n}$  est pervers et dans cette situation le couple  $(\pi, \text{car}(\Psi_f \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}^n}))$  est sans pente.

Les singularités quasi-ordinaires apparaissent en particulier dans la méthode de Jung de résolution des surfaces singulières. Soit  $S$  une surface éventuellement singulière, cette méthode consiste à trouver un morphisme fini de  $S$  dans  $\mathbb{C}^2$  puis à résoudre les singularités du lieu de ramification de ce morphisme (par normalisation par exemple). On est alors ramené, localement sur la base, à l'étude de singularités quasi-ordinaires (voir [Lip75]).

## 2. $V$ -multifiltration canonique et foncteurs cycles proches

Dans cette section on définit les cycles proches algébriques à l'aide de la  $V$ -multifiltration canonique d'un  $\mathcal{D}_X$ -module sans pente. On démontre des propriétés de cette multifiltration ainsi que de ses gradués. On définit ensuite les cycles proches topologiques associés à plusieurs fonctions. Enfin on introduit les fonctions de classe de Nilsson à plusieurs variables et on en montre des propriétés utilisées dans la section suivante pour établir un lien entre cycles proches algébriques et cycles proches topologiques.

**2.1.  $V$ -multifiltration canonique d'un  $\mathcal{D}_X$ -module sans pente.** — On notera dans la suite

- $\partial_i := \partial_{t_i}$
- $E_i := t_i \partial_i$
- $\mathbf{1}_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  où le 1 est en position  $i$ .
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$
- $\boldsymbol{\alpha}_I := (\alpha_i)_{i \in I}$  pour  $I \subset \{1, \dots, p\}$
- $\mathbf{t} := t_1 \dots t_p$
- $\mathbf{t}^{\mathbf{s}} := t_1^{s_1} \dots t_p^{s_p}$
- $\mathcal{D}_X[\mathbf{s}] := \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$
- $\mathbf{H} = \{H_1, \dots, H_p\}$  où les  $H_i$  sont des hypersurfaces lisses dont la réunion définit un diviseur à croisements normaux. On se place ici dans le cas où il existe localement des coordonnées  $(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p)$  telles que

$$\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{C}^p \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) & \mapsto & (t_1, \dots, t_p) \end{array}$$

et  $H_i = f_i^{-1}(0)$ .

Lorsque des inégalités entre nombres complexes apparaîtront, l'ordre considéré sera toujours l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire

$$x + iy \leq a + ib \iff x < a \text{ ou } (x = a \text{ et } y \leq b).$$

En suivant [Mai13] on commence par donner les conditions pour qu'un couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente puis on définit la  $V$ -multifiltration de Malgrange-Kashiwara.

**Définition 2.1.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent

1. On dit que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est *multispécialisable sans pente* si au voisinage de tout point de  $X$ , il existe une bonne  $V$ -multifiltration  $U_\bullet(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  et des polynômes  $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$  pour tout  $1 \leq i \leq p$  tels que pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$ ,  $b_i(E_i + k_i)U_{\mathbf{k}}\mathcal{M} \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$ .
2. On dit que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est *multispécialisable sans pente par section* si, pour toute section locale  $m$  de  $\mathcal{M}$ , il existe des polynômes  $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$  pour tout  $1 \leq i \leq p$  tels que  $b_i(E_i)m \in V_{\mathbf{0}-\mathbf{1}_i}\mathcal{D}_X \cdot m$ .

Rappelons la proposition 1. de [Mai13] :

**Proposition 2.2.** — *Les deux définitions précédentes sont équivalentes et si la première est satisfaite pour une bonne  $V$ -multifiltration de  $\mathcal{M}$ , elle l'est pour toute. On dit alors que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est sans pente.*

On fixe  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent tel que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente.

**Définition 2.3.** — Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant la propriété 1. de la définition pour l'indice  $i$  est appelé *polynôme de Bernstein-Sato d'indice  $i$  de la  $V$ -multifiltration  $U_\bullet(\mathcal{M})$* , on le note  $b_{i,U_\bullet(\mathcal{M})}$ .

Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant la propriété 2. de la définition pour l'indice  $i$  est appelé *polynôme de Bernstein-Sato d'indice  $i$  de la section  $m$* , on le note  $b_{i,m}$ .

**Proposition 2.4.** — *Soit  $\sigma : (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p \rightarrow \mathbb{C}^p$  une section de la projection naturelle  $\mathbb{C}^p \rightarrow (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^p$ . Il existe une unique bonne  $V$ -multifiltration  $V_\bullet^\sigma(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  telle que pour tout  $i$  les racines de  $b_{i,V_\bullet^\sigma(\mathcal{M})}$  soient dans l'image de  $\sigma$  projetée sur la  $i$ -ème copie de  $\mathbb{C}$ .*

La démonstration de cette proposition et de la proposition 2.6 est identique à celle du théorème 1. de [Mai13].

**Définition 2.5.** — On définit la multifiltration  $V_\bullet(\mathcal{M})$  indexée par  $\mathbb{C}^p$  et vérifiant :

$$\forall x \in X, V_\alpha(\mathcal{M})_x := \{m \in \mathcal{M}_x; s_i \geq -\alpha_i - 1, \forall s_i \in b_{i,m}^{-1}(0) \text{ et } 1 \leq i \leq p\}.$$

Cette  $V$ -multifiltration est appelée  *$V$ -multifiltration canonique* ou  *$V$ -multifiltration de Malgrange-Kashiwara*.

Si on considère l'ordre partiel standard sur  $\mathbb{C}^p$

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p$$

on peut définir

$$V_{<\alpha}(\mathcal{M}) := \sum_{\beta < \alpha} V_\beta(\mathcal{M})$$

et

$$\text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) := V_\alpha(\mathcal{M})/V_{<\alpha}(\mathcal{M}).$$

Soit  $I \subset \{1, \dots, p\}$  et  $I^c$  son complémentaire, on définit

$$V_{<\alpha_I, \alpha_{I^c}}(\mathcal{M}) := \sum_{\beta_I < \alpha_I} V_{\beta_I, \alpha_{I^c}}(\mathcal{M}).$$

**Proposition 2.6.** — *On a l'égalité des  $V$ -multifiltrations  $V_{(<\alpha_I, \alpha_{I^c})+\mathbf{k}}(\mathcal{M}) = V_{\mathbf{k}}^{\sigma_{<\alpha_I, \alpha_{I^c}}}(\mathcal{M})$  où  $\sigma_{<\alpha_I, \alpha_{I^c}}$  est la section dont l'image est l'ensemble*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \in \mathbb{C}^p \text{ tel que } -\alpha_i - 1 \leq a_i < -\alpha_i \ \forall i \in I^c \\ \text{et } -\alpha_i - 1 < a_i \leq -\alpha_i \ \forall i \in I \end{array} \right\}.$$

*Il existe un ensemble fini  $A \subset [-1, 0]^p$  tel que la  $V$ -multifiltration canonique soit indexée par  $A + \mathbb{Z}^p$ . Ainsi la  $V$ -multifiltration canonique est cohérente.*

Soit  $I \subset \{1, \dots, p\}$ , comme pour les  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents, on a une notion de  $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -module sans pente le long des hypersurfaces  $\mathbf{H}_{I^c} := (H_i)_{i \in I^c}$ .

**Définition 2.7.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -module cohérent, on note  $q := \#I^c$

1. On dit que le couple  $(\mathbf{H}_{I^c}, \mathcal{M})$  est *multispécialisable sans pente* si au voisinage de tout point de  $X$ , il existe une bonne  $V$ -multifiltration  $U_\bullet(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  et des polynômes  $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$  pour tout  $i \in I^c$  tels que pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q$ ,  $b_i(E_i + k_i)U_{\mathbf{k}}\mathcal{M} \subset U_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}\mathcal{M}$ .
2. On dit que le couple  $(\mathbf{H}_{I^c}, \mathcal{M})$  est *multispécialisable sans pente par section* si, pour toute section locale  $m$  de  $\mathcal{M}$ , il existe des polynômes  $b_i(s) \in \mathbb{C}[s]$  pour tout  $i \in I^c$  tels que  $b_i(E_i)m \in V_{\mathbf{0}_{I^c-\mathbf{1}_i}}^{H_{I^c}}(V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X) \cdot m = V_{\mathbf{0}-\mathbf{1}_i} \mathcal{D}_X \cdot m$ .

**Remarque 2.8.** — Les analogues des proposition 2.2, 2.4 et 2.6 sont vraies pour les  $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -module sans pente.

**Proposition 2.9.** — Soit  $I \subset \{1, \dots, p\}$  et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent tel que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente. Alors le couple  $(\mathbf{H}_I, \mathcal{M})$  est sans pente et pour tout  $\alpha_I$  le couple  $(\mathbf{H}_{I^c}, V_{\alpha_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{M})$  est sans pente. De plus, pour  $I, J \subset \{1, \dots, p\}$  disjoints, les  $V$ -multifiltrations de Malgrange-Kashiwara satisfont à :

$$(3) \quad V_{\alpha_I, \alpha_J}^{\mathbf{H}_I \cup \mathbf{H}_J}(\mathcal{M}) = V_{\alpha_I}^{\mathbf{H}_I}(\mathcal{M}) \cap V_{\alpha_J}^{\mathbf{H}_J}(\mathcal{M}) = V_{\alpha_I}^{\mathbf{H}_I}(V_{\alpha_J}^{\mathbf{H}_J}(\mathcal{M})).$$

On a également l'analogie du corollaire 4.2-7 de [MM04]

**Proposition 2.10.** — Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  l'application  $\mathcal{M} \mapsto V_\alpha^{\mathbf{H}}(\mathcal{M})$  définit un foncteur exact de la catégorie des  $V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I} \mathcal{D}_X$ -modules sans pente le long de  $H$  vers la catégorie des  $V_0^{\mathbf{H}}(V_{\mathbf{0}_I}^{\mathbf{H}_I}) \mathcal{D}_X$ -modules.

Sachant que la  $V$ -multifiltration canonique est indexée par  $A + \mathbb{Z}^p$  avec  $A \subset [-1, 0]^p$  fini, quitte à renuméroter ces indices on peut la supposer indexée par  $\mathbb{Z}^p$  et appliquer la définition B.3 aux  $V$ -filtrations canoniques de  $\mathcal{M}$ .

La condition *sans pente* s'interprète de manière naturelle comme une condition de compatibilité des  $V$ -filtrations relatives aux différentes hypersurfaces considérées.

**Proposition 2.11.** — Si le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est sans pente alors les filtrations  $V_\bullet^{H_1}(\mathcal{M}), \dots, V_\bullet^{H_p}(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  sont compatibles au sens de la définition B.3.

*Démonstration.* — Soit  $\alpha < \beta \in \mathbb{C}^p$  et notons  $I_q := \{1, \dots, q\}$ , on va construire par récurrence sur l'entier  $p$  le  $p$ -hypercomplexe  $X_p$  correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$V_{\alpha_1}^{H_1}(V_{\beta_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}} \mathcal{M}), \dots, V_{\alpha_p}^{H_p}(V_{\beta_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}} \mathcal{M}) \subseteq V_{\beta_{I_p}}^{\mathbf{H}_{I_p}} \mathcal{M}.$$

On a vu dans la remarque B.2 que pour  $p \leq 2$  deux filtrations sont toujours compatibles. Supposons construit le  $q$ -hypercomplexe  $X_q$ . D'après la proposition 2.9 la propriété sans pente assure que les objets qui apparaissent dans  $X_q$  sont des  $V_{\mathbf{0}_{I_q}}^{\mathbf{H}_{I_q}} \mathcal{D}_X$ -modules cohérents spécialisables le long de  $H_{q+1}$ . On déduit alors de la proposition 2.10 que l'application de  $V_{\alpha_{q+1}}^{H_{q+1}}(\cdot)$  et  $V_{\beta_{q+1}}^{H_{q+1}}(\cdot)$  à de tels objets sont deux foncteurs exacts munis d'un monomorphisme de foncteurs donné par l'inclusion naturelle déduite de l'inégalité  $\alpha_{q+1} \leq \beta_{q+1}$ . On applique alors ces deux foncteurs à  $X_q$ , la fonctorialité fournit un  $(q+1)$ -hypercomplexe

$$0 \longrightarrow V_{\alpha_{q+1}}^{H_{q+1}}(X_q) \xrightarrow{i} V_{\beta_{q+1}}^{H_{q+1}}(X_q) \longrightarrow \text{Coker}(i) \longrightarrow 0.$$

C'est le  $(q+1)$ -hypercomplexe  $X_{q+1}$  voulu. L'exactitude des différentes suites courtes provient de l'exactitude des suite courtes de  $X^q$ , de l'exactitude des foncteurs  $V^{H_{q+1}}$ -filtration ainsi que de l'exactitude du foncteur  $\text{Coker}(\cdot)$  appliqué à des inclusions (lemme du serpent). On utilise également ici les identifications (3). Ceci nous donne par récurrence le  $p$ -hypercomplexe  $X_p$ . En prenant alors la limite inductive des  $p$ -hypercomplexes  $X_p$  sur  $\beta \in \mathbb{C}^p$  on obtient le  $p$ -hypercomplexe correspondant à la compatibilité des sous-objets

$$V_{\alpha_1}^{H_1}(\mathcal{M}), \dots, V_{\alpha_p}^{H_p}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Ceci étant vérifié pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^p$  la proposition est démontrée.  $\square$

La proposition B.5 fournit le corollaire suivant

**Corollaire 2.12.** — Si le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est sans pente alors l'objet obtenu en appliquant successivement les gradués  $\text{gr}_{\alpha_i}^{H_i}$  par rapport aux  $V$ -filtrations canoniques  $V_\bullet^{H_i}$  ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique ces foncteurs et est égal à  $\text{gr}_\alpha(\mathcal{M})$ .

**Définition 2.13.** — Soit  $(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p)$  un système de coordonnées locales où  $t_i = 0$  est une équation de  $H_i$ . Soit  $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}]t^{\mathbf{s}}$  le  $\mathcal{O}_X[\mathbf{s}]$ -module isomorphe à  $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}]$  par l'application  $m \mapsto mt^{\mathbf{s}}$ . Il est muni d'une structure naturelle de  $\mathcal{D}_X[\mathbf{s}]$ -module par la formule :

$$\partial_i(mt^{\mathbf{s}}) := (\partial_i m)t^{\mathbf{s}} + \left(\frac{s_i m}{t_i}\right)t^{\mathbf{s}}$$

**Lemme 2.14.** — Soit  $m$  une section locale de  $\mathcal{M}[1/t]$  et  $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $b(E_i)m \in V_{0-1_i}(\mathcal{D}_X)m$
2.  $b(-s_i - 1)mt^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}]t_i mt^{\mathbf{s}}$

*Démonstration.* — Montrons que 1 implique 2. Dans  $\mathcal{M}[1/t, \mathbf{s}]t^{\mathbf{s}}$  on a l'égalité

$$(t_i \partial_i m)t^{\mathbf{s}} = (-s_i - 1)mt^{\mathbf{s}} + \partial_i(t_i mt^{\mathbf{s}}).$$

On montre alors par récurrence que pour tout  $k$

$$((t_i \partial_i)^k m)t^{\mathbf{s}} - (-s_i - 1)^k mt^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}]t_i mt^{\mathbf{s}}.$$

On a donc pour tout polynôme  $b(s) \in \mathbb{C}[s]$

$$(b(E_i)m)t^{\mathbf{s}} - b(-s_i - 1)mt^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}]t_i mt^{\mathbf{s}}.$$

D'autre part, si  $b(E_i)m \in V_{0-1_i}(\mathcal{D}_X)m$  une récurrence permet de montrer que  $(b(E_i)m)t^{\mathbf{s}} \in \mathcal{D}_X[\mathbf{s}]t_i mt^{\mathbf{s}}$ . On a bien 1 implique 2.

Montrons que 2 implique 1. On peut montrer par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  il existe  $m_\ell \in \mathcal{M}[1/t]$  pour tout  $1 \leq \ell \leq k$  satisfaisant à :

$$(4) \quad s_i^k mt^{\mathbf{s}} = ((-\partial_i t_i)^k m)t^{\mathbf{s}} + \sum_{\ell=1}^k \partial_i^\ell(m_\ell t^{\mathbf{s}}).$$

En faisant opérer les  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_p^{\alpha_p}$  et en annulant les coefficients du polynôme en les  $s_i$  que l'on obtient, on peut montrer le résultat suivant :

$$(5) \quad \left[ \sum_{\alpha} \partial^\alpha(m_\alpha t^{\mathbf{s}}) = 0 \right] \Rightarrow [m_\alpha = 0 \quad \forall \alpha]$$

pour une somme finie sur les  $\alpha$ . Si l'on regarde plus précisément la récurrence faite dans la première partie de la démonstration on obtient

$$(b(E_i)m)t^{\mathbf{s}} - b(-s_i - 1)mt^{\mathbf{s}} \in \partial_i \mathcal{D}_X[\mathbf{s}]t_i mt^{\mathbf{s}}.$$

L'hypothèse 2 implique

$$b(-s_i - 1)mt^{\mathbf{s}} = \sum_{\alpha, k} \partial^\alpha s^k A_{\alpha, k} t_i m t^{\mathbf{s}}$$

où  $A_{\alpha, k}$  est un opérateur différentiel indépendant des  $\partial_i$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ . En utilisant l'égalité (4) on peut substituer les  $s_j$  et on obtient

$$(b(E_i)m)t^{\mathbf{s}} - \sum_{\mathbf{k}} [(-t_1 \partial_1 - 1)^{k_1} \dots (-t_p \partial_p - 1)^{k_p} A_{\mathbf{0}, \mathbf{k}} t_i m] t^{\mathbf{s}} = \sum_{\alpha > \mathbf{0}} \partial^\alpha(m_\alpha t^{\mathbf{s}})$$

avec  $m_\alpha \in \mathcal{M}[1/t]$ . En utilisant (5) et le fait que  $(-t_1 \partial_1 - 1)^{k_1} \dots (-t_p \partial_p - 1)^{k_p} A_{\mathbf{0}, \mathbf{k}} t_i \in V_{0-1_i}(\mathcal{D}_X)$  on conclut que  $b(E_i)m \in V_{0-1_i}(\mathcal{D}_X)m$ . □

**Proposition 2.15.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module tel que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente. Alors le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(*)(H_1 \cup \dots \cup H_p))$  est sans pente. De plus pour tout  $\alpha$  vérifiant  $\alpha_i < 0$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ , le morphisme naturel de  $V_{\mathbf{0}}\mathcal{D}_X$ -modules :

$$V_{\alpha}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{\alpha}(\mathcal{M}(*)(H_1 \cup \dots \cup H_p))$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* — On suppose  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  sans pente. Commençons par montrer que  $\mathcal{M}(*)(H_1 \cup \dots \cup H_p)$  est cohérent. C'est un problème local, on se place dans un système de coordonnées  $(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p)$  où  $t_i = 0$  est une équation de  $H_i$  et on doit montrer que  $\mathcal{M}[1/t]$  est cohérent. Le  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M}$  est cohérent donc engendré localement par un nombre fini de sections. De plus si  $0 \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3 \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $\mathcal{D}_X$ -modules et si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_3$  sont cohérents alors  $\mathcal{M}_2$  est cohérent. Par récurrence on peut

alors supposer que  $\mathcal{M}$  est engendré par une de ses sections que l'on note  $m$ . Soit  $m'$  l'image de  $m$  dans  $\mathcal{M}[1/\mathbf{t}]$ .

L'hypothèse sans pente sur le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  et le lemme 2.14 fournissent, pour  $1 \leq i \leq p$ , des polynômes  $b_i$  non nuls vérifiant :

$$(6) \quad b_i(s_i)mt^s \in \mathcal{D}_X[s]t_i mt^s.$$

Soit  $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{N}^p$  tel que pour tout  $k_i \in \mathbb{N}$  vérifiant  $k_i \geq k_{0,i} + 1$ , l'entier  $-k_i$  n'est pas racine de  $b_i(s_i)$ . En remplaçant les  $s_i$  par les entiers  $k_i$  dans la relation (6) et en multipliant éventuellement par des  $t_i$  on obtient que pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$

$$m' \mathbf{t}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{D}_X(m' \mathbf{t}^{-\mathbf{k}_0}).$$

De plus pour tout  $1 \leq i \leq p$ , l'égalité  $(\partial_i m') \mathbf{t}^{\mathbf{k}} = \partial_i(m' \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) + k_i m' \mathbf{t}^{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}$  montre que  $(\partial_i m') \mathbf{t}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{D}_X(m' \mathbf{t}^{-\mathbf{k}_0})$  pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p$ . On a donc  $\mathcal{M}[1/\mathbf{t}] = \mathcal{D}_X(m' \mathbf{t}^{-\mathbf{k}_0})$ . La filtration  $(\mathcal{D}_X(l)(m' \mathbf{t}^{-\mathbf{k}_0}))$  étant une bonne filtration du  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M}[1/\mathbf{t}]$ , celui-ci est cohérent.

On montre maintenant que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p)))$  est sans pente. C'est encore un problème local, soit  $m'$  une section de  $\mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p))$ , on peut supposer que  $m' = \frac{m}{\mathbf{t}^{\mathbf{k}}}$  où  $m$  est dans l'image de  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}[1/\mathbf{t}]$ . Le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  étant sans pente, pour tout  $1 \leq i \leq p$  il existe un polynôme non nul  $b_i(s_i)$  vérifiant

$$b_i(E_i)m \in V_{0-\mathbf{1}_i}(\mathcal{D}_X)m.$$

On a alors

$$\begin{aligned} b_i(E_i) \mathbf{t}^{\mathbf{k}} m' &\in V_{0-\mathbf{1}_i}(\mathcal{D}_X) \mathbf{t}^{\mathbf{k}} m' \\ \mathbf{t}^{\mathbf{k}} b_i(E_i + k_i) m' &\in V_{-k-\mathbf{1}_i}(\mathcal{D}_X) m'. \end{aligned}$$

Enfin en divisant par  $\mathbf{t}^{\mathbf{k}}$  on obtient,  $b_i(E_i + k_i) m' \in V_{0-\mathbf{1}_i}(\mathcal{D}_X) m'$ , ce qui permet de conclure que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p)))$  est sans pente.

Il reste à montrer que le morphisme naturel de  $V_0(\mathcal{D}_X)$ -module :

$$V_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow V_\alpha(\mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p)))$$

est un isomorphisme. En utilisant le raisonnement qui précède on montre que pour tout  $0 \leq k \leq p$  le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_k)))$  est sans pente. On montre le résultat par récurrence sur l'entier  $p$ . Pour  $p = 0$  c'est clair. Supposons que

$$V_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow V_\alpha(\mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1})))$$

soit un isomorphisme. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma_{[H_p]} \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1})) \rightarrow \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1})) \xrightarrow{\ell_p} \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p)) \rightarrow \text{Coker}(\ell_p) \rightarrow 0.$$

Comme  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1})))$  et  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p)))$  sont sans pente,  $(\mathbf{H}, \Gamma_{[H_p]} \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1})))$  et  $(\mathbf{H}, \text{Coker}(\ell_p))$  le sont aussi. D'autre part  $\Gamma_{[H_p]} \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1}))$  et  $\text{Coker}(\ell_p)$  sont supportés par  $H_p$ , leurs sections sont donc localement annulées par une puissance de  $t_p$ . Un calcul rapide permet alors de voir que les racines du polynôme de Bernstein-Sato d'indice  $p$  d'une de leurs sections sont des entiers strictement négatifs. Comme  $\alpha_p < 0$  on en déduit que  $V_\alpha(\Gamma_{[H_p]} \mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1}))) = V_\alpha(\text{Coker}(\ell_p)) = 0$ . La filtration  $V_\bullet$  conserve les suites exactes donc

$$V_\alpha(\mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_{p-1}))) \rightarrow V_\alpha(\mathcal{M}(* (H_1 \cup \dots \cup H_p)))$$

est un isomorphisme et la propriété en découle par récurrence.  $\square$

**2.2. Gradués d'un  $\mathcal{D}_X$ -module sans pente et cycles proches algébriques.** — Ici on démontre des propriétés des gradués de la  $V$ -multifiltration de Malgrange-Kashiwara et on définit les cycles proches algébriques.

**Proposition 2.16.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module tel que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente. Pour tout  $\beta \in \mathbb{C}$  et tout  $1 \leq i \leq p$ , l'endomorphisme  $(E_i + \beta + 1)$  de*

$$V_{\beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M}) / V_{< \beta, \alpha_{\{i\}^c}}(\mathcal{M})$$

*est nilpotent.*

*Démonstration.* — Notons  $\sigma := \sigma_{\beta, \alpha_{\{i\}^c}}$  et  $b_i(s)$  le polynôme de Bernstein-Sato d'indice  $i$  de la multifiltration correspondant à la section  $\sigma$ . Les racines de  $b_i$  sont donc dans l'intervalle  $[-\beta - 1, -\beta]$ . Soit  $\ell$  la multiplicité de la racine  $-\beta - 1$  de  $b_i$ . On pose  $b_i(s) = b'_i(s)(s + \beta + 1)^\ell$ . On considère la  $V$ -filtration de  $\mathcal{M}$  suivante :

$$U_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) := V_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i}^\sigma(\mathcal{M}) + (E_i + k_i + \beta + 1)^\ell V_{\mathbf{k}}^\sigma(\mathcal{M}).$$

On peut montrer que c'est une bonne  $V$ -filtration, que ses polynômes de Bernstein-Sato d'indice  $j \neq i$  divisent ceux de  $V_{\bullet}^{\sigma}$  et que son polynôme de Bernstein-Sato d'indice  $i$  divise  $b'(s)(s + \beta)^{\ell}$ . Les racines de  $b'(s)(s + \beta)^{\ell}$  sont dans  $] -\beta - 1, -\beta]$ , par unicité la multifiltration  $U_{\bullet}(\mathcal{M})$  est égale à la multifiltration  $V_{\bullet}^{\tilde{\sigma}}(\mathcal{M})$  où  $\tilde{\sigma} = \sigma_{<\beta, \alpha_{\{i\}c}}$ . On a donc  $U_0(\mathcal{M}) = V_{<\beta, \alpha_{\{i\}c}}(\mathcal{M})$  et on en déduit que  $(E_i + \beta + 1)^{\ell}$  annule

$$V_{\beta, \alpha_{\{i\}c}}(\mathcal{M})/V_{<\beta, \alpha_{\{i\}c}}(\mathcal{M}).$$

□

Étant donnée la définition de  $\text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M})$  on déduit immédiatement de cette proposition le corollaire suivant :

**Corollaire 2.17.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module tel que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^p$  et tout  $1 \leq i \leq p$ , l'endomorphisme  $(E_i + \alpha_i + 1)$  de  $\text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M})$  est nilpotent.

**Définition 2.18.** — On définit les cycles proches algébrique de  $\mathcal{M}$  relatifs à la famille d'hypersurfaces  $\mathbf{H}$  de la manière suivante

$$\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M} := \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \text{gr}_{\alpha}(\mathcal{M}).$$

C'est un  $\text{gr}_0^V \mathcal{D}_X$ -modules cohérent. Or, si l'on note  $X_0 := \bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i$ , on a  $\text{gr}_0^V \mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_{X_0}[E_1, \dots, E_p]$ . Le corollaire 2.16 implique ainsi que  $\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_{X_0}$ -module cohérent. Les cycles proches algébriques sont munis d'endomorphismes de monodromie pour  $1 \leq i \leq p$

$$T_i := \exp(-2i\pi E_i).$$

La proposition suivante est une conséquence du corollaire 2.12

**Proposition 2.19.** — Soit  $I \subset \{1, \dots, p\}$ , on a alors un morphisme naturel de  $\text{gr}_0^V \mathcal{D}_X$ -modules

$$\Psi_{\mathbf{H}}\mathcal{M} \rightarrow \Psi_{\mathbf{H}_I}(\Psi_{\mathbf{H}_I^c}\mathcal{M})$$

qui est un isomorphisme si le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est sans pente.

Dans le cas général  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{C}^p$ , l'inclusion du graphe de  $\mathbf{f}$  permet de définir les cycles proches algébriques.

**Définition 2.20.** — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_{\mathbf{f}}} & X \times \mathbb{C}^p \\ & \searrow \mathbf{f} & \downarrow \pi = (\pi_1, \dots, \pi_p) \\ & & \mathbb{C}^p \end{array} .$$

où  $i_{\mathbf{f}}$  est le graphe de  $\mathbf{f}$ . Soit  $H_i := \pi_i^{-1}(0)$ . D'après ce qui précède, si le couple  $(\mathbf{H}, i_{\mathbf{f}+}\mathcal{M})$  est sans pente, alors  $\Psi_{\mathbf{H}}i_{\mathbf{f}+}\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_{X \times 0}$ -module cohérent à support  $\{(\mathbf{x}, 0) | \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}$ . On peut le voir comme un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent à support  $\mathbf{f}^{-1}(0)$ , on le note alors  $\Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}}\mathcal{M}$ .

On déduit de la proposition 2.19 l'isomorphisme

$$\Psi_{\mathbf{f}}^{\text{alg}}\mathcal{M} \rightarrow \Psi_{\mathbf{f}_I}^{\text{alg}}(\Psi_{\mathbf{f}_I^c}^{\text{alg}}\mathcal{M}).$$

**2.3. Cycles proches topologiques.** — Ici on définit le foncteur cycles proches topologiques associé à une fonction de  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$  et appliqué à la catégorie des complexes de faisceaux à cohomologie  $\mathbb{C}$ -constructible.

**Définition 2.21.** — Considérons le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* & \xleftarrow{p} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f|_{X^*} & & \downarrow \tilde{f} \\ \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^p & \xleftarrow{j} & (\mathbb{C}^*)^p & \xleftarrow{p} & \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \end{array}$$

Ici  $X^* = X - F^{-1}(0)$  avec  $F = f_1 \dots f_p$  et  $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p}$  est le revêtement universel de  $(\mathbb{C}^*)^p$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un complexe de faisceaux à cohomologie  $\mathbb{C}$ -constructible, on définit :

$$\Psi_{\mathbf{f}}\mathcal{F} := i^{-1} \mathbf{R}j_* p_* p^{-1} j^{-1} \mathcal{F}$$

c'est le foncteur cycles proches. On peut identifier le morphisme  $\widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^p$  à

$$\begin{aligned} \exp : \quad \mathbb{C}^p &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^p \\ (z_1, \dots, z_p) &\mapsto (e^{2i\pi z_1}, \dots, e^{2i\pi z_p}). \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq i \leq p$  les translations

$$\begin{aligned} \tau_i : \quad \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} &\rightarrow \widetilde{(\mathbb{C}^*)^p} \\ (z_1, \dots, z_i, \dots, z_p) &\mapsto (z_1, \dots, z_i + 2i\pi, \dots, z_p). \end{aligned}$$

permettent d'induire des endomorphismes de monodromie  $T_i : \Psi_f \mathcal{F} \rightarrow \Psi_f \mathcal{F}$ .

Supposons que les  $f_i$  définissent un diviseur à croisements normaux  $\mathbf{H}$  où  $H_i = \{f_i = 0\}$  et que  $\mathcal{F} = \mathbf{DR}(\mathcal{M})$ . Dans [Mai13] Ph. Maisonobe démontre la proposition suivante

**Proposition 2.22.** — Soit  $I \subset \{1, \dots, p\}$ , il existe un morphisme naturel

$$(7) \quad \Psi_f \mathcal{F} \rightarrow \Psi_{f_I}(\Psi_{f_{I^c}} \mathcal{F}).$$

De plus si le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est sans pente alors ce morphisme est un isomorphisme.

**2.4. Fonctions de classe de Nilsson.** — On se place ici dans le cas d'une famille d'hypersurfaces qui forment un diviseur à croisements normaux, quitte à diminuer  $X$ , on suppose qu'il existe un système de coordonnées  $(\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p)$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq p$ , l'hypersurface  $H_i$  ait pour équation  $t_i = 0$ . On note

$$\begin{aligned} \pi : \quad X &\rightarrow \mathbb{C}^p \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) &\mapsto (t_1, \dots, t_p). \end{aligned}$$

**Définition 2.23.** — Soit  $\alpha \in [-1, 0]^p$  et  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$ . On note  $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}$  la connexion méromorphe sur  $\mathbb{C}^p$  :

$$\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}} = \bigoplus_{0 \leq \ell \leq \mathbf{k}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p} \left[ \frac{1}{z_1 \dots z_p} \right] e_{\alpha, \ell}$$

avec la structure de  $\mathcal{D}$ -module donnée par la formule

$$z_i \partial_{z_i} e_{\alpha, \ell} = (\alpha_i + 1) e_{\alpha, \ell} + e_{\alpha, \ell - \mathbf{1}_i}$$

On définit  $T_i$  le morphisme de monodromie d'indice  $i$  par la formule

$$T_i e_{\alpha, \ell} = \exp(2i\pi(\alpha_i + 1)) \sum_{0 \leq m \leq \ell_i} \frac{(2i\pi)^m}{m!} e_{\alpha, \ell - m \cdot \mathbf{1}_i}.$$

**Remarque 2.24.** — Pour se souvenir de la structure de  $\mathcal{D}$ -module et de la monodromie il faut remarquer que la section  $e_{\alpha, \ell}$  se comporte comme la fonction multiforme  $\mathbf{z}^{\alpha+1} \log^{\ell_1} z_1 \dots \log^{\ell_p} z_p$ .

**Définition 2.25.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module tel que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente, on définit :

$$\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} = \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \mathcal{M} \left[ \frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}).$$

D'autre part on a

$$\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi^+(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}})$$

où  $\pi^+$  est l'image inverse dans la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules. Ceci permet de munir  $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$  d'une structure naturelle de  $\mathcal{D}_X$ -module. Notons  $Y := \bigcap_{1 \leq i \leq p} H_i$ , la restriction de  $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$  à  $Y$  est munie d'endomorphismes

$T_i$  induits par les morphismes de monodromie de  $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}$  et définis par :

$$T_i(m \otimes e_{\alpha, \ell}) = m \otimes T_i e_{\alpha, \ell}.$$

**Proposition 2.26.** — Soit  $\alpha \in [-1, 0]^p$  et  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$  et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module tel que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente. Alors le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$  est sans pente. De plus, pour tout  $\beta \in \mathbb{C}^p$ , on a :

$$V_{\beta}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \bigoplus_{0 \leq \ell \leq \mathbf{k}} V_{\alpha+\beta+1} \left( \mathcal{M} \left[ \frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) e_{\alpha, \ell}.$$

*Démonstration.* — On commence par montrer que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}})$  est sans pente. Quelque soit  $1 \leq i \leq p$ , le  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^p}$ -module  $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}} / \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k} - \mathbf{1}_i}$  s'identifie à  $\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k} - k_i \cdot \mathbf{1}_i}$ . On a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k} - \mathbf{1}_i} \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k} - k_i \cdot \mathbf{1}_i} \rightarrow 0.$$

Pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$  le  $\pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}$ -module  $\pi^{-1} \mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}$  est à fibres plates car libres, il est donc acyclique pour le foncteur de produit tensoriel par  $\mathcal{M} \left[ \frac{1}{t_1 \dots t_p} \right]$  et on a la suite exacte :

$$(8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k} - \mathbf{1}_i} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k} - k_i \cdot \mathbf{1}_i} \rightarrow 0.$$

Le module central est sans pente si et seulement si les deux autres modules le sont. En effet, comme dans le cas des bonnes  $V$ -filtration pour  $p = 1$  (cf [MM04]), une bonne  $V$ -multifiltration du terme central induit des bonnes  $V$ -multifiltration des termes extrêmes. On considère alors la suite exacte

$$0 \rightarrow U_\ell \mathcal{M}_{\alpha, k-1_i} \rightarrow U_\ell \mathcal{M}_{\alpha, k} \rightarrow U_\ell \mathcal{M}_{\alpha, k-k_i \cdot 1_i} \rightarrow 0$$

et on observe que la condition multispécialisable sans pente de la définition 2.1 est satisfaite pour le module central si et seulement si elle l'est pour les deux autres modules. Par récurrence on est alors ramené à montrer que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, 0})$  est sans pente. Soit  $m$  une section locale de  $\mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}]$ . D'après la proposition 2.15 le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}])$  est sans pente et par conséquent le lemme 2.14 fournit localement, pour  $1 \leq i \leq p$ , des polynômes  $b_i$  non nuls vérifiant :

$$b_i(s_i) m t^s \in \mathcal{D}_X[s] t_i m t^s.$$

Par définition du  $\mathcal{D}_X[s]$ -module  $\mathcal{M}[1/t, s] t^s$ , on obtient les équations :

$$(9) \quad b_i(s_i + \alpha_i + 1) (m \otimes t^{\alpha+1}) t^s \in \mathcal{D}_X[s] t_i (m \otimes t^{\alpha+1}) t^s.$$

Comme les  $m \otimes t^{\alpha+1}$  engendrent  $\mathcal{M}_{\alpha, 0}$  on peut suivre le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration de la proposition 2.15 pour montrer que  $\mathcal{M}_{\alpha, 0}$  est cohérent. Les équations (9) ainsi que le lemme 2.14 permettent alors de conclure que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, 0})$  est sans pente et donc par ce qui précède que  $(\mathbf{H}, \mathcal{M}_{\alpha, k})$  l'est.

Pour démontrer la deuxième partie de la proposition on commence par noter

$$U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, k}) := \bigoplus_{0 \leq \ell \leq k} V_{\alpha+\beta+1} \left( \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}] \right) e_{\alpha, \ell}$$

et on va montrer que c'est une bonne  $V$ -multifiltration qui satisfait à toutes les propriétés caractéristiques de la multifiltration de Malgrange-Kashiwara. Soit  $m \in \mathcal{M}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}^p$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$  et  $1 \leq i \leq p$ . On a localement

$$(10) \quad (t_i \partial_i + \beta) (m \otimes e_{\alpha, \ell}) = ((t_i \partial_i + \beta + \alpha_i + 1) m) \otimes e_{\alpha, \ell} + m \otimes e_{\alpha, \ell-1_i}$$

et pour tout  $n \in \mathbb{Z}^p$

$$t^n (m \otimes e_{\alpha, \ell}) = (t^n m) \otimes e_{\alpha, \ell}.$$

Ceci permet de montrer que  $U_\bullet(\mathcal{M}_{\alpha, k})$  est une  $V$ -multifiltration de  $\mathcal{M}_{\alpha, k}$  (c'est-à-dire que cette multifiltration vérifie  $V_\ell \mathcal{D}_X \cdot U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, k}) \subset U_{\beta+\ell}(\mathcal{M}_{\alpha, k})$  pour tout  $\beta \in \mathbb{C}^p$  et pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}^p$ ).

Pour montrer que c'est une bonne  $V$ -multifiltration on fixe  $\beta \in \mathbb{C}^p$  et on montre que la  $V$ -multifiltration indexée par  $\mathbb{Z}^p$ ,  $U_{\beta+\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, k})$ , est une bonne  $V$ -multifiltration de  $\mathcal{M}_{\alpha, k}$ . Comme la  $V$ -multifiltration indexée par  $\mathbb{Z}^p$ ,  $V_{\alpha+\beta+\bullet+1} \left( \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}] \right)$ , est une bonne  $V$ -multifiltration elle est engendrée localement par un nombre fini de sections  $\{m_j\}_{j \in J}$ . Si  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  l'égalité (10) permet de montrer que les sections  $\{m_j \otimes e_{\alpha, \mathbf{0}}\}_{j \in J}$  engendrent la  $V$ -multifiltration  $U_{\beta+\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, 0})$ . On peut alors montrer par récurrence, en considérant la suite exacte (8) et l'égalité (10), que pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$  les sections  $m_j \otimes e_{\alpha, \ell}$ , pour  $j \in J$  et  $0 \leq \ell \leq \mathbf{k}$ , engendrent la  $V$ -multifiltration  $U_{\beta+\bullet}(\mathcal{M}_{\alpha, k})$  c'est donc une bonne  $V$ -multifiltration de  $\mathcal{M}_{\alpha, k}$ .

On fixe maintenant  $\beta \in \mathbb{C}^p$  et on va construire, pour tout  $1 \leq i \leq p$ , un polynôme  $b_i(s)$  qui vérifie

$$b_i(t_i \partial_i) U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, k}) \subset U_{\beta-1_i}(\mathcal{M}_{\alpha, k}).$$

Par définition de la multifiltration de Malgrange-Kashiwara on peut choisir, pour tout  $1 \leq i \leq p$ , un polynôme  $c_i(s)$  vérifiant

$$c_i(t_i \partial_i + \alpha_i + \beta_i + 1) V_{\alpha+\beta+1} \left( \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}] \right) \subset V_{\alpha+\beta+1-1_i} \left( \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}] \right)$$

et ayant ses racines dans l'intervalle  $[-1, 0[$ . Soit  $m \in V_{\alpha+\beta+1} \left( \mathcal{M}[\frac{1}{t_1 \dots t_p}] \right)$ , l'égalité (10) permet de montrer que

$$c_i(t_i \partial_i + \beta_i) (m \otimes e_{\alpha, \ell}) = (c_i(t_i \partial_i + \beta_i + \alpha_i + 1) m) \otimes e_{\alpha, \ell} + \tilde{m}$$

où  $\tilde{m} \in U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, k-1_i})$  si on pose  $U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, \ell}) = 0$  pour  $\ell_i < 0$ . On peut donc construire par récurrence un polynôme  $b_{i,m}(s)$  ayant ses racines dans l'intervalle  $[-1, 0[$  et vérifiant

$$b_{i,m}(t_i \partial_i + \beta_i) (m \otimes e_{\alpha, \ell}) \in U_{\beta-1_i}(\mathcal{M}_{\alpha, k}).$$

Comme  $U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, k})$  est localement engendré par un nombre fini de sections de la forme  $m \otimes e_{\alpha, \ell}$  pour  $0 \leq \ell \leq \mathbf{k}$  on peut construire  $b_i(s)$  ayant ses racines dans  $[-1, 0[$  tel que

$$b_i(t_i \partial_i + \beta_i) U_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, k}) \subset U_{\beta-1_i}(\mathcal{M}_{\alpha, k}).$$

Les racines du polynôme de Bernstein-Sato de la  $V$ -multifiltration  $U_\bullet(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}-1_i})$  sont donc dans l'intervalle  $[-1, 0[$ , ce qui permet de conclure que c'est bien la  $V$ -multifiltration de Malgrange-Kashiwara :

$$V_\beta(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \bigoplus_{0 \leq \ell \leq \mathbf{k}} V_{\alpha+\beta+1} \left( \mathcal{M} \left[ \frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) e_{\alpha, \ell}.$$

□

### 3. Morphisme de comparaison

On va construire un morphisme de comparaison entre les cycles proches algébriques de  $\mathcal{M}$  et les cycles proches topologiques de  $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$  relativement à l'application

$$\begin{aligned} \pi : \quad X &\rightarrow \mathbb{C}^p \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) &\mapsto (t_1, \dots, t_p). \end{aligned}$$

On établira le lien avec la composition du morphisme de comparaison relatif aux  $r$  premières coordonnées  $t_i$  et de celui relatif aux  $p-r$  coordonnées  $t_i$  suivantes pour  $1 < r < p$ .

**3.1. Comparaison avec les gradués.** — Commençons par donner deux définitions.

*Définition 3.1.* — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module tel que le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  soit sans pente. On considère la famille  $\{\mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leq i \leq p}$  composée des objets  $\mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M})$  pour  $\mathbf{k} \in \{0,1\}^p$  et des morphismes  $\partial_i : \mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathrm{gr}_{\mathbf{k}+1_i}(\mathcal{M})$ . On définit

$$i^\dagger \mathcal{M} := s(\mathrm{Cube}(\mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{M})))|_{X_0}$$

où  $s(\cdot)$  et  $\mathrm{Cube}(\cdot)$  sont les foncteurs définis dans l'appendice A.2 et A.5 et  $X_0 = \pi^{-1}(0)$ .

Par exemple pour  $p = 2$  on a

$$\begin{aligned} i^\dagger \mathcal{M} = 0 \rightarrow \mathrm{gr}_{-1,-1}(\mathcal{M})|_{X_0} &\rightarrow \mathrm{gr}_{0,-1}(\mathcal{M})|_{X_0} \oplus \mathrm{gr}_{-1,0}(\mathcal{M})|_{X_0} \rightarrow \mathrm{gr}_{0,0}(\mathcal{M})|_{X_0} \rightarrow 0 \\ m &\mapsto (\partial_1 m, -\partial_2 m) \\ &\mapsto (m_1, m_2) \mapsto \partial_2 m_1 + \partial_1 m_2 \quad . \end{aligned}$$

*Définition 3.2.* — De la même manière que pour la définition précédente on considère la famille  $\{V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}), \partial_i\}_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leq i \leq p}$  composée des objets  $V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M})$  pour  $\mathbf{k} \in \{0,1\}^p$  et des morphismes  $\partial_i : V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{\mathbf{k}+1_i}(\mathcal{M})$ . On définit

$$i^\# \mathcal{M} := s(\mathrm{Cube}(V_\bullet(\mathcal{M})))|_{X_0}$$

où  $X_0 = \pi^{-1}(0)$ .

*Remarque 3.3.* — 1. Notons que si on considère la famille  $\mathcal{M} := \{\mathcal{M}, \partial_i\}_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^p, 1 \leq i \leq p}$  on a

$$s(\mathrm{Cube}(\mathcal{M}))|_{X_0} \simeq \mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})|_{X_0}$$

où l'on considère la projection

$$\begin{aligned} \tau : \quad X &\rightarrow X_0 \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) &\mapsto (\mathbf{x}, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

2. On étend ces définitions aux complexes en commençant par appliquer  $\mathrm{Cube}(\cdot)$  en chaque degré puis en prenant le complexe simple associé à l'hypercomplexe obtenu. On note encore  $i^\#$  et  $i^\dagger$  ces foncteurs appliqués aux complexes.

D'après la remarque précédente les morphismes naturels pour tout  $\mathbf{k} \in \{0,1\}^p$

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \leftarrow V_{\mathbf{k}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

induisent les morphismes de complexes

$$(11) \quad \boxed{i^\dagger \mathcal{M} \leftarrow i^\# \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})}$$

où l'on omet de noter la restriction de  $\mathbf{DR}_{X/X_0}(\mathcal{M})$  à  $X_0$ . Soit  $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$  les  $r$  premiers entiers pour  $r < p$ , on note

$$\begin{aligned} \pi_I : \quad X &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ (\mathbf{x}, t_1, \dots, t_p) &\mapsto (t_1, \dots, t_r) \end{aligned}$$

et  $X_0^I := \pi_I^{-1}(0)$ . On note  $V_\bullet^I$  la  $V$ -multifiltration par rapport aux fonctions  $t_1, \dots, t_r$ . La  $V$ -multifiltration de Malgrange-Kashiwara de  $\mathcal{M}$  induit une  $V^{I^c}$ -multifiltration du  $\mathcal{D}_{X_0^I}$ -module  $\text{gr}_{\alpha_I}^I(\mathcal{M})$  pour tout  $\alpha_I \in \mathbb{C}^r$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^p$  on a le diagramme commutatif suivant

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \text{gr}_\alpha \mathcal{M} & \longleftarrow & V_\alpha \mathcal{M} \\ \downarrow & & \parallel \\ \text{gr}_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(\text{gr}_{\alpha_I}^I \mathcal{M}) & \longleftarrow & V_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(\text{gr}_{\alpha_I}^I \mathcal{M}) \longleftarrow V_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(V_{\alpha_I}^I \mathcal{M}). \end{array}$$

On définit les foncteurs  $i_I^\dagger$  et  $i_I^\#$  en considérant respectivement les familles  $\{\text{gr}_{\mathbf{k}_I}(\mathcal{M}'), \partial_i\}_{\mathbf{k}_I \in \{0,1\}^r, 1 \leq i \leq r}$  et  $\{V_{\mathbf{k}_I}(\mathcal{M}'), \partial_i\}_{\mathbf{k}_I \in \{0,1\}^r, 1 \leq i \leq r}$ . On définit de manière analogue les foncteurs  $i_{I^c}^\dagger$  et  $i_{I^c}^\#$  appliqués à la catégorie des  $\mathcal{D}_{X_0^I}$ -modules en considérant la projection

$$\pi_{I^c}|_{X_0^I} : \quad \begin{array}{ccc} X_0^I & \rightarrow & \mathbb{C}^{p-r} \\ (\mathbf{x}, t_{p-r}, \dots, t_p) & \mapsto & (t_{p-r}, \dots, t_p). \end{array}$$

Les propriétés des hypercomplexes, du foncteur  $s(\cdot)$  et le diagramme commutatif (12) pour  $\alpha \in \{0,1\}^p$  fournissent le diagramme commutatif suivant

$$(13) \quad \begin{array}{ccccccc} i^\dagger \mathcal{M} & \longleftarrow & i^\# \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{DR}_{X/X_0} \mathcal{M} & & \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \\ i_{I^c}^\dagger(i_I^\dagger \mathcal{M}) & \longleftarrow & i_{I^c}^\#(i_I^\dagger \mathcal{M}) & \longleftarrow & i_{I^c}^\#(i_I^\# \mathcal{M}) & \longrightarrow & i_{I^c}^\#(\mathbf{DR}_{X/X_0^I} \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{DR}_{X_0^I/X_0}(\mathbf{DR}_{X/X_0^I} \mathcal{M}). \end{array}$$

**3.2. Le morphisme «Nils».** — D'après la proposition 2.26 on a

$$\text{gr}_{-1}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) = \bigoplus_{\mathbf{0} \leq \ell \leq \mathbf{k}} \text{gr}_\alpha \left( \mathcal{M} \left[ \frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right) e_{\alpha, \ell}.$$

La proposition 2.15 assure que pour  $\alpha \in [-1, 0]^p$  on a l'isomorphisme

$$\text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) \simeq \text{gr}_\alpha \left( \mathcal{M} \left[ \frac{1}{t_1 \dots t_p} \right] \right).$$

On définit alors le morphisme suivant

$$\Phi : \quad \begin{array}{ccc} \text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{gr}_{-1}(\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}) \\ m & \longmapsto & \sum_{\mathbf{0} \leq \ell \leq \mathbf{k}} (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_p} (t_1 \partial_1 + \alpha_1 + 1)^{\ell_1} \dots (t_p \partial_p + \alpha_p + 1)^{\ell_p} m \otimes e_{\alpha, \ell} \end{array}$$

qui induit un morphisme de complexes

$$\boxed{\text{Nils} : \text{gr}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow i^\dagger \mathcal{M}_\alpha}$$

où l'on identifie  $\text{gr}_\alpha(\mathcal{M})$  avec un complexe concentré en degré zéro et où  $\mathcal{M}_\alpha$  est la limite inductive des  $\mathcal{M}_{\alpha, \mathbf{k}}$  prise sur  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p$ . En utilisant la définition 2.23 on remarque que

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbf{k}}) \simeq \left( \mathcal{O}_X \otimes_{\pi_I^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r}} \pi_I^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha_I, \mathbf{k}_I}) \right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \left( \mathcal{O}_X \otimes_{\pi_{I^c}^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p-r}}} \pi_{I^c}^{-1}(\mathcal{N}_{\alpha_{I^c}, \mathbf{k}_{I^c}}) \right).$$

On déduit de cet isomorphisme et de la définition du morphisme  $\Phi$  le diagramme commutatif suivant

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \text{gr}_\alpha \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{Nils}} & i^\dagger \mathcal{M}_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(\text{gr}_{\alpha_I}^I \mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{gr}_{\alpha_{I^c}}^{I^c}(i_I^\dagger \mathcal{M}_{\alpha_I}) \longrightarrow i_{I^c}^\dagger \left[ (i_I^\dagger \mathcal{M}_{\alpha_I})_{\alpha_{I^c}} \right]. \end{array}$$

**3.3. Le morphisme «Topo».** — Rappelons le diagramme commutatif utilisé pour définir les cycles proches topologiques :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* & \xleftarrow{p} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi|_{X^*} & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^p & \xleftarrow{j} & (\mathbb{C}^*)^p & \xleftarrow{p} & \widehat{(\mathbb{C}^*)^p}. \end{array}$$

**Lemme 3.4.** — Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^p$ , il existe un morphisme naturel

$$\boxed{\text{Topo} : \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_\alpha) \rightarrow \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).}$$

*Démonstration.* — Par définition,  $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}} \pi^{-1}\mathcal{N}_\alpha$ , or on a une inclusion  $\mathcal{N}_\alpha \subset j_*p_*p^{-1}\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}$  dans le faisceau des fonctions holomorphes multiformes. Par functorialité on a donc le morphisme :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_\alpha) \rightarrow \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes \pi^{-1}j_*p_*p^{-1}\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^*)^p}).$$

L'adjonction des foncteurs image inverse et image directe fournit un morphisme de foncteurs  $\pi^{-1}(j \circ p)_* \rightarrow (j \circ p)_*\tilde{\pi}^{-1}$ . Ceci donne le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes \pi^{-1}j_*p_*p^{-1}\mathcal{O}) &\rightarrow \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_*p_*\tilde{\pi}^{-1}p^{-1}\mathcal{O}) \\ &= \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_*p_*p^{-1}\pi|_{X^*}^{-1}\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Par adjonction on a le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_*p_*p^{-1}\pi|_{X^*}^{-1}\mathcal{O}) &\rightarrow Rj_*j^{-1}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M} \otimes j_*p_*p^{-1}\pi|_{X^*}^{-1}\mathcal{O}) \\ &= Rj_*\mathbf{DR}_X(j^{-1}\mathcal{M} \otimes j^{-1}j_*p_*p^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}) \\ &= Rj_*\mathbf{DR}_X(j^{-1}\mathcal{M} \otimes p_*p^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}). \end{aligned}$$

On applique ensuite le morphisme (2.3.21) de [KS94] (formule de projection) à la fonction  $p$ , en considérant le fait que  $p_*$  est un foncteur exact car  $p$  est à fibres discrètes. Par functorialité on a alors le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} Rj_*\mathbf{DR}_X(j^{-1}\mathcal{M} \otimes p_*p^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}) &\rightarrow Rj_*\mathbf{DR}_X(p_*p^{-1}(j^{-1}\mathcal{M} \otimes \pi^{-1}\mathcal{O})) \\ &= Rj_*\mathbf{DR}_X(p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Sachant que  $\mathbf{DR}_X\mathcal{M} = \Omega^n \overset{\ell}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ , on peut appliquer le morphisme (2.6.21) de [KS94] à  $p$  (formule de projection) et on obtient le morphisme :

$$\begin{aligned} Rj_*\mathbf{DR}_X(p_*p^{-1}j^{-1}\mathcal{M}) &\rightarrow Rj_*p_*\mathbf{DR}_X(p^{-1}j^{-1}\mathcal{M}) \\ &= Rj_*p_*p^{-1}j^{-1}\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Si l'on compose tous les morphismes naturels que l'on vient de construire on obtient bien le morphisme naturel attendu :

$$\mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_\alpha) \rightarrow \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

□

La naturalité de ce morphisme ainsi que la définition du morphisme (7)

$$\Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) \rightarrow \Psi_{\pi_I c}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}))$$

permettent de montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$(15) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{DR}_X\mathcal{M}_\alpha & \xrightarrow{\text{Topo}} & \Psi_\pi \mathbf{DR}_X\mathcal{M} \\ \parallel & & \downarrow \\ \mathbf{DR}_X[(\mathcal{M}_{\alpha_I})_{\alpha_{Ic}}] & \longrightarrow \Psi_{\pi_I c}(\mathbf{DR}_X\mathcal{M}_{\alpha_I}) \longrightarrow & \Psi_{\pi_I c}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X\mathcal{M}). \end{array}$$

**3.4. Le morphisme de comparaison.** — En combinant les morphismes (11), **Nils** et **Topo** on obtient la suite de morphismes suivante

$$(16) \quad \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbf{Nils}} \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \mathbf{DR}_{X_0} i^\dagger \mathcal{M}_\alpha \leftarrow \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \mathbf{DR}_{X_0} i^\# \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}_\alpha) \xrightarrow{\mathbf{Topo}} \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

On a appliqué les morphisme (11) à  $\mathcal{M}_\alpha$ , on a ensuite appliqué le foncteur  $\mathbf{DR}_{X_0}$  et on a pris la somme sur  $\alpha \in ]-1, 0]^p$  en utilisant la définition

$$\Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{\alpha \in [-1, 0]^p} \text{gr}_\alpha(\mathcal{M}).$$

**Théorème 3.5.** — *Si le couple  $(\mathbf{H}, \mathcal{M})$  est sans pente alors les morphismes (16) sont des isomorphismes qui commutent aux endomorphismes de monodromie  $T_i$ , on obtient l'isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

De plus si  $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$  et si l'on applique successivement cet isomorphisme de comparaison par rapport aux familles d'hypersurfaces  $\mathbf{H}_I$  et  $\mathbf{H}_{I^c}$  le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique l'isomorphisme. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}_{I^c}}(\Psi_{\mathbf{H}_I} \mathcal{M}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}_I}(\Psi_{\mathbf{H}_{I^c}} \mathcal{M}) \\ \Big\| \simeq & & \Big\| \simeq & & \Big\| \simeq \\ \Psi_{\pi_{I^c}}(\Psi_{\pi_I} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})) & \xleftarrow{\sim} & \Psi_\pi \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{\pi_I}(\Psi_{\pi_{I^c}} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})). \end{array}$$

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur le nombre  $p$  d'hypersurfaces dans  $\mathbf{H}$ , le cas  $p = 1$  est traité par Ph. Maisonobe et Z. Mebkhout dans [MM04] théorème 5.3-2 ou par Morihiko Saito dans [Sai88] lemmes 3.4.4 et 3.4.5.

Pour  $p > 1$ , soit  $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$  avec  $1 < r < p$ , on va considérer les diagrammes commutatifs (13), (14) et (15). L'hypothèse sans pente permet d'appliquer la proposition 2.19 (resp. 2.22) qui assure que les flèches verticales des diagrammes (13) et (14) (resp. (15)) sont des isomorphismes. La commutativité de ces diagrammes permet de se ramener aux cas de  $r$  et  $p - r$  hypersurfaces en appliquant successivement les deux isomorphismes de comparaison obtenus par récurrence. La commutativité donne alors également directement la deuxième partie du théorème.  $\square$

Pour un morphisme  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$ , l'inclusion du graphe de  $f$  permet de donner une version générale de ce théorème :

**Corollaire 3.6.** — *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$  un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits et  $\mathcal{M}$  un  $\mathbf{D}_X$ -module holonome régulier tel que le couple  $(\mathbf{H}, i_{f+} \mathcal{M})$  soit sans pente. On a un isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{DR}_X \Psi_f^{\text{alg}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_f \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

De plus si  $I = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$  et si l'on applique successivement cet isomorphisme de comparaison par rapport aux fonctions  $f_I$  et  $f_{I^c}$  le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on applique l'isomorphisme. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{DR}_X \Psi_{f_{I^c}}^{\text{alg}}(\Psi_{f_I}^{\text{alg}} \mathcal{M}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{DR}_X \Psi_f^{\text{alg}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{DR}_X \Psi_{f_I}^{\text{alg}}(\Psi_{f_{I^c}}^{\text{alg}} \mathcal{M}) \\ \Big\| \simeq & & \Big\| \simeq & & \Big\| \simeq \\ \Psi_{f_{I^c}}(\Psi_{f_I} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})) & \xleftarrow{\sim} & \Psi_f \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & \Psi_{f_I}(\Psi_{f_{I^c}} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M})). \end{array}$$

*Démonstration.* — On applique le théorème 3.5 à  $i_{f+} \mathcal{M}$ , on obtient l'isomorphisme

$$\mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(i_{f+} \mathcal{M}) \simeq \Psi_\pi \mathbf{DR}_{X \times \mathbb{C}^p}(i_{f+} \mathcal{M}).$$

où  $\pi : X \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$  est la projection. On applique le foncteur  $i_f^{-1}$  à cette isomorphisme. On observe qu'un théorème de changement de base propre donne l'isomorphisme de foncteur  $\Psi_f i_f^{-1} \simeq i_f^{-1} \Psi_\pi$ . On en déduit l'isomorphisme

$$i_f^{-1} \mathbf{DR}_{X_0} \Psi_{\mathbf{H}}(i_{f+} \mathcal{M}) \simeq \Psi_f i_f^{-1} \mathbf{DR}_{X \times \mathbb{C}^p}(i_{f+} \mathcal{M}).$$

On déduit enfin de l'équivalence de Kashiwara appliquée à l'injection du graphe de  $f$  dans  $X \times \mathbb{C}^p$  l'isomorphisme attendu

$$\mathbf{DR}_X \Psi_f^{\text{alg}}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_f \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}).$$

La suite du corollaire se démontre de la même manière.  $\square$

On déduit en particulier de ce corollaire que, dans le cas sans pente, si l'on applique l'isomorphisme de comparaison par rapport aux fonctions  $f_1, \dots, f_p$  l'une après l'autre l'isomorphisme

$$\mathbf{DR}_X \left( \Psi_{f_{\sigma(p)}}^{\text{alg}} \left( \dots \Psi_{f_{\sigma(2)}}^{\text{alg}} \left( \Psi_{f_{\sigma(1)}}^{\text{alg}}(\mathcal{M}) \right) \right) \right) \simeq \Psi_{f_{\sigma(p)}} \left( \dots \Psi_{f_{\sigma(2)}} \left( \Psi_{f_{\sigma(1)}} \mathbf{DR}_X(\mathcal{M}) \right) \right)$$

ne dépend pas de la permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, p\}$ .

## Appendice A. Hypercomplexes

On définit ici les  $n$ -hypercomplexes qui correspondent aux complexes  $n^{\text{uple}}$  naïfs introduits par P. Deligne au paragraphe 0.4 de [Del73].

**Définition A.1.** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne, on définit par induction la catégorie abélienne des  $n$ -hypercomplexes de la façon suivante :

- Les 1-hypercomplexes sont les complexes d'objets de  $\mathcal{C}$ .
- Les  $n$ -hypercomplexes sont les complexes de  $(n-1)$ -hypercomplexes.

On notera  $\mathcal{C}^n(\mathcal{C})$  la catégorie abélienne des  $n$ -hypercomplexes d'objets de  $\mathcal{C}$ . Par exemple les 2-hypercomplexes sont les complexes doubles. Un  $n$ -hypercomplexe est donc la donnée pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$  d'un objet  $X^{\mathbf{k}}$  de  $\mathcal{C}$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$  de morphismes  $d^{(i)\mathbf{k}} : X^{\mathbf{k}} \rightarrow X^{\mathbf{k}+1_i}$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} d^{(i)} \circ d^{(i)} &= 0 && \text{pour tout } i \\ d^{(i)} \circ d^{(j)} &= d^{(j)} \circ d^{(i)} && \text{pour tout } (i, j) \end{aligned}$$

pour les exposants  $\mathbf{k}$  convenables.

Soit  $X$  un  $n$ -hypercomplexe, pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $m \in \mathbb{Z}$  on note  $X_i^m$  le  $(n-1)$ -hypercomplexe composé des  $X^{\mathbf{k}}$  avec  $k_i = m$  et des différentielles correspondantes. Les différentielles  $d^{(i)\mathbf{k}}$  avec  $k_i = m$  définissent un morphisme :

$$d_i^m : X_i^m \rightarrow X_i^{m+1}$$

qui vérifie  $d_i^{m+1} \circ d_i^m = 0$  par définition d'un  $n$ -hypercomplexe. On a donc pour tout  $1 \leq i \leq n$  un foncteur :

$$\begin{aligned} F_i : \mathcal{C}^n(\mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}^{(n-1)}(\mathcal{C})) \\ X &\mapsto \{X_i^m, d_i^m\}_{m \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

de la catégorie des  $n$ -hypercomplexes dans la catégorie des complexes de  $(n-1)$ -hypercomplexes. On introduit alors le  $(n-1)$ -hypercomplexe :

$$H_i^p(X) := H^p(F_i(X)),$$

et le  $n$ -hypercomplexe :

$$H_i(X) := \dots \rightarrow H_i^p(X) \xrightarrow{0} H_i^{p+1}(X) \rightarrow \dots$$

où toutes les flèches horizontales sont nulles.

**Définition A.2.** — Si un  $n$ -hypercomplexe  $X$  vérifie la propriété de finitude suivante :

$$(17) \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z} \text{ l'ensemble } \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_1 + \dots + k_n = m, X^{\mathbf{k}} \neq 0\} \text{ est fini,}$$

alors on peut associer à  $X$  un complexe simple  $s(X)$ . On pose

$$s(X)^m := \bigoplus_{k_1 + \dots + k_n = m} X^{\mathbf{k}}.$$

Soit  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $k_1 + \dots + k_n = m$ , on note  $i_{\mathbf{k}} : X^{\mathbf{k}} \rightarrow s(X)^m$  et  $p_{\mathbf{k}} : s(X)^m \rightarrow X^{\mathbf{k}}$  les morphismes naturels. On peut alors définir la différentielle  $d_{s(X)}^m : s(X)^m \rightarrow s(X)^{m+1}$  du complexe  $s(X)$  par :

$$p_l \circ d_{s(X)}^m \circ i_{\mathbf{k}} = \begin{cases} (-1)^{k_1 + \dots + k_{j-1}} d^{(j)\mathbf{k}} & \text{si } \#\{i \mid k_i \neq l_i\} = 1 \text{ où } j \text{ vérifie } k_j \neq l_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{l}$  vérifiant  $k_1 + \dots + k_n = m$  et  $l_1 + \dots + l_n = m + 1$ . On peut alors vérifier que  $d_{s(X)}^{m+1} \circ d_{s(X)}^m = 0$  et  $(s(X), d_{s(X)})$  est donc bien un complexe. On a défini un foncteur

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_f^n(\mathcal{C}) & \rightarrow & \mathbf{C}(\mathcal{C}) \\ X & \mapsto & (s(X), d_{s(X)}) \end{array}$$

où  $\mathbf{C}_f^n(\mathcal{C})$  est la catégorie des  $n$ -hypercomplexes vérifiant la propriété (17). De plus on observe facilement que  $s(\cdot)$  est un foncteur exact.

**Théorème A.3.** — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $n$ -hypercomplexes où  $X$  et  $Y$  vérifient la propriété (17) et supposons que  $f$  induise un isomorphisme :

$$f : H_1(H_2(\dots H_n(X))) \simeq H_1(H_2(\dots H_n(Y))).$$

Alors  $s(f) : s(X) \rightarrow s(Y)$  est un quasi-isomorphisme.

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur l'entier  $n$ . Pour  $n = 1$  c'est la définition d'un quasi-isomorphisme, pour  $n = 2$  c'est le théorème 1.9.3 de [KS94]. On suppose que  $n \geq 3$ . Pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ , on a deux  $(n-1)$ -hypercomplexes,  $H_n^p(X)$  et  $H_n^p(Y)$ , qui vérifient les hypothèses du théorème et donc par hypothèse de récurrence  $f$  induit un quasi-isomorphisme entre  $s(H_n^p(X))$  et  $s(H_n^p(Y))$ . Or  $H_n^p(X) = H^p(F_n(X))$  et  $H^p(\cdot)$  est un foncteur additif, il commute donc avec le foncteur  $s(\cdot)$  et  $f$  induit un quasi-isomorphisme entre  $H^p(\{s(X_n^m), s(d_n^m)\}_{m \in \mathbb{Z}})$  et  $H^p(\{s(Y_n^m), s(d_n^m)\}_{m \in \mathbb{Z}})$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ . Mais ce quasi-isomorphisme correspond aux conditions du théorème pour les complexes doubles  $\{s(X_i^m), s(d_i^m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  et  $\{s(Y_i^m), s(d_i^m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , les complexes simples associés à ces deux complexes doubles sont donc quasi-isomorphes par hypothèse de récurrence pour  $n = 2$ . En appliquant la définition du foncteur  $s$  on montre alors que ces deux derniers complexes simples sont en fait les complexes simples associés à  $X$  et à  $Y$  ce qui conclut la démonstration du théorème.  $\square$

**Corollaire A.4.** — Soit  $X$  un  $n$ -hypercomplexe tel qu'il existe un indice  $i$  pour lequel le complexe  $F_i(X)$  soit exact, alors  $s(X)$  est quasi-isomorphe au complexe nul.

*Démonstration.* — Le théorème précédent est évidemment vérifié si l'on permute les indices des  $H_i$ . Si le complexe  $F_i(X)$  est exact alors  $H_i(X) \simeq H_i(0_n)$  où  $0_n$  est le  $n$ -hypercomplexe nul. On a donc

$$H_1(\dots H_{i-1}(H_{i+1}(\dots H_n(H_i(X)))) \simeq H_1(\dots H_{i-1}(H_{i+1}(\dots H_n(H_i(0_n))))$$

et on peut appliquer le théorème précédent,  $s(X) \simeq s(0_n)$ ,  $s(X)$  est quasi-isomorphe au complexe nul.  $\square$

**Définition A.5.** — Soit  $\{X^{\mathbf{k}}, f^{(i)\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq i \leq n}$  une famille d'objets de  $\mathcal{C}$  et de morphismes  $f^{(i)\mathbf{k}} : X^{\mathbf{k}} \rightarrow X^{\mathbf{k}+1_i}$ , on appelle *hypercube associé à  $X$*  le  $n$ -hypercomplexe noté  $\text{Cube}(X)^\bullet$  vérifiant

$$\text{Cube}(X)^{k_1, \dots, k_n} = \begin{cases} X^{k_1-1, \dots, k_n-1} & \text{si } \mathbf{k} \in \{0, 1\}^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les morphismes étant ceux donnés par les  $f^{(i)\mathbf{k}}$ . On vérifie facilement que  $\text{Cube}(\cdot)$  définit un foncteur exact.

Par exemple, pour  $n = 3$  on a

$$\text{Cube}(X) = \begin{array}{ccccc} & & X^{-1,0,0} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,0,0} \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\ X^{-1,-1,0} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,-1,0} & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \nearrow & X^{-1,0,-1} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,0,-1} \\ X^{-1,-1,-1} & \xrightarrow{\quad} & X^{0,-1,-1} & & \end{array}$$

où le reste de l'hypercomplexe est nul et  $X^{-1,-1,-1}$  est en degré  $(0, 0, 0)$ .

## Appendice B. Filtrations compatibles

Les définitions qui suivent ont été introduites par Morihiko Saito dans [Sai88]

**Définition B.1.** — Soit  $A$  un objet de la catégorie abélienne  $\mathcal{C}$  et  $A_1, \dots, A_n \subseteq A$  des sous-objets de  $A$ . On dit que  $A_1, \dots, A_n$  sont des *sous-objets compatibles* de  $A$  si il existe un  $n$ -hypercomplexe  $X$  satisfaisant à :

1.  $X^{\mathbf{k}} = 0$  si  $\mathbf{k} \notin \{-1, 0, 1\}^n$ .
2.  $X^{\mathbf{0}} = A$ .
3.  $X^{0^{-1}i} = A_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .
4. Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $\mathbf{k} \in \{-1, 0, 1\}^n$  tel que  $k_i = 0$ , la suite

$$0 \rightarrow X^{\mathbf{k}-\mathbf{1}_i} \rightarrow X^{\mathbf{k}} \rightarrow X^{\mathbf{k}+\mathbf{1}_i} \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

**Remarque B.2.** — — En utilisant les propriétés universelles fournies par les suites exactes courtes on observe que si les sous-objets  $A_1, \dots, A_n$  sont compatibles, alors le  $n$ -hypercomplexe  $X$  est déterminé de manière unique. Par exemple si  $\mathbf{k} \in \{-1, 0\}^n$  et si  $I = \{i; k_i = -1\} \subset \{1, \dots, n\}$  alors

$$X^{\mathbf{k}} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

— Si  $n = 1$ , le complexe  $X$  est la suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow A/A_1 \rightarrow 0.$$

— Si  $n = 2$  deux sous-objets  $A_1$  et  $A_2$  sont toujours compatibles et  $X$  est le complexe double suivant

$$\begin{array}{ccccc} A_1/(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & A/A_2 & \longrightarrow & A/(A_1 + A_2) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/A_1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_1 \cap A_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_2/(A_1 \cap A_2). \end{array}$$

— Si  $n \leq 3$  des sous-objets  $A_1, \dots, A_n$  ne sont pas compatibles en général.

— Par définition si  $A_1, \dots, A_n \subseteq A$  sont compatibles alors pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$  les sous-objets  $(A_i)_{i \in I} \subseteq A$  sont compatibles et l'hypercomplexe correspondant est le  $\#I$ -hypercomplexe  $X_I$  dont les objets sont les  $X^{\mathbf{k}}$  tels que  $k_i = 0$  pour tout  $i \in I^c$ .

**Définition B.3.** — Soient  $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$  des filtrations croissantes indexées par  $\mathbb{Z}$  d'un objet  $A$ , on dit que ces filtrations sont *compatibles* si pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}^n$  les sous-objets  $F_{\ell_1}^1, \dots, F_{\ell_n}^n$  de  $A$  sont compatibles.

**Remarque B.4.** — — D'après la remarque précédente toute sous famille d'une famille de filtrations compatibles est compatible.

— On peut montrer que si  $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$  sont compatibles alors pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$  les filtrations induites par  $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^{n-1}$  sur  $\text{gr}_{\ell}^{F_n}$  sont compatibles.

— Si  $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$  sont compatibles alors les filtrations induites sur  $F_{\ell_1}^1 \cap \dots \cap F_{\ell_n}^n$  sont compatibles.

**Proposition B.5.** — Soit  $F_{\bullet}^1, \dots, F_{\bullet}^n$  des filtrations compatibles d'un objet  $A$ . L'objet obtenu en appliquant successivement les gradués  $\text{gr}_{\ell_{\sigma(j)}}^{F_{\sigma(j)}}$  par rapport aux filtrations  $F_{\sigma(j)}$  induites sur  $\text{gr}_{\ell_{\sigma(j-1)}}^{F_{\sigma(j-1)}} \dots \text{gr}_{\ell_{\sigma(1)}}^{F_{\sigma(1)}} A$  pour  $1 \leq j \leq n$  ne dépend pas de la permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  et est égal à

$$\frac{F_{\ell_1}^1 A \cap \dots \cap F_{\ell_n}^n A}{\sum_j F_{\ell_1}^1 A \cap \dots \cap F_{\ell_{j-1}}^1 A \cap \dots \cap F_{\ell_n}^n A}.$$

### Références

- [Del73] P. DELIGNE – « Cohomologie à supports propres (exposé XVII) », in *SGA 4*, Lect. Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, 1973, p. 252–480.
- [Kas83] M. KASHIWARA – « Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations », in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lect. Notes in Math., vol. 1016, Springer-Verlag, 1983, p. 134–142.
- [KS94] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.
- [Lip75] J. LIPMAN – « Introduction to resolution of singularities », in *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, p. 187–230.
- [Mai13] P. MAISONOBE – « Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente », *J. Singul.* **7** (2013), p. 157–189.
- [Mal83] B. MALGRANGE – « Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence », in *Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 243–267.
- [MM04] P. MAISONOBE & Z. MEBKHOUT – « Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 311–389.
- [Sai88] M. SAITO – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24** (1988), no. 6, p. 849–995 (1989).