



**HAL**  
open science

## Convergence d'une approximation discontinue des systemes du premier ordre.

Philippe Helluy, Dayma Sandrine

► **To cite this version:**

Philippe Helluy, Dayma Sandrine. Convergence d'une approximation discontinue des systemes du premier ordre.. Comptes Rendus. Mathématique, 1994, 319 (12), pp.1331-1335. hal-01419041

**HAL Id: hal-01419041**

**<https://hal.science/hal-01419041>**

Submitted on 18 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Convergence d'une approximation discontinue des systèmes du premier ordre

Philippe HELLUY et Sandrine DAYMA

**Résumé** – Dans cette note, on démontre la convergence d'une approximation discontinue des systèmes du premier ordre (applicable, entre autres, au système de Maxwell harmonique). Le cas des coefficients discontinus est traité.

### Convergence of a discontinuous approximation of first order systems

**Abstract** – In this note, we prove a convergence result for a discontinuous approximation of first order systems (the harmonic Maxwell's equations are of this type). We handle the case of discontinuous coefficients.

**Abridged English Version** – In this note, we propose an alternative to the use of conforming finite elements in the numerical analysis of harmonic electromagnetic problems. Our method has the following advantages:

1. mesh refinement and domain decomposition are simplified;
  2. different approximation functions may be used with the same variational formulation;
- The main disadvantage is that more unknowns are often needed.

To be more general, we consider a boundary value problem (1) for a first order dissipative symmetric system (see [2]). We impose to the solution  $\Phi_S$  of (1) to be in the kernel of the negative part of the flux matrix,  $f(n) = \sum_{k=1}^m A^k n_k$ , on the boundary  $\partial\Omega$ . In the case of the harmonic Maxwell problem, this condition may be interpreted as a radiation condition on  $\partial\Omega$  (cf. [6]).

We then use a variational formulation (2) introduced by Lesaint to discretize the problem (1). The important fact here is that no compatibility condition is imposed between two finite elements. Our approximation  $\phi_S$  of  $\Phi_S$  is piecewise polynomial and discontinuous (this method is known as the Galerkin discontinuous method).

Therefore, it is necessary to show that we control the discontinuities when the step  $h$  of the mesh tends to 0. In [3], Johnson *et al.* proved a convergence result in a special norm (4) which is mesh dependant. The square of the norm (4) is composed of an  $L^2$  part and a supplementary term. In conforming finite elements methods, this term is zero. Here, it is shown to tend to 0 with  $h$ .

A straightforward adaptation of [3], [4], permits us to handle the important case of discontinuous  $\Phi_S$ , if the set  $D\Phi_S$  of the discontinuities of  $\Phi_S$  coincide with edges of elements. This is not restrictive because this set can be known *a priori* from standard regularity theorems (see [5]).

Unfortunately in this note, we assumed the parameter  $\nu > 0$ . And in most applications,  $\nu = 0$ . We did not succeed in carrying out the proof in this case (this is a classical difficulty in the approximation of the harmonic Maxwell problem.  $\nu$  is then called the limiting absorption parameter). Therefore we present some concluded numerical result in the case  $\nu = 0$ .

---

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

For a more detailed presentation, see [6], where a parallel algorithm is described to solve (3). Non reflecting boundary conditions adapted to the flux splitting are also available.

1. NOTATIONS. – Dans cette Note,  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) de frontière  $\partial\Omega$  régulière.

$E^l$  ( $l \geq 1$ ) sera l'ensemble des applications de  $\bar{\Omega}$  dans  $\mathbb{C}^p$  ( $p \geq 1$ ) de régularité  $H^l$  par morceaux. Pour  $\Phi \in E^l$ , on notera  $D\Phi$  l'ensemble des points aux voisinages desquels  $\Phi$  n'est pas  $H^l$ .  $D\Phi$  est une surface de dimension  $m - 1$ , régulière par morceaux, que l'on suppose orientée par une normale  $n = (n_1 \dots n_m)$  arbitraire. On notera également  $n$  la normale sortante à  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$ .  $R\Phi$  est l'ensemble  $\Omega \setminus D\Phi$ . De plus, on peut définir les traces de  $\Phi$  dans  $H^{l-1/2}(D\Phi)$  de part et d'autre de  $D\Phi$ , par densité, et grâce à l'identité :

$$\forall x \in D\Phi$$

$$\Phi_+(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Phi(x + \alpha n) \quad \text{et} \quad \Phi_-(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \Phi(x + \alpha n)$$

$\Phi$  et  $\Psi$  étant deux éléments de  $E^l$ ,  $(\cdot, \cdot)$ ,  $[\cdot, \cdot]$  et  $\{\cdot, \cdot\}$  désigneront respectivement les parties réelles des produits scalaires usuels sur  $L^2(R\Phi \cap R\Psi)$ ,  $L^2(D\Phi \cup D\Psi)$  et  $L^2(\partial\Omega)$ .

Pour une matrice  $A$  hermitienne, on notera  $\Pi_A^+$  (respectivement  $\Pi_A^-$ ) la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de  $A$  associés à des valeurs propres  $> 0$  (respectivement  $< 0$ ). La partie positive (respectivement négative) de  $A$  est alors  $A^+ = \Pi_A^+ A$  (respectivement  $A^- = \Pi_A^- A$ ). On posera  $|A| = A^+ - A^-$ .

Soit  $S \in L^2(\Omega)$  et  $\Phi_S$ , l'unique solution faible du problème aux limites suivant (voir [2]) :

$$(1) \quad \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^m A^k \frac{\partial}{\partial x_k} + z A^0(x) + B(x) \right) \Phi = S \\ \Phi \in \ker f(n)^- \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où :

1. Les  $(A_k)_{k=1 \dots m}$  sont des matrices hermitiennes de dimension  $p \times p$ , constantes;
2.  $f(n) = \sum_{k=1}^m A^k n_k$  est de rang constant sur  $\partial\Omega$  [on notera  $f(\partial) = \sum_{k=1}^m A^k (\partial/\partial x_k)$ ];
3.  $z$  est un complexe de partie réelle  $\nu$  et de partie imaginaire  $\omega$  avec  $\nu > 0$  et  $\omega \neq 0$ ;
4.  $A^0(x)$  est une matrice hermitienne, régulière par morceaux en  $x$ . De plus, nous supposerons que  $A^0$  est supérieure à l'identité (au sens où  $\forall u \in \mathbb{C}^p$ ,  $\langle A^0 u, u \rangle \geq \langle u, u \rangle$ );
5.  $B(x)$  est une matrice positive (pas nécessairement hermitienne).

Si  $\Phi_S$  est dans  $E^l$  (ce type de régularité est étudié dans [5] pour le système de Maxwell harmonique), (1) est équivalent à la formulation variationnelle suivante (voir [1]) :

$$(2) \quad \text{trouver } \Phi \in E^l \text{ tel que } \forall \Psi \in E^l \text{ on ait } \mathcal{B}(\Phi, \Psi) = \mathcal{L}(\Psi)$$

où la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\Phi, \Psi) = & ((z A^0 + B + f(\partial)) \Phi, \Psi) + [f(n)^- (\Phi_+ - \Phi_-), \Psi_-] \\ & + [f(-n)^- (\Phi_- - \Phi_+), \Psi_+] + \{-f(n)^- \Phi, \Psi\} \end{aligned}$$

et la forme linéaire

$$\mathcal{L}(\Psi) = (S, \Psi).$$

Soit une triangulation  $(q_i)_{(i=1\dots r)}$  de  $\bar{\Omega}$ , éventuellement courbe et non conforme, et soit  $E_h^l$ , l'espace vectoriel des applications de  $\bar{\Omega}$  dans  $\mathbb{C}^p$ , polynômiales de degré  $\leq l - 1$  par élément  $q_i$ .  $h = \max_i \text{diam}(q_i)$ . Nous ferons l'hypothèse, fondamentale dans la suite, que  $D\Phi \subset \bigcup_i \partial q_i$ . Ce n'est pas une contrainte gênante, dans la mesure où  $D\Phi$  peut être connu *a priori*. Une approximation de (1) est alors construite en restreignant la formulation (2) à  $E_h^l$ . L'approximation de  $\Phi_S$ , notée  $\phi_S$  est donc solution de :

(3) trouver  $\phi \in E_h^l$  tel que  $\forall \psi \in E_h^l$  on ait  $\mathcal{B}(\phi, \psi) = \mathcal{L}(\psi)$ .

2. ESTIMATION D'ERREUR. – En adaptant les résultats de [3] et [4], nous allons montrer :

THÉORÈME 1. – Il existe une constante  $C(\nu)$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\Phi_S - \phi_S\| \leq C(\nu) h^{l-1/2} |\Phi_S|_l$$

où la norme  $\|\cdot\|$  est définie par :

(4)  $\|\Phi\|^2 = (\nu A^0 \Phi, \Phi) + \left[ \frac{|f(n)|}{2} (\Phi_+ - \Phi_-), \Phi_+ - \Phi_- \right] + \left\{ \frac{|f(n)|}{2} \Phi, \Phi \right\}$

et la norme  $|\Phi|_l$  par  $|\Phi|_l = |\Phi|_{H^l(\mathbb{R}\Phi)}$ .

Démonstration. – En appliquant la formule de Green à chaque élément du maillage, on voit que, pour tout  $\Phi, \Psi$  dans  $E^l$ , on a :

(5)  $(f(\partial)\Phi, \Psi) = (\Phi, -f(\partial)\Psi) + [f(n)\Phi_-, \Psi_-] - [f(n)\Phi_+, \Psi_+] + \{f(n)\Phi, \Psi\}$

et la formule de Stokes donne :

(6)  $(f(\partial)\Phi, \Phi) = \frac{1}{2} [f(n)\Phi_-, \Phi_-] + \frac{1}{2} [-f(n)\Phi_+, \Psi_+] + \frac{1}{2} \{f(n)\Phi, \Psi\}$

ainsi, la partie symétrique de  $\mathcal{B}$  s'écrit :

(7)  $\frac{\mathcal{B}(\Phi, \Psi) + \mathcal{B}(\Psi, \Phi)}{2} = ((\nu A^0 + B)\Phi, \Psi) + \frac{1}{2} [|f(n)|(\Phi_+ - \Phi_-), \Psi_+ - \Psi_-] + \left\{ \frac{1}{2} |f(n)| \Phi, \Psi \right\}$

et la partie antisymétrique :

(8)  $\frac{\mathcal{B}(\Phi, \Psi) - \mathcal{B}(\Psi, \Phi)}{2} = -(\Phi, f(\partial)\Psi) - (i\omega A^0 \Psi, \Phi) + \frac{1}{2} [f(n)(\Psi_- - \Psi_+), \Phi_+ + \Phi_-] + \left\{ \frac{1}{2} f(n) \Phi, \Psi \right\}$

Notons alors  $\tilde{\Phi}_S$  le projeté au sens  $L^2$  de  $\Phi_S$  sur  $E_h^l$  et  $\Delta_h = \tilde{\Phi}_S - \phi_S$ ,  $\Delta = \tilde{\Phi}_S - \Phi_S$ . Pour tout élément  $q$ , on dispose des estimations classiques :

(9)  $|\Delta|_{L^2(q)} \leq C h^l |\Phi_S|_{H^l(q)} \quad \text{et} \quad |\Delta|_{L^2(\partial q)} \leq C h^{l-1/2} |\Phi_S|_{H^l(q)}$

C'est à ce stade qu'intervient l'hypothèse  $D\Phi \subset \bigcup_i \partial q_i$ . En effet, si une discontinuité de  $\Phi_S$  traverse  $q$ , les estimations (9) ne sont plus valables.

Puisque  $\phi_S$  est solution du problème discret, on a :

$$(10) \quad \mathcal{B}(\Delta, \Delta_h) = \mathcal{B}(\Delta_h, \Delta_h) = \|\Delta_h\|^2.$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz à la partie symétrique de  $\mathcal{B}$ , on voit que :

$$(11) \quad |\mathcal{B}(\Delta, \Delta_h)| \leq \|\Delta\| \|\Delta_h\| + \left| -(i\omega A^0 \Delta_h, \Delta) + \frac{1}{2} [f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}), \Delta_+ + \Delta_-] + \frac{1}{2} \{f(n) \Delta, \Delta_h\} \right|.$$

D'autre part,

$$(12) \quad |[f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}), \Delta_+ + \Delta_-]|^2 \leq \|f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}), \Delta_{h-} - \Delta_{h+}\| \|f(n)(\Delta_+ + \Delta_-), \Delta_+ + \Delta_-\|$$

et d'après (9),

$$(13) \quad |[f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}), \Delta_+ + \Delta_-]| \leq C \|\Delta_h\| h^{l-1/2} |\Phi_S|_l.$$

De même, d'après (9)

$$(14) \quad |-(i\omega A^0 \Delta_h, \Delta)| \leq \frac{C}{\sqrt{\nu}} h^l \|\Delta_h\| |\Phi_S|_l$$

et

$$(15) \quad |\{f(n) \Delta, \Delta_h\}| \leq C \|\Delta_h\| h^{l-1/2} |\Phi_S|_l$$

soit en regroupant les inégalités précédentes,

$$(16) \quad \|\Delta_h\| \leq C(\nu) h^{l-1/2} |\Phi_S|_l$$

et d'après (9),

$$(17) \quad \|\Delta\| \leq C(\nu) h^{l-1/2} |\Phi_S|_l \quad \square$$

3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES. – Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  le système du premier ordre

$$(18) \quad \begin{pmatrix} 2i\pi\varepsilon & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 2i\pi\varepsilon & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 2i\pi\mu \end{pmatrix} \Phi = 0$$

avec

$$(19) \quad \begin{cases} \varepsilon(x, y) = \varepsilon_1 = 1, & \mu(x, y) = \mu_1 = 1 & \text{si } x > 0 \\ \varepsilon(x, y) = \varepsilon_2 = \sqrt{3}, & \mu(x, y) = \mu_2 = 2/\sqrt{3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Une solution de (18) est donnée par :

$$(20) \quad \Phi_{\text{inc}}(x, y) = \begin{pmatrix} -v \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ u \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2i\pi \sqrt{\varepsilon\mu}(ux+vy)}$$

avec

$$(21) \quad \begin{cases} u(x, y) = u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), & v(x, y) = v_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \text{si } x > 0 \\ u(x, y) = u_2 = u_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}}, & v(x, y) = v_2 = v_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cette solution est discontinue sur la droite d'équation  $x = 0$ .

Soit  $\partial\Omega$  le carré d'équation  $\max(|x|, |y|) = 1/2$ , et soit  $\Phi$  l'unique solution de (18) vérifiant la condition aux limites inhomogènes  $f(n)^- \Phi = g = f(n)^- \Phi_{\text{inc}}$ . La résolution numérique de (3), avec  $l = 2$  (éléments finis de type P1 discontinus), conduit alors aux résultats suivants :

| $h$                     | $(\Phi_{\text{inc}} - \phi, \Phi_{\text{inc}} - \phi)$ | $\frac{1}{2} [ f(n)  \phi, \phi]$ | $ \Phi_{\text{inc}} - \phi _{\infty}$ |
|-------------------------|--|-----------------------------------|---------------------------------------|
| $\sim \frac{1}{4}$      | $1,16479 \cdot 10^{-1}$                                | $2,07401 \cdot 10^{-1}$           | $9,46343 \cdot 10^{-1}$               |
| (22) $\sim \frac{1}{8}$ | $6,68078 \cdot 10^{-3}$                                | $5,70103 \cdot 10^{-2}$           | $3,24776 \cdot 10^{-1}$               |
| $\sim \frac{1}{16}$     | $3,29146 \cdot 10^{-4}$                                | $8,67204 \cdot 10^{-3}$           | $8,66241 \cdot 10^{-2}$               |
| $\sim \frac{1}{32}$     | $1,94792 \cdot 10^{-5}$                                | $1,14688 \cdot 10^{-3}$           | $2,19455 \cdot 10^{-2}$               |

Note remise le 11 octobre 1994, acceptée le 17 octobre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. LESAIN, Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis, *Thèse*, rapport CEA-R-4731, 1976.  
 [2] J. RAUCH, Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291:1, 1985, p. 167-187.  
 [3] C. JOHNSON, U. NÄVERT et J. PITKÄRANTA, Finite element methods for linear hyperbolic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45, 1984, p. 285-312.  
 [4] J. P. CROISILLE, Contribution à l'étude théorique et à l'approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz multidimensionnelle et multi-espèces, *Thèse de doctorat*, Université Paris-VI, 1990.  
 [5] T. ABOUD et J. C. NÉDÉLEC, Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium, Rapport du Centre de Math. Appl. Polytechnique, n° 203, 1989.  
 [6] P. HELLUY, Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus, *Thèse de doctorat*, ENSAE, Toulouse, janvier 1994.