



**HAL**  
open science

## Approches primale et duale en rupture non linéaire

Claude Stolz

► **To cite this version:**

Claude Stolz. Approches primale et duale en rupture non linéaire. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01418194

**HAL Id: hal-01418194**

**<https://hal.science/hal-01418194v1>**

Submitted on 16 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Approches primale et duale en rupture non linéaire

C. Stolz<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides,  
Ecole Polytechnique, CNRS UMR 7649  
stolz@lms.polytechnique.fr

---

**Résumé** — Le paramètre énergétique associé à la vitesse de propagation est une intégrale de contour appropriée exprimée en terme d'énergie libre ou d'énergie complémentaire. On étudie l'invariance par rapport au contour de ces intégrales et on interprète les résultats obtenus. Les formulations primale et duale du problème d'évolution de la propagation de la fissure en élasto-plasticité sont ensuite présentées dans ce cadre énergétique.

**Mots clés** — Rupture, Intégrale invariante, Fissure, Griffith, propagation, Tenseur d'Eshelby

---

## 1 Introduction

L'analyse mécanique de la propagation des fissures dans un milieu élastique a permis la modélisation de la rupture fragile. La méthode énergétique conduit aux définitions de l'intégrale  $J$  de Rice-Eshelby et de l'intégrale duale  $I$  de Bui [1] dont les interprétations sont respectivement les taux de restitution d'énergie potentielle ou complémentaire. Dans le cas de la plasticité parfaite, une description énergétique a été proposée par Nguyen [3]. Soit  $w(\varepsilon, \alpha)$  la densité d'énergie libre isotherme emmagasinée et  $\Gamma$  un contour fermé entourant la pointe de la fissure, on obtient l'expression de la dissipation

$$D_m = \mathcal{G}\dot{l} + \int_{\Omega} d \, d\Omega$$

où  $d = \sigma : \dot{\varepsilon} - \rho\dot{w}$  est la dissipation par unité de volume, la quantité  $\mathcal{G}$  est la force due aux singularités en fond de fissure donnée par

$$\mathcal{G} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_{\Gamma} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \rho(w + \frac{1}{2}v^2)n_1 - \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{u}_{,1} \, dS$$

La notation  $\Gamma \rightarrow 0$  signifie que le rayon maximum du contour tend vers zéro. En propagation quasistatique les termes d'inertie sont négligeables et  $\mathcal{G}$  est lié au taux de restitution d'énergie défini par la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la longueur de fissure. En dynamique isotherme l'hamiltonien remplace l'énergie potentielle comme montré en [7].

## 2 Cadre de l'étude

On étudie la propagation d'une fissure droite de direction  $\underline{e}_1$  dans un milieu continu de volume  $\Omega$ . Sur la frontière  $\partial\Omega_T$ , on impose des efforts  $\underline{T}^d$  et sur la partie complémentaire  $\partial\Omega_u$  le déplacement  $\underline{u}^d$  est donné. Les lèvres de la fissure sont supposées libres de contrainte.

En mécanique de la rupture fragile, le comportement du matériau est élastique linéaire, l'énergie  $w(\varepsilon)$  est une forme quadratique de la déformation  $\varepsilon$ , laquelle est définie à partir du déplacement

$\underline{u}$  :

$$w(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^t \underline{u}). \quad (1)$$

On note  $\sigma$  le champ de contrainte associée à la déformation par la loi d'état  $\sigma = \mathbf{C} : \underline{\varepsilon}$ .

Le critère de propagation d'une fissure est celui proposé par Griffith. Ce critère s'exprime sous la forme : si  $\mathcal{G} - G_c < 0$ , la fissure ne se propage pas ;  $G_c$  est la valeur caractéristique du matériau vis-à-vis de la rupture. Le taux de restitution d'énergie  $\mathcal{G}$  est défini à partir de l'énergie potentielle du système  $\mathcal{E}$  par

$$\mathcal{E}(\underline{u}, l) = \int_{\Omega(l)} w(\underline{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_\Gamma} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{u} \, ds, \quad (2)$$

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = \int_{\Gamma} w(\underline{\varepsilon}) n_1 - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, ds = J_\Gamma \quad (3)$$

La position d'équilibre du système à longueur de fissure  $l$  donnée minimise l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  sur l'ensemble des champs de déplacements  $\underline{u}$  cinématiquement admissibles avec les conditions aux limites en déplacement  $\underline{u} = \underline{u}^d$  sur  $\partial\Omega_u$ . La solution du problème d'équilibre est le champ de déplacement  $\underline{u}^{sol}(l, \underline{u}^d, \underline{\mathbf{T}}^d)$ . De même, on définit une approche duale de l'équilibre du système à l'aide de l'énergie complémentaire

$$\mathcal{E}^*(\sigma, l) = - \int_{\Omega(l)} w^*(\sigma) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_u} \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}^d \, ds. \quad (4)$$

Le taux de restitution d'énergie prend alors la forme de l'intégrale duale de Bui [1] :

$$I_\Gamma = J_\Gamma = \int_{\Gamma} -w^*(\sigma) n_1 + \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, ds. \quad (5)$$

L'égalité des deux intégrales résulte de l'égalité des énergies potentielle et complémentaire pour l'état d'équilibre sous le chargement  $(\underline{u}^d, \underline{\mathbf{T}}^d)$  du volume  $\Omega$  à longueur de fissure donnée. On note les relations classiques

$$w^*(\sigma) + w(\underline{\varepsilon}) = \sigma \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \int_{V_c} \sigma : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \, d\Omega = \int_C \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u} \, ds. \quad (6)$$

**Lemme.** Pour tout champ  $\tilde{\sigma}$  statiquement admissible ( $\text{div } \tilde{\sigma} = 0$ ), tout champ  $\hat{\underline{u}}$  cinématiquement admissible ( $2\hat{\underline{\varepsilon}} = \text{grad } \hat{\underline{u}} + \text{grad}^t \hat{\underline{u}}$ ) et tout volume fermé de frontière  $C$ , nous avons :

$$\int_C (\tilde{\sigma} : \hat{\underline{\varepsilon}} n_i - \underline{n} \cdot \tilde{\sigma}_{,i} \hat{\underline{u}} - \underline{n} \cdot \tilde{\sigma} \cdot \hat{\underline{u}}_{,i}) \, ds = 0 \quad (7)$$

**Invariance des intégrales de contour.** Prenons un contour fermé  $C$ , composé de deux contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  entourant la pointe de la fissure ( $V_{\Gamma_1} \subset V_{\Gamma_2}$ ) complétés par les lèvres de la fissure. Introduisons les tenseurs d'Eshelby primal  $p$  et dual  $p^*$  :

$$p = w \mathbf{I} - \sigma \cdot \nabla \underline{u}, \quad p^* = -w^* \mathbf{I} + \nabla \sigma \cdot \underline{u} \quad (8)$$

ces tenseurs vérifient les relations

$$0 = \int_{V_c} \text{div } p \, d\Omega = \int_C \underline{n} \cdot p \, ds, \quad 0 = \int_{V_c} \text{div } p^* \, d\Omega = \int_{V_c} \underline{n} \cdot p^* \, ds \quad (9)$$

A l'état d'équilibre nous avons :  $w(\underline{\varepsilon}) = w^*(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : \underline{\varepsilon}$  et donc

$$p - p^* = \sigma : \underline{\varepsilon} \mathbf{I} - (\sigma \cdot \nabla \underline{u} + \nabla \sigma \cdot \underline{u}); \quad p + p^* = \nabla \sigma \cdot \underline{u} - \sigma \cdot \nabla \underline{u} \quad (10)$$

Sur les lèvres de la fissure, les contributions  $\underline{n} \cdot p \cdot \underline{e}_1$  et  $\underline{n} \cdot p^* \cdot \underline{e}_1$  sont nulles, ce qui assure l'invariance par rapport au contour des intégrales  $I_\Gamma$  et  $J_\Gamma$ , notées maintenant  $I$  et  $J$ . Compte tenu des propriétés de  $p$  et  $p^*$  ainsi que du lemme, pour un état d'équilibre nous obtenons :

$$I + J = \int_{\Gamma} \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, ds; \quad J - I = \int_{\Gamma} (w + w^*) n_1 - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, ds = 0 \quad (11)$$

**Cas de l'élasto-plasticité parfaite.** En plasticité parfaite, Nguyen [3] a proposé un critère de type Griffith généralisé  $J_s \leq G_c$  où

$$J_s = \lim_{\Gamma \rightarrow S} \int_{\Gamma} w(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{n}_1 - \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{,1} \, ds \quad (12)$$

$S$  désigne ici la surface de discontinuité des champs de vitesses lors de la propagation, ( $[\underline{\dot{\mathbf{u}}}]_S + \dot{l} [\underline{\mathbf{u}}_{,1}]_S = 0$ ). On obtient les énergie potentielle  $\mathcal{E}$  et complémentaire  $\mathcal{E}^*$  partir de la densité d'énergie complémentaire

$$w^*(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - w(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (13)$$

A l'état d'équilibre pour un champ de déformation plastique donné, ces deux énergies sont égales à la solution du problème d'équilibre, il est immédiat de montrer que

$$I_s = J_s = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = -\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial l} \quad (14)$$

Les tenseurs  $p$  et  $p^*$  associés aux densités  $w$  et  $w^*$  vérifient :

$$0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p \, d\omega + \int_{V_c} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p \, d\omega \quad 0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p^* \, d\omega - \int_{V_c} \nabla \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \, d\omega \quad (15)$$

pour tout volume fermé extérieur aux lignes de discontinuités des champs mécaniques. A l'aide des propriétés de régularité des champs mécaniques, pour les mêmes raisons sur  $p$  et  $p^*$  les intégrales

$$\mathcal{G} = J_{\Gamma} + \int_{V_{\Gamma}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{,1}^p \, d\Omega \quad \mathcal{G}^* = I_{\Gamma} - \int_{V_{\Gamma}} \boldsymbol{\sigma}_{,1} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \, d\Omega \quad (16)$$

sont invariantes par rapport au contour, on en déduit que

$$\mathcal{G} + \mathcal{G}^* = 2J_s = \int_{\Gamma} \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{,1} \cdot \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{,1} \, dS + \int_{V_{\Gamma}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{,1}^p - \boldsymbol{\sigma}_{,1} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \, d\Omega \quad (17)$$

$$\mathcal{G} - \mathcal{G}^* = 0 = \int_{\Gamma} (w + w^*) \mathbf{n}_1 - \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{,1} \cdot \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{,1} \, dS + \int_{V_{\Gamma}} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p)_{,1} \, d\Omega \quad (18)$$

A partir de la somme et en faisant tendre le contour  $\Gamma$  vers la ligne de discontinuité  $S$  nous avons

$$\mathcal{G} + \mathcal{G}^* = I_s + J_s = \int_S (\underline{\mathbf{n}} \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{,1}]_S \cdot \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot [\underline{\mathbf{u}}_{,1}]_S) \, ds. \quad (19)$$

Ainsi, nous obtenons l'intégrale duale caractéristique de la rupture :

$$I_s = \lim_{\Gamma \rightarrow S} \int_{\Gamma} -w^*(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}_1 + \underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{,1} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, ds. \quad (20)$$

**Cas de l'écroissage.** Le comportement est défini par l'énergie stockée isotherme  $w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$  où  $\boldsymbol{\alpha}$  désigne maintenant des paramètres internes. Les équations d'état définissent les forces associées aux paramètres d'état

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad A = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (21)$$

L'énergie  $w$  est supposée convexe de ces arguments. On définit l'énergie complémentaire par  $w^*(\boldsymbol{\sigma}, A) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - A \cdot \boldsymbol{\alpha} - w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$ . On se place à un état d'équilibre, les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifient les équations d'équilibre et les conditions aux limites, les forces  $A$  appartiennent au domaine d'élasticité du matériau. Les nouveaux tenseurs  $p$  et  $p^*$  satisfont les propriétés

$$0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p \, d\Omega + \int_{V_c} A \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha} \, d\Omega; \quad 0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p^* \, d\Omega - \int_{V_c} \nabla A \cdot \boldsymbol{\alpha} \, d\Omega \quad (22)$$

puis les intégrales, invariants par rapport au contour primale et duale

$$\mathcal{G} = J_{\Gamma} + \int_{V_{\Gamma}} A \cdot \boldsymbol{\alpha}_{,1} \, d\Omega, \quad \mathcal{G}^* = I_{\Gamma} - \int_{V_{\Gamma}} A_{,1} : \boldsymbol{\alpha} \, d\Omega \quad (23)$$

La propriété  $\mathcal{G} = J_s$  est naturellement conservée. Ceci généralise le cas précédent.

### 3 Le problème d'évolution d'une fissure

Pour décrire l'évolution des fissures, on considère le critère de type Griffith défini par

$$J_s \leq G_c, \dot{l} = 0, \quad J_s = G_c, \dot{l} \geq 0. \quad (24)$$

Le problème d'évolution est alors déterminé par la relation

$$\dot{J}_s(\dot{l} - \mu) \geq 0 \quad (25)$$

pour tout  $\mu \geq 0$  aux points où  $J_s = G_c$ .

**Détermination de la vitesse  $\dot{J}_s$ .** On considère un volume  $V_\Gamma$  en translation avec la fissure à la vitesse  $\dot{l}$ . On note  $\hat{f}$  la vitesse de  $f$  dans le repère mobile de  $V_\Gamma$ . La ligne de discontinuité avance de la translation  $\dot{l} \underline{e}_1$ . Dans ce repère, la variation de  $J_s$  est définie par

$$\dot{G} = \int_S [\sigma]_s : \nabla \underline{\hat{u}} - \overset{\circ}{\sigma} : [\nabla \underline{u}]_s - [A \overset{\circ}{\alpha}]_s ds \quad (26)$$

ce qui s'exprime aussi sous la forme

$$\dot{G} = \int_\Gamma (\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{\hat{u}} - \underline{n} \cdot \overset{\circ}{\sigma} \cdot \underline{u}_{,1}) ds + \int_{V_\Gamma} (\overset{\circ}{A} : \alpha_{,1} - A_{,1} : \overset{\circ}{\alpha}) d\Omega \quad (27)$$

Le dernier terme contient uniquement des termes de couplage entre  $\varepsilon$  et  $\alpha$ . Pour l'énergie  $w(\varepsilon, \alpha)$  ce terme est équivalent à

$$-\overset{\circ}{A} : \alpha_{,1} + A_{,1} : \overset{\circ}{\alpha} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \varepsilon} \bullet (\overset{\circ}{\varepsilon} \otimes \alpha_{,1} - \overset{\circ}{\alpha} \otimes \varepsilon_{,1}) = \overset{\circ}{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \overset{\circ}{\varepsilon} \quad (28)$$

ainsi nous obtenons une généralisation du cas de la plasticité parfaite [3] la vitesse  $\dot{G}$  possédant la même forme :

$$\dot{G} = \int_\Gamma (\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{\hat{u}} - \underline{n} \cdot \overset{\circ}{\sigma} \cdot \underline{u}_{,1}) ds + \int_{V_\Gamma} (\overset{\circ}{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \overset{\circ}{\varepsilon}) d\Omega. \quad (29)$$

**Choix de la paramétrisation : la vitesse  $\hat{f}$ .** On définit la vitesse  $\hat{f}$  de la quantité mécanique  $f$  par

$$\hat{f} = \dot{f}, \text{ dans } \Omega/V_\Gamma, \quad \hat{f} = \overset{\circ}{f}, \text{ dans } V_\Gamma \quad (30)$$

La vitesse  $\hat{f}$  est discontinue sur  $\Gamma$ , car à tout instant la quantité  $f$  est continue

$$\hat{f} = \dot{f} - \dot{l} f_{,1}; \quad [\hat{f}]_\Gamma + \dot{l} f_{,1} = 0. \quad (31)$$

**Le problème en vitesse.** Une solution du problème aux limites en vitesse de propagation et de déplacement vérifient les équations locales :

*de la cinématique :* la vitesse de déformation est définie par  $2\hat{\varepsilon} = \nabla \underline{\hat{u}} + \nabla \underline{\hat{u}}^T$  dans  $\Omega$ , les vitesses  $\underline{\hat{u}}$  vérifient les conditions aux limites  $\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}^d$  sur  $\partial\Omega_u$ , et la relation aux discontinuités  $[\underline{\hat{u}}]_\Gamma + \dot{l} \underline{u}_{,1} = 0$  sur  $\Gamma$ .

*des équations d'équilibre :* De champs  $\text{div } \hat{\sigma} = 0$  dans  $\Omega$ , les conditions aux limites  $\hat{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\hat{T}}^d$ , et l'équation aux discontinuités  $\underline{n} \cdot [\hat{\sigma}]_\Gamma + \dot{l} \sigma_{,1} \cdot \underline{n} = 0$  sur  $\Gamma$ .

de la loi de comportement.

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ -\dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w''_{\varepsilon\varepsilon} & w''_{\varepsilon\alpha} \\ w''_{\alpha\varepsilon} & w''_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Les paramètres d'écroutissage vérifient la règle de normalité associée au domaine d'élasticité défini par la fonction convexe  $f$  :

$$f(A) \leq 0, \quad \dot{\alpha} = \lambda N, \quad N = \frac{\partial f}{\partial A}, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda f(A) = 0, \quad (33)$$

de la loi de propagation.

$$i(\mathcal{G} - G_c) = 0, i \geq 0, \quad J_s = \dot{I}_s = 0. \quad (34)$$

**Potentiel local des vitesses.** On note  $C = W''_{\varepsilon\varepsilon}, L = W''_{\varepsilon\alpha}, Z = W''_{\alpha\alpha}$ . Les relations de comportement se mettent sous la forme habituelle grâce au potentiel hypoélastique au sens de Hill  $U(\dot{\varepsilon})$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\varepsilon}}, \quad U(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} : C : \dot{\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\langle N^T . L^T . \dot{\varepsilon} \rangle^2}{N^T . Z . N} \quad (35)$$

ou bien du potentiel complémentaire  $U^*(\dot{\sigma})$ .

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial U^*}{\partial \dot{\sigma}}, \quad U^*(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma} . C^{-1} : \dot{\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\langle N^T . L^T . C^{-1} . \dot{\sigma} \rangle^2}{2 N^T . L^T . C^{-1} . L . N - N^T . Z . N} \quad (36)$$

Dans le volume  $V_\Gamma$ , les relations de comportement s'expriment sous la forme

$$\hat{\varepsilon} - i \varepsilon_{,1} = \frac{\partial U^*}{\partial \hat{\sigma}} (\hat{\sigma} - i \sigma_{,1}), \quad \hat{\sigma} - i \sigma_{,1} = \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}} (\hat{\varepsilon} - i \varepsilon_{,1}) \quad (37)$$

## 4 Formulation primale et duale du problème en vitesse

**Formulation primale.** Introduisons la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  associée au potentiel des vitesses de déformation de Hill

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \int_{\Omega/V_\Gamma} U(\hat{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{V_\Gamma} U(\hat{\varepsilon} - i \varepsilon_{,1}) \, d\Omega + \int_{V_\Gamma} (i \sigma_{,1} : \hat{\varepsilon} - \frac{1}{2} i^2 \sigma_{,1} : \varepsilon_{,1}) \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} (-i \underline{n} . \sigma_{,1} . \underline{\hat{u}}^- + \frac{1}{2} i^2 \underline{n} . \sigma_{,1} . \underline{u}_{,1}) \, dS - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d . \underline{\hat{u}} \, dS \end{aligned}$$

**Propriété.** La solution du problème en vitesse  $(\underline{\hat{u}}, \tilde{l})$  vérifie l'inéquation variationnelle

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\hat{u}}} (\underline{\hat{u}} - \underline{\tilde{u}}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{l}} (\tilde{l} - \tilde{l}) \leq 0 \quad (38)$$

sur l'ensemble des champs admissibles

$$\mathcal{K} = \{(\underline{v}, \tilde{l}) / [\underline{v}]_\Gamma + \tilde{l} . \underline{u}_{,1} = 0, \text{ sur } \Gamma, \tilde{l} \geq 0 \text{ si } \mathcal{G} = G_c, \underline{v} = 0, \text{ sur } \partial\Omega_u\}$$

**Formulation duale.** Introduisons la fonctionnelle  $\mathcal{F}^*$  associée au potentiel complémentaire des vitesses de contrainte et d'avancée de fissure :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* = & \int_{\Omega/V_\Gamma} -U^*(\hat{\sigma}) \, d\Omega - \int_{V_\Gamma} U^*(\hat{\sigma} - i \sigma_{,1}) \, d\Omega + \int_{V_\Gamma} (-i \hat{\sigma} : \varepsilon_{,1} + \frac{i^2}{2} \sigma_{,1} : \varepsilon_{,1}) \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} (i \underline{n} . \hat{\sigma}^- . \underline{u}_{,1} - \frac{i^2}{2} \underline{n} . \sigma_{,1} . \underline{u}_{,1}) \, ds + \int_{\partial\Omega_u} \underline{n} . \hat{\sigma} . \underline{\hat{u}}^d \, ds \end{aligned}$$

définie sur l'ensemble des vitesses  $(\hat{\sigma}, \tilde{l})$  admissibles  $\mathcal{K}^*$ .

**Propriété.** La solution du problème d'évolution vérifie l'inéquation variationnelle

$$\frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \hat{\sigma}} \cdot (\hat{\sigma} - \tilde{\sigma}) + \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \tilde{l}} (l - \tilde{l}) \leq 0 \quad (39)$$

pour tout champ  $\tilde{\sigma}, \tilde{l}$  admissibles  $\mathcal{K}^*$  où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* = & \{(\hat{\sigma}^*, \tilde{l}) / \tilde{l} \geq 0 \text{ si } \mathcal{G} = G_c \\ & \text{div } \hat{\sigma}^* = 0, \text{ dans } \Omega, \quad \hat{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{\dot{T}}^d, \text{ sur } \partial\Omega_T, \underline{n} \cdot [\hat{\sigma}^*]_\Gamma + \tilde{l} \cdot \sigma_{,1} = 0, \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned}$$

La preuve de ces propriétés est donnée dans [6]. Les formulations obtenues généralisent les résultats présentés en [4].

## 5 Conclusion

Nous avons étendu le problème en vitesse de fissure aux cas des matériaux élastoplastiques standards et défini les approches en vitesse primale et duale du problème d'évolution. Ces approches mettent en valeur la dualité des expressions, elles permettent d'obtenir des conditions de stabilité et d'unicité complémentaires. Les formulations variationnelles ainsi définies permettent un encadrement des vitesses quand la solution du problème quasi-linéaire est unique, ce qui en fait leur intérêt premier.

On montre ainsi l'utilité d'avoir proposé une formulation par intégrale duale du problème de propagation de fissure.

## Références

- [1] H.D. Bui, Dualité entre les intégrales indépendantes du contour dans la théorie des solides fissurés, *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris, Série A*, t.376, pp.1425-1428, 1973
- [2] V.A. Lubarda, X. Markenscoff, Dual conservation integrals and energy release rates, *Int. Journal of Solids and Structures*, 44, pp. 4079-4091, 2007.
- [3] Q.S. Nguyen, Critère de propagation en rupture ductile, *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, t.301, pp. 567-570, 1985.
- [4] Q.S Nguyen, C. Stolz, Sur le problème d'évolution en vitesse de propagation de fissure et de déplacement en rupture fragile ou ductile, *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, t.301, pp.661-664, 1985.
- [5] C. Stolz, Intégrale duale en mécanique de la rupture, *Comptes Rendus Mécanique*, 336, 434-439, 2008.
- [6] C. Stolz, Sur le problème de propagation de fissure en élastoplasticité : approches primale et duale, *Comptes Rendus Mécanique*, 336, 500-505, 2008.
- [7] C. Stolz, R.M. Pradeilles-Duval, Approche énergétique de la propagation dynamique de discontinuités mécaniques, *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, t.322, Série IIb, pp. 525-532, 1996