



Modélisation par éléments finis des vibrations non linéaires d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique

Massamaesso Bilasse, El Mostafa Daya

► To cite this version:

Massamaesso Bilasse, El Mostafa Daya. Modélisation par éléments finis des vibrations non linéaires d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01418178

HAL Id: hal-01418178

<https://hal.science/hal-01418178>

Submitted on 16 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Modélisation par éléments finis des vibrations non linéaires d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique

M. Bilasse, E.M. Daya

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux,
UMR CNRS 7554, ISGMP, Université de Metz
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01 France
bilasse@univ-metz.fr, daya@lpmm.univ-metz.fr

Résumé

On présente une méthode de calcul de vibration non linéaire de poutre sandwich à cœur viscoélastique. Le mode de vibration non linéaire est approché par le mode linéaire discrétisé en éléments finis en couplant la technique de la balance harmonique à la méthode de Galerkin à un mode. Le comportement non linéaire de la poutre sandwich est décrit par une équation d'amplitude complexe dépendant de la fréquence dont les coefficients sont fonction du mode linéaire. Une base de Galerkin à mode amorti est utilisée et a été étendue par comparaison à l'hypothèse d'un mode non amorti.

Mots clés : viscoélastique, vibration non linéaire, balance harmonique, méthode de Galerkin, facteur de perte, amplitude

1 Introduction

Les structures sandwich à cœur viscoélastique trouvent leurs applications dans tous les domaines d'ingénierie et des systèmes mécaniques notamment dans l'électroménager, l'aérospatial, l'aéronautique, la construction navale, l'automobile ou le génie civil. Outre leur masse légère, ils permettent d'atténuer les vibrations assurant ainsi une isolation acoustique. Une structure sandwich à cœur viscoélastique est constituée de deux couches d'aciers intercalées en leur milieu par une couche viscoélastique (figure 1). La fonction amortissante se traduit par un cisaillement dans la couche viscoélastique dû à une différence entre les déplacements longitudinaux dans les parements d'aciers. Face à l'insuffisance des modèles analytiques quant à la modélisation des structures à géométrie complexe, des approches reposant sur l'analyse par éléments finis ont été développées par de nombreux auteurs [1-3]. L'étude des structures sandwich à cœur viscoélastique a été étendue dans le cadre des non linéarités géométriques induites par les grands déplacements où le facteur de perte, le mode et la fréquence propre dépendent de l'amplitude des vibrations [4]. Récemment une méthode analytique pour l'étude des vibrations non linéaires des structures sandwich à cœur viscoélastique a été développée par Daya et al. [5] et Boutyour et al. [6]. Dans cette approche, les modes de vibrations non linéaires sont parallèles aux modes linéaires supposés non amortis. Bien que les modèles utilisant le mode non amorti donnent de très bonnes estimations plus particulièrement pour les structures faiblement amorties, seuls les modèles utilisant le mode amorti permettent une prise en compte complète de l'amortissement dans la structure. Ainsi, le but de ce travail est de développer une méthode numérique basée sur les modes amortis pour l'étude des vibrations non linéaires et d'étudier la validité du choix des modes sur les propriétés modales du sandwich. L'analyse est menée dans le cadre éléments finis et est étendue par comparaison à l'hypothèse d'un mode non amorti.

2 Formulation cinématique et lois de comportement

On effectue l'analyse de la poutre sandwich dans les hypothèses cinématiques classiques. En appliquant la théorie d'Euler-Bernoulli aux faces élastiques et la théorie de Timoshenko au cœur viscoélastique et en tenant compte des non linéarités géométriques, le champ de déplacement et de déformation s'écrit :

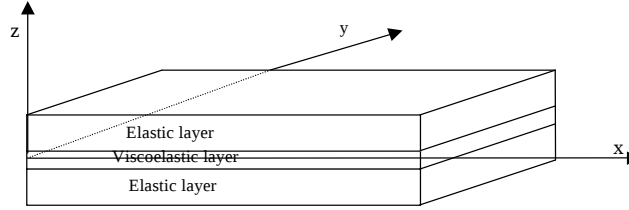


Figure 1- poutre Sandwich

pour les faces élastiques $i = 1, 3$

$$\begin{aligned} U_i(x, z, t) &= u_i(x, t) - (z - z_i) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ W_i(x, z, t) &= w(x, t) \\ \varepsilon_i(x, z, t) &= \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 - (z - z_i) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1)$$

pour le cœur viscoélastique $i = 2$

$$\begin{aligned} U_2(x, z, t) &= u(x, t) + z \beta(x, t) \\ W_2(x, z, t) &= w(x, t) \\ \varepsilon_2(x, z, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \\ \gamma_2(x, z, t) &= \frac{1}{2} \left[\beta(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

u, β et w sont respectivement le déplacement axial, la rotation et la flèche commune aux trois couches. L'état d'équilibre de la poutre sandwich est décrit par le principe des puissances virtuelles appliqué à l'ensemble des trois couches constitutives :

$$\begin{aligned} -\delta P_{\text{int}} &= \delta P_{\text{ext}} - \delta P_{\text{acc}} \\ \int_0^L \{ N \delta u' + N w' \delta w' + M_\beta \delta \beta' + M_w \delta w'' + T(\delta w' + \delta \beta) \} dx &= \int_0^L F \delta w dx - (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx \end{aligned} \quad (3)$$

N , T et F sont respectivement l'effort normal, l'effort tranchant résultant dans la poutre et l'effort extérieur, M_β et M_w les moments de flexion résultant dans la poutre.

3 Solution approchée du problème de vibration non linéaire, équation d'amplitude complexe

On analyse ici le problème de flexion issu de l'équation (3) du PPV:

$$\int_0^L \{ N w' \delta w' + M_\beta \delta \beta' + M_w \delta w'' + T(\delta w' + \delta \beta) \} dx = \int_0^L F \delta w dx - (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx \quad (4)$$

On utilise la technique de la balance harmonique [5, 6] couplée à la méthode de Galerkin à un mode [7, 8]. On cherche alors le mode non linéaire sous la forme approchée suivante:

$$\begin{Bmatrix} w(x,t) \\ \beta(x,t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} W(x) \\ B(x) \end{Bmatrix} e^{i\omega x} + CC \quad \begin{Bmatrix} \delta w(x,t) \\ \delta \beta(x,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{W}(x) \\ \bar{B}(x) \end{Bmatrix} e^{-i\omega x} \quad (5)$$

où A est l'amplitude complexe inconnue des vibrations non linéaires, ω la fréquence propre des vibrations non linéaires, $\{W, B\}$ le mode propre des vibrations linéaires et CC désigne le complexe conjugué. En plus en prenant en compte les effets axiaux, on obtient une équation d'amplitude complexe :

$$-\omega^2 MA + KA + K_{NL} \bar{A} A^2 = Q \quad (6)$$

$$M = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L |W|^2 dx, \quad K_{NL} = \int_0^L (N_0 |W'|^2 + N_{2\omega} \bar{W}'^2) dx, \quad Q = \int_0^L f \bar{W} dx$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_f (4I_f + S_f h_f^2) |W''|^2 - E_f S_f h_f h_c (W'' \bar{B}' + \bar{W}' B'') + (4(1+\nu_c) I_c G_c(\omega) + E_f S_f h_c^2) |B'|^2 + 2S_c G_c(\omega) |W' + B|^2 \right\} dx$$

4 Choix de la base de Galerkin: formulation éléments finis et mode linéaire

Le mode linéaire est déterminé par résolution du problème à valeur propre issu de (4) :

$$\int_0^L \{ M_\beta \delta \beta' + M_w \delta w'' + T(\delta w' + \delta \beta) \} dx = -(2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx \quad (7)$$

Une discrétisation éléments finis appliquée à l'équation (7) permet de ramener le problème à l'étude d'un élément 1-D à deux nœuds, chaque nœud possédant trois degrés de liberté. Ainsi pour chaque élément délimité par les nœuds i et j les variables nodales se réduisent à :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = {}^T \begin{bmatrix} w_i & w_i' & \beta_i & w_j & w_j' & \beta_j \end{bmatrix} \quad (8)$$

En utilisant une transformation géométrique linéaire avec interpolation linéaire pour les rotations et interpolation cubique pour les déplacements transverses, on a :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w \\ N_\beta \end{bmatrix} \{q^e\} \quad (9)$$

$[N_w]$ désigne la matrice des fonctions d'interpolation cubique de type Hermite et $[N_\beta]$ la matrice des fonctions d'interpolation linéaire [9]. Cet élément a été validé dans le cadre linéaire par Hu [10] pour une poutre sandwich encastree-libre par comparaison aux résultats fournis dans la référence [11] sur le déplacement transversal et la contrainte de cisaillement. Le problème discrétisé après assemblage conduit au problème à valeurs propres complexes non linéaire :

$$([K(\omega)] - \omega^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (10)$$

Ce problème est largement connu dans l'étude des structures viscoélastique et il existe différentes méthodes de résolution. Cependant grâce à leur coût numérique relativement faible les modes linéaires sont déterminés ici à l'aide de deux méthodes approchées en utilisant le logiciel **Matlab2006** : la méthode du module complexe dans l'hypothèse d'un matériau non dépendant de la fréquence par résolution directe de l'équation (10) et la méthode d'énergie de déformation modale pour un matériau dépendant de la fréquence par résolution successive du problème (11) [12] :

$$\begin{aligned} ([K(0)] - \omega_0^2 [M])\{q_0\} &= 0 \\ ([K(\omega_0)] - \omega_0^2 [M])\{q\} &= \{F\} \end{aligned} \quad (11)$$

Le vecteur $\{F\}$ représente l'amplitude des forces sinusoïdales imposées.

5 Résultats et discussion

Le modèle est appliqué sur une poutre sandwich et on présente ici les résultats obtenus pour deux types de matériaux du cœur viscoélastique: un matériau du cœur modélisé par un module complexe constant,

$$G_c(\omega) = G_0(1 + i\eta_c) \quad (12)$$

et l'ISD112 dont le module de cisaillement dépend de la fréquence et modélisé par une série de Prony à dix termes [13] :

$$G_c(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{10} \frac{\alpha_j \omega}{\omega - i\tau_j^{-1}} \right) \quad (13)$$

Après résolution des problèmes (10) et (11), les fréquences et vecteurs propres sont déterminés et permettent de calculer les constantes de l'équation d'amplitude, relation (6). Les résultats présentés ici concernent le premier mode de vibration. Les *figures 2.a* et *3.a* montrent l'évolution du rapport entre l'amortissement non linéaire et l'amortissement linéaire tandis que les *figures 2.b* et *3.b* représentent les courbes de réponse en fréquence des vibrations non linéaires. Le ratio η_{NL} / η_L décroît avec l'amplitude des vibrations. Aux faibles amplitudes, ce rapport est le même en mode amorti et en mode non amorti. Aux grandes amplitudes et dans le cas d'un matériau non dépendant de la fréquence, le ratio η_{NL} / η_L n'est conservé que pour des facteurs de perte de la couche centrale faibles $\eta_c = 0.2$ et 0.5 . La différence du ratio en mode réel et mode complexe augmente avec le facteur de perte. On peut remarquer qu'autour de la fréquence de résonnance (*figure 2.b*), l'amplitude normalisé r/h est le même en mode amorti et en mode non amorti pour de faibles facteurs de perte de la couche viscoélastique. Ce qui n'est pas le cas pour les facteurs de perte élevés $\eta_c = 1$ et 1.3

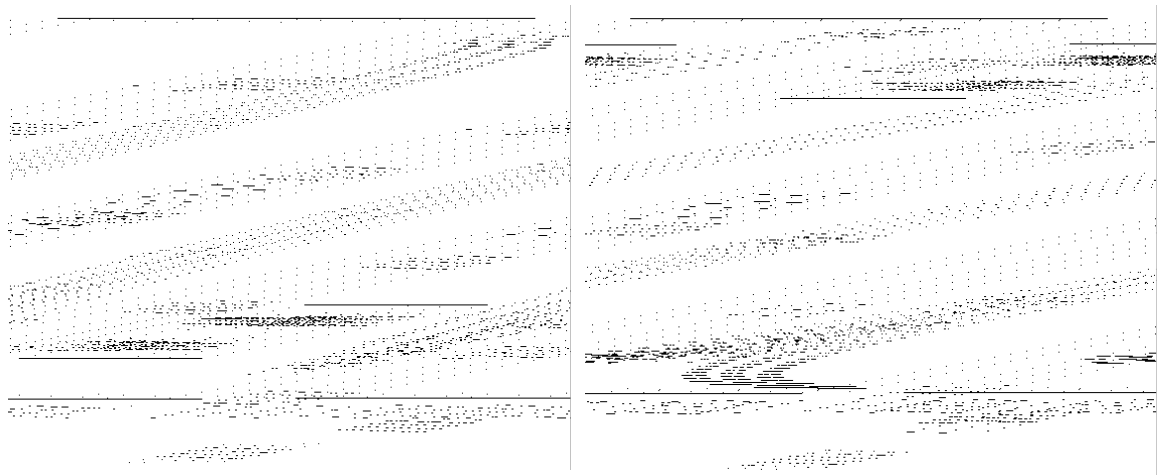


Figure 2- matériau non dépendant de la fréquence, 1^{er} mode de vibration
(a) ratio η_{NL} / η_L en fonction de l'amplitude, (b) amplitude en fonction de la fréquence $f=2$

Pour un matériau du cœur dépendant de la fréquence, on observe de même que le rapport η_{NL}/η_L décroît en fonction de l'amplitude des vibrations et est pratiquement le même en mode réel et en mode complexe aux basses amplitudes (figure 3.a). Aux grandes amplitudes, ce rapport n'est conservé que pour des températures élevées. Une bifurcation est constatée pour les basses températures et le tableau 1 présente les facteurs de perte correspondant de la couche viscoélastique. La différence du ratio η_{NL}/η_L en mode réel et en mode complexe augmente significativement avec le facteur de perte.

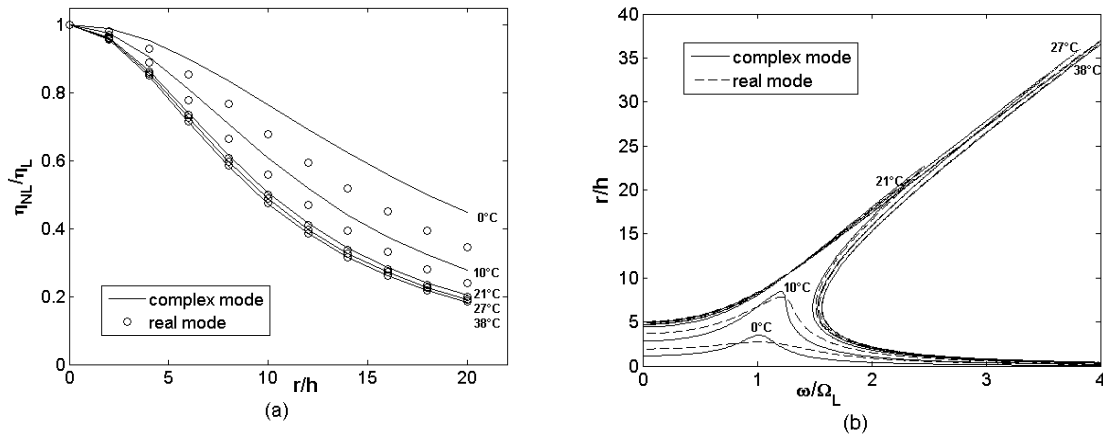


Figure 3- matériau ISD112 dépendant de la fréquence, 1^{er} mode de vibration
(a) ratio η_{NL}/η_L en fonction de l'amplitude, (b) amplitude en fonction de la fréquence $f=2$

Cette remarque est aussi valable pour les courbes de réponse (figure 3.b). L'amplitude normalisée r/h est le même en mode amorti et en mode non amorti aux températures élevées correspondant à des facteurs de perte faibles de la couche viscoélastique. Ceci montre l'influence du facteur de perte du cœur viscoélastique sur le choix d'un mode non amorti. Ainsi, il est déductible qu'aux grandes amplitudes, l'hypothèse d'un mode non amorti n'est réaliste que pour un sandwich à cœur faiblement amorti.

Température °C	0	10	21	27	38
$\omega_0 = 109.03 \text{ rad.s}^{-1}$	1,324	0.944	0.505	0.346	0.168

Tableau 1- facteur de perte $\eta_c(\omega_0, T)$

6 Conclusion

Dans cet article, il a été présenté une méthode de calcul de vibration non linéaire de poutre sandwich basée sur un mode amorti de vibration linéaire. A partir des hypothèses cinématiques classiques, on s'est particulièrement intéressé au problème de flexion non linéaire. Le mode de vibration non linéaire est approché à partir du mode linéaire en utilisant la méthode de la balance harmonique couplée à la méthode de Galerkin à un mode. Une équation d'amplitude complexe non linéaire est alors établie dont les coefficients dépendent du mode linéaire amorti formant la base de Galerkin. En utilisant un élément fini de type poutre, le mode linéaire est issu de la résolution approchée d'un problème à valeurs propres complexes non linéaire. Bien que la méthode ici développée soit bien adaptée aux structures amorties, l'étude a été étendue par comparaison à l'hypothèse d'un mode linéaire non amorti. L'analyse montre l'influence du facteur de perte de la couche viscoélastique sur le choix de la base de Galerkin. Il ressort que pour un sandwich à cœur faiblement amorti, l'utilisation d'une base de Galerkin à mode réel donne de très bonnes estimations. Néanmoins la prise en compte d'un mode amorti serait d'un

grand intérêt pour le calcul des structures hautement amorties. La méthode développée ici est limitée à une approximation modale à un mode amorti et pourrait être étendue à une analyse multimodale.

Références

- [1] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers & Structures*, 79(5):533–541, February 2001.
- [2] Laëtitia Duigou, El Mostafa Daya, and Michel Potier-Ferry. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12):1323–1335, March 2003.
- [3] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, In Press, Corrected Proof:–.
- [4] M. Ganapathi, B. P. Patel, P. Boisse, and O. Polit. Flexural loss factors of sandwich and laminated composite beams using linear and nonlinear dynamic analysis. *Composites Part B: Engineering*, 30(3):245–256, April 1999.
- [5] E. M. Daya, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5):789–813, April 2004.
- [6] El Hassan Boutyour, El Mostafa Daya, and Michel Potier-Ferry. A harmonic balance method for the non-linear vibration of viscoelastic shells. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(1):68–73, January 2006.
- [7] M. G. Sainsbury and Q. J. Zhang. The galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams. *Computers & Structures*, 71(3):239–256, May 1999.
- [8] Q. J. Zhang and M. G. Sainsbury. The galerkin element method applied to the vibration of rectangular damped sandwich plates. *Computers & Structures*, 74(6):717–730, February 2000.
- [9] Gouri Dhat and Gilbert Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. 2ème édition, 1984.
- [10] Heng HU. *Modélisation multi-échelle des structures sandwich*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 2006.
- [11] J.L. Batoz and G.Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. volume 1, HERMES, Paris, 1990.
- [12] M. L. Soni. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 55 (1):97–109, 1981.
- [13] Luciano Afonso da Silva. *Internal Variable and Temperature Modeling Behavior of Viscoelastic Structures - A Control Analysis*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.