HAL open science

Une approche hiérarchique pour l'analyse de poutres composites

Philippe Vidal, Olivier Polit

▶ To cite this version:

Philippe Vidal, Olivier Polit. Une approche hiérarchique pour l'analyse de poutres composites. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01416075

HAL Id: hal-01416075
https://hal.science/hal-01416075v1

Submitted on 14 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Une approche hiérarchique pour l'analyse de poutres composites

P. Vidal, O. Polit

LMpX - Université Paris Ouest
50, rue de Sèvres
92410 Ville d'Avray, France
{pvidal,opolit}@u-paris10.fr

Résumé — Ce travail présente une approche élément fini hiérarchique 1D prenant en compte ou non l'effet de la contrainte normale transverse pour des structures poutres composites et sandwichs. Le but de cette étude est de proposer une famille d'EF simple et efficace. Elle est basée sur une approche de type couche équivalente avec l'exploitation d'un modèle sinus raffiné par couche, tout en respectant la physique. Les résultats obtenus sont comparés à des solutions exactes. Une étude de convergence (vitesse, précision) est également effectuée.

Mots clés — composite, modèle raffiné, élément fini.

1 Introduction

Les composites stratifiés et sandwichs, de plus en plus utilisés dans les structures aéronautique, maritime, ... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques, sont soumis à des sollicitations mécanique et/ou thermique sévères. Les effets locaux aux interfaces des couches doivent donc être évalués de façon précise et efficace. Dans ce but, nous développons ici une approche élément fini hiérarchique 1D prenant en compte ou non l'effet de la contrainte normale transverse pour des structures poutres composites et sandwichs. Deux grandes approches se distinguent. D'une part, les théories classiques des stratifiés, ou les théories de déformation du premier ordre, ou d'ordre supérieure présentent un nombre d'inconnues réduit mais ne respecte pas les considérations physiques [4, 1]. D'autre part, l'approche couche discrète [7, 2] pallie la restriction précédente, mais le nombre d'inconnues augmentent avec le nombre de couches.

Dans cette étude, une théorie de type couche équivalente est utilisée avec l'exploitation d'un modèle sinus [8] raffiné par couche [9]. Cette cinématique particulière est enrichie par 3 inconnues par couche et permet d'assurer :

- la continuité des déplacements aux interfaces entre les couches ;
- une distribution cosinus de la contrainte de cisaillement transverse qui évite l'utilisation de coefficients correcteurs en cisaillement transverse ;
- la continuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces des couches ;
- les conditions limites en efforts sur les faces inférieures et supérieures.

Ceci est possible grâce à la fonction Heaviside et au principe de double superposition [5]. Un élément fini conforme efficace et sans pathologie numérique a été développé dans [3], et est réutilisé dans ce travail.

Différents tests statique et thermomécanique pour des poutres minces et épaisses avec différents empilements permettent d'évaluer cette famille d'E.F par rapport aux solutions issues de l'élasticité [6] et de calculs EF 2D. Des études de convergence sont effectuées afin de montrer l'efficacité de cet E.F à la fois sur les aspects vitesse et précision. De plus, les exemples traités montrent la nécessité de prendre en compte la contrainte normale transverse pour traiter le couplage thermomécanique et les cas épais.

2 Le problème mécanique

Considérons une poutre de section rectangulaire occupant le domaine $\mathcal{B} = \Omega \times [-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}] \times [-\frac{b}{2} \leq x_2 \leq \frac{b}{2}]$. Elle est constituée de NC couches pouvant présenter chacune un comportement isotrope transverse (Cf. Figure 1). Le problème à résoudre consiste à chercher le déplacement $\vec{u}(M)$ et la contrainte $\sigma(M)$ qui vérifient les conditions limites, l'équation d'équilibre, et la relation de comportement.

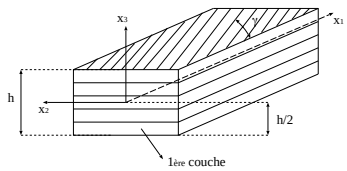

Figure 1 – empilement du stratifié

2.1 La cinématique

La cinématique des deux modèles s'écrit de la façon suivante (avec $w' = \partial w / \partial x_1$) :

1. le modèle SinRef-6p (pour 6 paramètres) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1(x_1,x_2,z) & = & u(x_1) - z\, w_0(x_1)_{,1} + f(z)(\omega_3(x_1) + w_0(x_1)_{,1}) \\ & & + \sum_{k=1}^{NC} \left(\vec{u}_{loc}^{(k)}(x_1,z) + \hat{u}_{loc}^{(k)}(x_1,z) \right) (H(z-z_k) - H(z-z_{k+1})) \\ u_3(x_1,x_2,z) & = & w_0(x_1) + z w_1(x_1) + z^2 w_2(x_1) \end{array} \right. \quad (1)$$

2. le modèle SinRef-7p (pour 7 paramètres) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1(x_1,x_2,z) & = & u(x_1) + z\, v(x_1) + f(z)(\omega_3(x_1) + w_0(x_1)_{,1}) \\ & & + \sum_{k=1}^{NC} \left(\vec{u}_{loc}^{(k)}(x_1,z) + \hat{u}_{loc}^{(k)}(x_1,z) \right) (H(z-z_k) - H(z-z_{k+1})) \\ u_3(x_1,x_2,z) & = & w_0(x_1) + z w_1(x_1) + z^2 w_2(x_1) \end{array} \right. \quad (2)$$

où H est la fonction Heaviside. Dans le contexte du modèle sinus, nous avons $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$. De manière classique, w_0 est la flèche, u le déplacement axial de la fibre neutre, et ω_3 la rotation de la section. On remarque que la dérivée de la flèche est remplacée par une nouvelle fonction dans le modèle SinRef-7p. Les fonctions locales $\vec{u}_{loc}^{(k)}$ et $\hat{u}_{loc}^{(k)}$ basées sur les polynômes de Legendre s'écrivent en fonction des coordonnées adimensionnées $\zeta_k \in [-1,1]$ et de 3 fonctions inconnues u_{3i}^k :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{u}_{loc}^{(k)}(x_1,z) & = & \zeta_k u_{31}^k(x_1) + (-\frac{1}{2} + \frac{3\zeta_k^2}{2}) u_{32}^k(x_1) \\ \hat{u}_{loc}^{(k)}(x_1,z) & = & (-\frac{3\zeta_k}{2} + \frac{5\zeta_k^3}{2}) u_{33}^k(x_1) \end{array}\right. \tag{3}$$

On aboutit alors à $3 \times NC + 5$ et $3 \times NC + 6$ déplacements généralisés pour chacun des modèles.

2.2 Conditions de continuité et de bords libres

En se basant sur les considérations physiques, on aboutit à des relations entre les inconnues cinématiques. Pour cela, on prend en compte :

- les conditions limites en peau supérieure et inférieure,
- les conditions de continuité interlaminaires (déplacement avec le principe de double superposition [5], contrainte de cisaillement transverse).

On obtient ainsi $3 \times (NC - 1) + 2$ conditions, ce qui réduit le nombre d'inconnues de nos modèles à 6 (u, w_0, w_1, w_2, ω_3, u_{31}^1) et 7 (v en plus) respectivement. La variation de ces inconnues est liée à la discrétisation 1D.

3 Résultats numériques

On se place dans le cadre d'une méthode élément fini conforme, avec un E.F de poutre 1D à 3 noeuds. Cet élément a déjà montré qu'il ne présentait pas de verrouillage en cisaillement transverse. Les résultats issus du modèle noté SinRef-c sont également donnés, celui-ci ne prend pas en compte la déformation normale transverse, cf. [9].

3.1 Problème mécanique

3.1.1 Etude de convergence

Tout d'abord, un test de convergence est effectué pour évaluer les performances de ce modèle. Il est détaillé ci-dessous :

géométrie : poutre composite $(0°/90°/0°)$ et S=4 ($S = \frac{L}{h}$) ; les couches ont la même épaisseur.

conditions limites : poutre simplement appuyé soumise à une pression sinusoïdale $q(x_1) = q_0 \sin \dfrac{\pi x_1}{L}$.

propriétés matériau : $E_L = 172.4\,\text{GPa}$, $E_T = 6.895\,\text{GPa}$, $G_{LT} = 3.448\,\text{GPa}$, $G_{TT} = 1.379\,\text{GPa}$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$ où L se réfère à la direction des fibres et T la direction transverse.

résultats : les grandeurs sont adimensionnées : $\bar{w} = \frac{100 E_T u_3(L/2,0)}{S^4 h q_0}$ $\bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}(0,0)}{q_0}$ $\bar{\sigma}_{11} = \frac{\sigma_{11}(L/2,\pm h/2)}{q_0}$ σ_{13} est calculée avec la relation de comportement (noté direct) ou bien par intégration des équations d'équilibre (noté eq. equil).

3.1.2 Cas d'un 3 couches (0°/90°/0°)

Le Tableau 1 montre que la vitesse de convergence de l'élément associé au modèle SinRef-6p est très rapide, à la fois pour la contrainte de cisaillement transverse, et le déplacement transverse. Celui-ci est moins sensible au maillage. On peut en déduire qu'un maillage N=8 éléments est approprié pour modéliser un composite stratifié épais. De plus, on constate que les résultats obtenus sont en excellente adéquation avec les valeurs de référence, notamment la contrainte de cisaillement évaluée directement à l'aide de la relation de comportement. Les mêmes constatations peuvent être dressées pour le modèle SinRef-7p.

N	Nb ddls	$\bar{w}(L/2,0)$		$\bar{\sigma}_{13}(0,0)$			
			err	direct	err	eq equil	err
1	12	2 8984	0 4 %	1 4395	0 6 %	0 9404	34 %
2	24	2 8897	0 1 %	1 4184	0 9 %	1 2974	9 %
4	48	2 8887	0 1 %	1 4168	1 %	1 3960	2 %
8	96	2 8886	0 0 %	1 4167	1 %	1 4212	0 7 %
16	192	2 8886	0 0 %	1 4328	0 1 %	1 4421	0 7 %

Tableau 1 – $\bar{\sigma}_{13}(0,0)$ et $\bar{w}(L/2,0)$ en fonction du nombre de ddls : étude de convergence - 3 couches (0°/90°/0°) - S=4 - SinRef-6p

D'après les Tableaux 2 et 3, tous les modèles aboutissent à de très bons résultats pour un élancement supérieur à 4. Globalement, on note une amélioration de la précision des contraintes avec le modèle SinRef-7p. Ceci est d'autant plus prononcé pour le cas très épais (S=2). On remarque alors que les 2 modèles incluant l'effet transverse prennent bien en compte la dissymétrie qui apparaît sur les contraintes de cisaillement transverse et dans le plan.

S	$\sigma_{13}(0,0)$												
	SinRef-7p				SinRef-6p				SinRef-c				
	direct	err	eq equil	err	direct	err	eq equil	err	direct	err	eq equil	err	exact
2	0 5328	0 2 %	0 5312	0 5 %	0 4841	9 %	0 5300	0 8 %	0 4989	6 %	0 5379	0 6 %	0 5343
4	1 4303	< 0 1 %	1 4216	0 7 %	1 4167	1 %	1 4212	0 7 %	1 4213	< 1 %	1 4236	< 1 %	1 4318
20	8 7480	< 0 01 %	8 6965	0 5 %	9 006	2 9 %	8 697	0 5 %	9 0052	2 9 %	8 6973	< 1 %	8 7490
40	17 642	< 0 01 %	17 539	0 5 %	18 186	3 %	17 539	0 5 %	18 184	3 %	17 539	< 1 %	17 634

Tableau 2 – $\bar{\sigma}_{13}(0,0)$ pour différentes valeurs de S - 3 couches (0°/90°/0°)

S	$\sigma_{11}(L/2,h/2)$						
	SinRef-7p	err	SinRef-6p	err	SinRef-c	err	exact
2	9 70	9 %	9 74	9 %	8 07	9 %	8 90
2 (-h/2)	6 96	1 2 %	7 01	1 9 %	8 07	17 %	6 87
4	18 4	2 %	19 0	1 %	18 6	1 %	18 8
20	264 2	0 3 %	264 0	< 0 5 %	264 0	< 0 5 %	263 2
40	1023 2	0 3 %	1023 0	< 0 5 %	1023 0	< 0 5 %	1019 8

Tableau 3 – $\bar{\sigma}_{11}(L/2,h/2)$ pour différentes valeurs de S - 3 couches (0°/90°/0°)

3.1.3 Cas d'un sandwich

Le cas traité est un sandwich soumis à une pression uniforme et encastré à chaque extrémité dont les propriétés du coeur et des faces sont les suivantes : Face (0.1 h) : $E_{11} = 131.1$ GPa, $E_{22} = E_{33} = 6.9$ GPa, $G_{12} = 3.588$ GPa, $G_{13} = 3.088$ GPa, $G_{23} = 2.3322$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.32$, $\nu_{23} = 0.49$.
Coeur (0.8 h) : $E_{11} = 0.2208$ MPa, $E_{22} = 0.2001$ MPa, $E_{33} = 2760$ MPa, $G_{12} = 16.56$ MPa, $G_{13} = 545.1$ MPa, $G_{23} = 455.4$ MPa, $\nu_{12} = 0.99$, $\nu_{13} = 0.00003$, $\nu_{23} = 0.00003$.

D'après la Figure 2, on remarque que le modèle SinRef-7p prédit de façon précise la répartition des contraintes dans l'épaisseur en comparant à une approche 2D à 3000 ddls pour une poutre épaisse. En particulier, on note de nouveau la dissymétrie, et la capacité du modèle à représenter la forte localisation des contraintes de cisaillement transverse dans les peaux.

3.2 Problème thermo-mécanique

La famille de modèles est testée sur un problème couplé thermomécanique. La configuration est identique à la section précédente. Le chargement thermique consiste à imposer une température qui vaut $T(x_1,z) = T_{max}\frac{2z}{h}\sin(\frac{\pi x_1}{L})$. Les coefficients de dilatation thermique sont telles que $\dfrac{\alpha_T}{\alpha_L} = 1125$. Les résultats de référence sont issus de l'extension des travaux de Pagano [6].

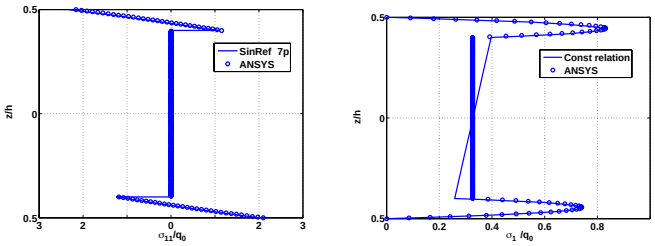

Figure 2 – distribution de $\bar{\sigma}_{11}$ et $\bar{\sigma}_{13}$ dans l'épaisseur - S=2.5 - sandwich - SinRef-7p - pression uniforme - C/C

L'exemple choisi se restreint volontairement au cas d'un empilement 3 couches où les résultats sont significatifs.
Les Tableaux 4 et 5 montrent clairement l'importance de la prise en compte de la contrainte normale transverse dans le modèle. L'amélioration des résultats sur les contraintes est significative entre le modèle SinRef-c d'une part, et les modèles SinRef-6p et SinRef-7p d'autre part. On note également l'excellente corrélation avec les résultats de référence. L'erreur reste inférieure à 3 % quel que soit l'élancement.

S	$\sigma_{13}(0,0)$												
	SinRef-7p				SinRef-6p				SinRef-c				
	direct	error	eq equil	error	direct	error	eq equil	error	direct	error	eq equil	error	exact
4	21 4280	0 04 %	21 7350	1 5 %	20 2340	5 %	21 7010	1 3 %	6 8092	68 %	14 3210	33 %	21 4178
10	7 1544	0 1 %	7 2837	2 %	6 2585	12 %	7 2771	1 8 %	3 7459	47 %	6 5851	7 %	7 1436
50	1 3522	0 1 %	1 3778	2 %	1 1538	14 %	1 3777	2 %	0 8040	40 %	1 3629	1 %	1 3497
100	0 6748	0 1 %	0 6876	2 %	0 5753	14 %	0 6875	2 %	0 4029	40 %	0 6822	1 %	0 6735

Tableau 4 – $\bar{\sigma}_{13}(0,0)$ (maxi) pour différentes valeurs de S - 3 couches (0°/90°/0°)

S	$\bar{\sigma}_{11}(L/2,-h/2)$						
	SinRef-7p	error	SinRef-6p	error	SinRef-c	error	exact
4	289 17	2 8 %	288 10	2 %	4 4627	98 %	281 11
10	88 63	1 4 %	88 19	1 %	32 96	62 %	87 41
50	45 83	2 5 %	45 80	2 %	43 0390	3 %	44 70
100	44 44	2 6 %	44 44	2 %	43 3780	0 1 %	43 31

Tableau 5 – $\bar{\sigma}_{11}(L/2,-h/2)$ pour différentes valeurs de S - 3 couches (0°/90°/0°)

Les Figures 3 et 4 confirment les excellents résultats obtenus. Les variations des contraintes et du déplacement dans l'épaisseur sont conformes aux résultats de référence même pour une poutre épaisse. On note que le déplacement transverse n'est pas constant.

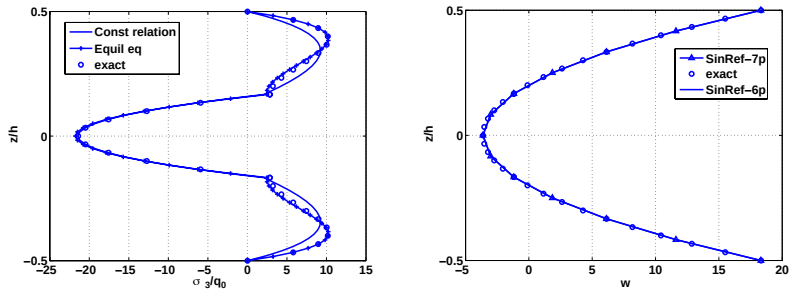

Figure 3 – distribution de $\bar{\sigma}_{13}$ (gauche) et $\bar{w}$ (droite) dans l'épaisseur - S=4 - 3 couches (0°/90°/0°) - modèle SinRef-7p

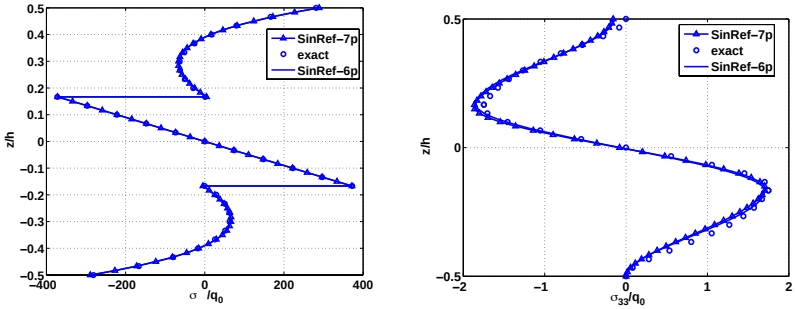

Figure 4 – distribution de $\bar{\sigma}_{11}$ (gauche) et $\bar{\sigma}_{33}$ (droite) dans l'épaisseur - S=4 - 3 couches (0°/90°/0°)

4 Conclusions

Deux nouveaux éléments finis ont montré leur performance en terme de précision et d'efficacité à travers différents exemples mécaniques et thermomécaniques. Cette famille garde un sens physique en assurant la continuité de la contrainte de cisaillement transverse aux interfaces entre les couches. L'étude a montré l'importance de la prise en compte de l'effet de la contrainte normale transverse, spécifiquement pour traiter les phénomènes couplés et les cas épais. On note également la performance de cette famille EF pour évaluer la contrainte de cisaillement transverse par la relation de comportement directement. Au final, on aboutit à une approche simple et efficace à faible coût par rapport aux approches couches discrètes.

Références

[1] A. Barut, E. Madenci, J. Heinrich, and A. Tessler. Analysis of thick sandwich construction by a {3,2}-order theory. *International Journal of Solids and Structures*, 38,6063–6077, 2001.

[2] E. Carrera. A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells. *Journal of Sound and Vibration*, 225, 803–829, 1999.

[3] M. Ganapathi, B. Patel, O. Polit, and M. Touratier. A C^1 finite element including transverse shear and torsion warping for rectangular sandwich beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 47–75, 1999.

[4] T. Kant and K. Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structures*, 56, 329–344, 2002.

[5] X. Li and D. Liu. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1197–1212, 1997.

[6] N. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, 3, 398–411, 1969.

[7] P. Pai and A. Palazotto. A higher-order sandwich plate theory accounting for a 3-D stresses. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 5045–5062, 2001.

[8] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29, 901–916, 1991.

[9] P. Vidal and O. Polit. A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams. *Composite Structures*, 84, 56–72, 2008.