



HAL
open science

Méthodes spectrales stochastiques et réduction de modèle pour l'analyse dynamique de structures en présence d'incertitudes

Mathilde Chevreuil, Anthony Nouy

► To cite this version:

Mathilde Chevreuil, Anthony Nouy. Méthodes spectrales stochastiques et réduction de modèle pour l'analyse dynamique de structures en présence d'incertitudes. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01416073

HAL Id: hal-01416073

<https://hal.science/hal-01416073>

Submitted on 14 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Méthodes spectrales stochastiques et réduction de modèle pour l'analyse dynamique de structures en présence d'incertitudes

M. Chevreuil, A. Nouy

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)
Université de Nantes, Centrale Nantes, UMR CNRS 6183
2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 3
{mathilde.chevreuil,anthony.nouy}@univ-nantes.fr

Résumé — Une méthode de réduction de modèle *a priori* est introduite pour la simulation numérique de la réponse fréquentielle de structures aléatoires par des approches spectrales stochastiques. La technique de décomposition spectrale généralisée est utilisée pour obtenir une représentation quasi-optimale de la solution aléatoire sur une base réduite de modes déterministes, la base étant enrichie à chaque nouvelle fréquence calculée. La méthode permet ainsi de générer une base réduite pertinente pour la représentation de la réponse aléatoire sur la bande de fréquence étudiée.

Mots clés — Méthodes spectrales stochastiques, décomposition spectrale généralisée, séparation de variables, réduction de modèle.

1 Introduction

La conception robuste des systèmes mécaniques nécessite de prendre en compte dans le modèle différentes sources d'incertitudes et de prédire leur impact sur la réponse du modèle. Notamment, la réponse dynamique des structures peut être fortement perturbée par de faibles variabilités sur le modèle. Il est alors nécessaire de développer des méthodes robustes et efficaces pour la prédiction de cette réponse aléatoire. Dans un cadre probabiliste, le calcul de la réponse fréquentielle des structures demande la résolution d'un système d'équations aléatoires définies sur une certaine bande fréquentielle. Pour le choix d'une modélisation probabiliste des incertitudes, on peut distinguer les visions paramétriques et non-paramétriques [1]. Dans la vision non-paramétrique, on construit directement un espace probabilisé pour le modèle algébrique (espace probabilisé de matrices sous certaines contraintes : symétrie, positivité, caractère bande). Cette approche permet en quelque sorte de rendre compte d'une erreur sur la sélection du modèle mécanique. La dimension de l'espace probabilisé de travail est généralement telle qu'on privilégie des simulations de Monte-Carlo pour le calcul de la réponse aléatoire. Dans la vision paramétrique, l'espace probabilisé de travail est défini par les paramètres classiques du modèle mécanique continu, modélisés par des variables aléatoires. Dans cette vision, lorsque la dimension stochastique est modérée, les méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin [2, 3] offrent un outil robuste permettant d'obtenir une prédiction précise de la réponse. Ces méthodes sont basées sur une formulation faible du problème et l'introduction d'un espace d'approximation ad-hoc au niveau stochastique [4].

Les méthodes spectrales conduisent à une prédiction de la réponse qui est explicite en fonction des variables aléatoires de base. Des post-traitements rapides sont alors possibles et conduisent à des informations d'intérêt (enveloppe des fonctions de réponse en fréquence, sensibilité de la

réponse par rapport aux variables de base), souvent imprécises ou inaccessibles avec une méthode de Monte-Carlo classique. Cependant, si on considère des modèles numériques très fins au niveau déterministe et si on cherche la réponse sur une large bande fréquentielle, on est amené à résoudre pour un grand nombre de fréquences un système d'équations de très grande taille.

On propose ici une méthode de réduction de modèle permettant de réduire considérablement les coûts de calcul des approches spectrales pour le calcul de la réponse dynamique aléatoire en basse fréquence. On applique pour cela la technique de décomposition spectrale généralisée (GSD) proposée dans [5, 6], étendue ici au cadre complexe, afin de résoudre le problème stochastique à chaque fréquence. La méthode GSD permet de générer une représentation quasi-optimale de la solution sur une base réduite de vecteurs (ou modes) déterministes et de fonctions stochastiques. La base réduite de modes déterministes est conservée et enrichie à chaque fréquence calculée, et peut être ré-utilisée pour la résolution des problèmes stochastiques associés aux fréquences encore non calculées. L'approche proposée permet ainsi de générer de manière automatique une base réduite de modes donnant une représentation précise de la solution aléatoire sur une certaine bande de fréquence.

2 Analyse dynamique des structures en présence d'incertitudes

On suppose ici que l'aléa sur la structure est caractérisé par un certain nombre de variables aléatoires $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$, définissant un espace probabilisé de travail $(\Xi, \mathcal{B}_\Xi, P_\xi)$, où P_ξ désigne la loi de probabilité de ξ . On s'intéresse à l'étude de la réponse fréquentielle d'une structure élastique sur une certaine bande de fréquence $I = [\omega_{min}, \omega_{max}]$. Une approximation éléments finis est utilisée au niveau spatial. On note $\mathbf{u} : I \times \Xi \rightarrow \mathbb{C}^N$ la réponse fréquentielle, solution du système d'équations aléatoires suivant :

$$(-\omega^2 \mathbf{M}(\xi) + i\omega \mathbf{C}(\omega, \xi) + \mathbf{K}(\xi)) \mathbf{u}(\omega, \xi) = \mathbf{f}(\omega, \xi) \quad (1)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{C} désignent respectivement les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement, ces matrices étant aléatoires et dépendant éventuellement de la fréquence. Le vecteur aléatoire $\mathbf{f}(\omega, \cdot)$ désigne l'excitation à la fréquence ω .

3 Méthodes spectrales stochastiques

Le principe des méthodes spectrales stochastiques consiste à rechercher une approximation de la solution $\mathbf{u}(\omega, \xi)$ sous la forme d'un développement $\mathbf{u}(\omega, \xi) = \sum_{\alpha=1}^P \mathbf{u}_\alpha(\omega) \Psi_\alpha(\xi)$, où $\{\Psi_\alpha(\xi)\}_{\alpha=1}^P$ désigne une base d'approximation des fonctions de carré intégrable définies sur $(\Xi, \mathcal{B}_\Xi, P_\xi)$. On note $\mathcal{S}_P \subset L^2(\Xi, dP_\xi; \mathbb{R})$ l'espace d'approximation associé. Les $\mathbf{u}_\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}^N$ sont les coefficients de \mathbf{u} sur cette base d'approximation. Les méthodes spectrales de type Galerkin définissent la solution approchée $\mathbf{u}(\omega, \cdot) \in \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{S}_P$ à partir de la formulation faible du problème (1) :

$$E (Re (\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{u})) = E (Re (\mathbf{v}^H \mathbf{f})) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{S}_P \quad (2)$$

où E désigne l'espérance mathématique, où $Re(\cdot)$ désigne la partie réelle, où \cdot^H désigne le transposé conjugué et où $\mathbf{A}(\omega, \xi) = -\omega^2 \mathbf{M}(\xi) + i\omega \mathbf{C}(\omega, \xi) + \mathbf{K}(\xi)$. Pour chaque fréquence, la recherche de l'approximation nécessite donc la résolution du problème discrétisé (2), qui est un système de $2NP$ équations. Pour des applications de grande taille, le nombre de degrés de liberté N peut être très élevé. De plus, dans ce contexte d'analyse fréquentielle, la dépendance de la solution par rapport aux variables aléatoires peut être très irrégulière, ce qui nécessite l'utilisation de bases d'approximation très fine au niveau stochastique (grand P). L'utilisation d'algorithmes itératifs classiques (de type Krylov) peut donc être prohibitive.

4 Réduction de modèle par décomposition spectrale généralisée

On propose ici une méthode de réduction de modèle pour la résolution efficace du problème (1) sur une certaine bande de fréquence. On applique pour cela la technique de décomposition spectrale généralisée (GSD) proposée dans [5, 6], et étendue ici au cadre complexe, afin de résoudre le problème stochastique à chaque fréquence. La méthode GSD permet de générer une représentation quasi-optimale de la solution sur une base réduite de vecteurs déterministes et de fonctions stochastiques.

4.1 La méthode GSD comme solveur d'équations stochastiques

Pour une fréquence $\omega \in I$ donnée, la méthode GSD peut être utilisée pour la résolution du problème (2). Elle permet le calcul d'une représentation quasi-optimale de la solution sur une base réduite de vecteurs déterministes et de fonctions stochastiques : $\mathbf{u}_m(\omega, \xi) \approx \sum_{i=1}^{m(\omega)} \mathbf{w}_i(\omega) \lambda_i(\omega, \xi)$, avec $\mathbf{w}_i \in \mathbb{C}^N$, $\lambda_i \in \mathcal{S}_P$ et $m(\omega) \ll N$. Les bases réduites optimales sont définies par un double critère d'orthogonalité de Galerkin. On montre alors que ces bases sont solution d'un problème interprété comme un problème aux valeurs propres. Différents algorithmes ont été proposés dans [5, 6] pour la construction de ces bases réduites. Ils sont aisément transposables au cadre complexe. Nous présentons ici un algorithme simple qui consiste à construire les couples $(\mathbf{w}_i, \lambda_i)$ de la décomposition de manière successive. Supposons qu'une approximation \mathbf{u}_m d'ordre m ait été construite et notons $\mathbf{f}^m = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}_m$ le nouveau résidu du problème (2). Un nouveau couple $(\mathbf{w}, \lambda) \in \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{S}_P$ est alors défini par les deux équations suivantes :

$$E(\tilde{\lambda} \mathbf{A}_\mathbf{w} \lambda) = E(\tilde{\lambda} f_\mathbf{w}^m) \quad \forall \tilde{\lambda} \in \mathcal{S}_P \quad (3)$$

$$Re(\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{A}_\lambda \mathbf{w}) = Re(\tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{f}_\lambda^m) \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}^N \quad (4)$$

où $\mathbf{A}_\lambda = E(\mathbf{A}(\omega, \cdot) \lambda \lambda)$, $\mathbf{f}_\lambda^m = E(\mathbf{f}^m(\omega, \cdot) \lambda)$, $\mathbf{A}_\mathbf{w}(\xi) = Re(\mathbf{w}^H \mathbf{A}(\omega, \xi) \mathbf{w})$ et $f_\mathbf{w}^m(\xi) = Re(\mathbf{w}^H \mathbf{f}^m(\omega, \xi))$. Un algorithme itératif simple est alors utilisé pour rechercher le couple (\mathbf{w}, λ) solution. Il consiste à résoudre les équations (3) et (4) en fixant alternativement \mathbf{w} puis λ . Pour \mathbf{w} fixé, le problème (3) apparaît comme une simple équation stochastique algébrique, tandis que pour λ fixé, le problème (4) apparaît comme un simple problème déterministe (systèmes d'équations complexes). Peu d'itérations suffisent pour obtenir une bonne estimation du couple optimal (\mathbf{w}, λ) . On montre que l'algorithme proposé correspond à une méthode des puissances avec déflation pour la résolution du problème aux valeurs propres étendus définissant les couples de $(\mathbf{w}_i, \lambda_i)$.

4.2 Enrichissement et réutilisation de la base réduite

On propose ici de conserver et d'enrichir la base réduite de modes déterministes à chaque fréquence calculée. Pour chaque nouvelle fréquence, cette base réduite peut alors être réutilisée. Notons $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M)$ la base réduite de vecteurs déterministes construite et enrichie durant les résolutions aux fréquences précédentes. Pour une nouvelle fréquence $\omega \in I$, on procède de la manière suivante pour résoudre le nouveau problème (2). Une première approximation $u_M(\omega, \xi) = \sum_{i=1}^M \mathbf{w}_i \lambda_i(\omega, \xi)$ de la solution est d'abord recherchée sur la base réduite \mathbf{W} en résolvant un système d'équations stochastiques algébriques :

$$E(\tilde{\Lambda}^T \mathbf{A}_\mathbf{W} \Lambda) = E(\tilde{\Lambda}^T \mathbf{f}_\mathbf{W}) \quad \forall \tilde{\Lambda} \in \mathbb{R}^M \otimes \mathcal{S}_P$$

avec $\mathbf{A}_\mathbf{W}(\omega, \xi) = Re(\mathbf{W}^H \mathbf{A}(\omega, \xi) \mathbf{W})$ et $\mathbf{f}_\mathbf{W}(\omega, \xi) = Re(\mathbf{W}^T \mathbf{f}(\omega, \xi))$. On teste alors la précision de la solution \mathbf{u}_M (estimation d'erreur par évaluation du résidu). Si l'approximation n'atteint pas la précision souhaitée, on utilise l'algorithme GSD (section 4.1) pour construire une décomposition d'ordre supérieure. La base réduite de modes \mathbf{W} est alors enrichie par les nouveaux modes calculés.

5 Illustration

On s'intéresse à la réponse dynamique de la structure élastique représentée sur la Figure 1. Elle est soumise à des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière Γ_1 et à un effort surfacique harmonique sur la frontière Γ_2 . L'analyse adimensionnée considère une masse volumique unitaire. Le module d'Young E est pris comme variable aléatoire uniforme sur $[0.8, 1.2]$, soit une plage de variabilité de $\pm 20\%$ par rapport à la moyenne, et est exprimé en fonction d'une variable aléatoire ξ sur $[0, 1]$ par : $E = 1 + 0.4(\xi - \frac{1}{2})$.

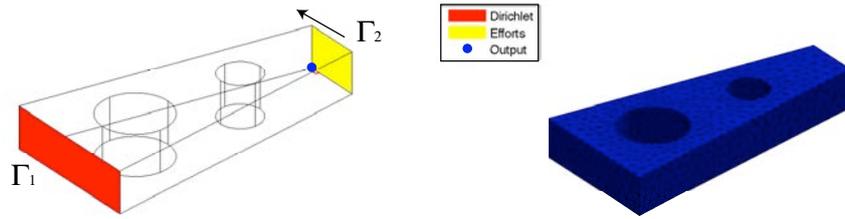


Figure 1 – Structure 3D étudiée

La réponse dynamique vibratoire est calculée sur une bande de fréquence correspondant aux 10 premiers modes de la structures. On souhaite étudier le comportement dynamique de la structure sur 50 échantillons fréquentiels de cette bande. On utilise au niveau spatial une approximation éléments finis (*cf* maillage de la Figure 1). On utilise au niveau stochastique une approximation polynomiale de degré 4 par morceaux, de type éléments finis [7], associée à la partition uniforme de $\Xi = [0, 1]$ en 16 éléments.

L'algorithme GSD est utilisé dans un premier temps sans réutilisation de la base \mathbf{W} de modes déterministes. À chaque fréquence, le problème stochastique est résolu avec une précision relative de 10^{-2} . La Figure 2 illustre l'ordre de la décomposition spectrale générée à chaque fréquence. À l'apparition d'une nouvelle résonance (*cf* Figure 6), la représentation de la solution nécessite une base de fonctions déterministes plus riche (*i.e.* décomposition d'ordre plus élevé). Au total 232 modes déterministes \mathbf{w} ont ainsi été calculés pour représenter la réponse dynamique aléatoire sur les 50 échantillons fréquentiels.

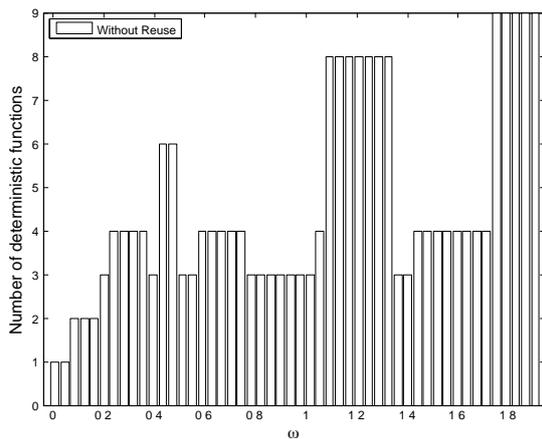


Figure 2 – Ordre $m(\omega)$ de décomposition spectrale pour 50 fréquences ω calculées, sans réutilisation de la base

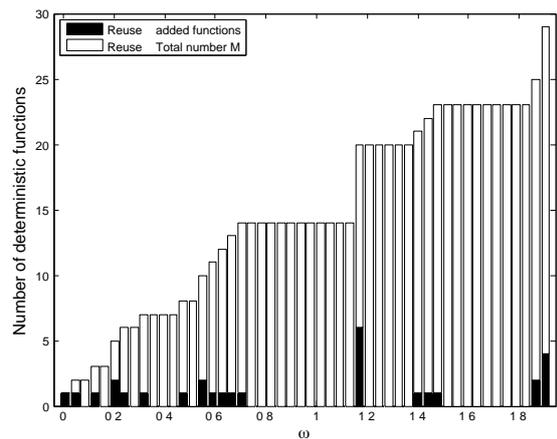


Figure 3 – Ordre M de décomposition spectrale pour 50 fréquences ω calculées, et nombre de modes ajoutés à chaque fréquence

La technique GSD est maintenant utilisée avec la conservation et re-exploitation d'une base réduite globale, enrichie à chaque fréquence calculée (*cf* section 4.2). Pour la même précision 10^{-2}

que précédemment, la Figure 3 présente le nombre de nouveaux modes déterministes rajoutés à chaque fréquence, ainsi que la taille M de la base réduite globale (toujours croissante). L'enrichissement de la base coïncide à nouveau avec l'apparition d'une résonance (cf Figure 6). Au total, seulement 29 modes déterministes sont ainsi calculés pour la prédiction de la réponse dynamique aléatoire sur la plage de fréquence étudiée. La réutilisation pour une nouvelle fréquence de la base réduite \mathbf{W} d'une fréquence préalablement calculée permet donc un gain de calcul considérable. Sur la Figure 4 sont tracés quelques modes déterministes de la base réduite globale générée.

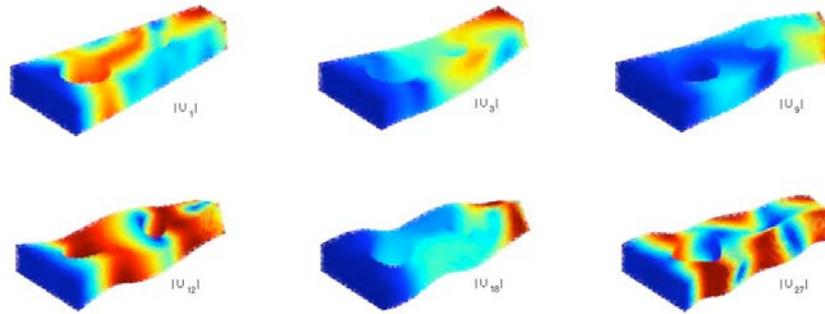


Figure 4 – Quelques modes déterministes contenus dans la base réduite déterministe globale

L'analyse dynamique nécessite une approximation stochastique très fine pour capter la dépendance fortement non linéaire de la réponse vis-à-vis de la variable aléatoire ξ . La Figure 5 montre qu'une approximation avec 16 éléments finis au niveau stochastique avec des polynômes d'ordre 4 ($P = 80$) convient à approcher la surface de réponse de référence. L'adaptation de l'approximation stochastique est à envisager afin de mieux contrôler la précision de la réponse aléatoire obtenue.

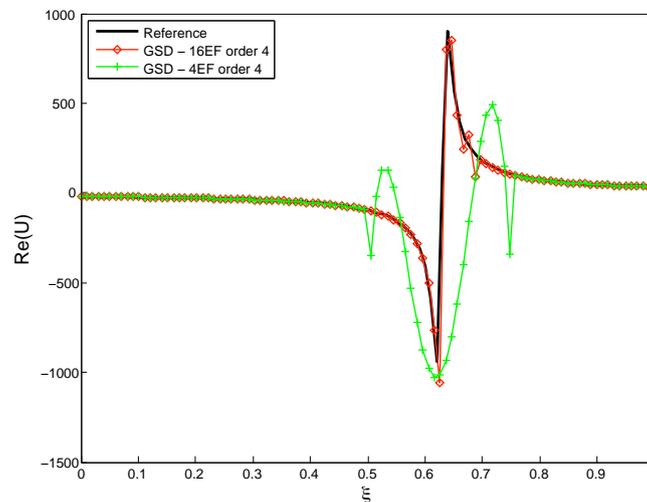


Figure 5 – Surface de réponse de la partie réelle de la réponse à la fréquence $\omega = 1,67\text{Hz}$

La méthode GSD permet d'accéder aisément à l'enveloppe de la réponse en fréquence sur une bande de fréquence par un simple et rapide post-traitement. Sur la Figure 6, on obtient une enveloppe de bonne qualité (quantiles à 0.1% et 99.9%) pour l'approximation stochastique définie juste avant. La même figure montre aussi l'enveloppe pour une approximation stochastique plus grossière avec des polynômes de degré 4 associée à une partition uniforme en 4 éléments ($P = 20$). On vérifie que les simulations de Monte-Carlo tracées sur le même graphe sont bien à l'intérieur de l'enveloppe obtenue avec l'approximation stochastique la plus fine.

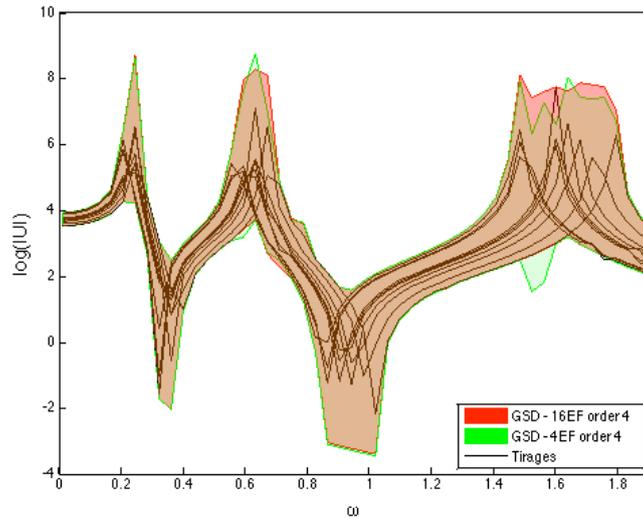


Figure 6 – Enveloppe de la réponse en fréquence

6 Conclusion

La méthode de décomposition spectrale généralisée (GSD) permet de générer automatiquement une base réduite de modes pour la représentation précise de la solution. Elle permet une représentation quasi-optimale de la réponse fréquentielle d'une structure sur une base réduite de modes déterministes et de fonctions stochastiques. L'exemple montre clairement le gain de calcul lié à la réutilisation et l'enrichissement de la base réduite pour le calcul de la réponse à une nouvelle fréquence. Il montre aussi la nécessité de mettre en place une démarche d'adaptation pour l'approximation stochastique afin de prendre en compte la dépendance fortement non linéaire de la réponse vis-à-vis des paramètres aléatoires.

Remerciements : Ces travaux sont soutenus par l'Agence National de la Recherche (ANR).

Références

- [1] C. Soize. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263(4) :893–916, 2003.
- [2] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin, 1991.
- [3] H. G. Matthies and A. Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) :1295–1331, 2005.
- [4] C. Soize and R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(2) :395–410, 2004.
- [5] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521–4537, 2007.
- [6] A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :4718–4736, 2008.
- [7] M. Deb, I. Babuška, and J. T. Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6359–6372, 2001.