

О докритических линейных процессах рождения и смерти в случайной среде

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

резюме

Получена явная формула для скорости вымирания линейных докритических процессов рождения и смерти в случайной среде. Эта формула иллюстрируется путем численного расчета собственного значения наибольшей действительной части для усеченной матрицы главного уравнения. Производящая функция ассоциированного собственного вектора проверяет особую систему дифференциальных уравнений типа Фукса. Особое внимание уделено случаю двух сред, который приводит к дифференциальному уравнению Римана.

1. Введение

Предположим, что среда колеблется между конечным числом состояний K ($K \geq 2$) следуя однородной непрерывной цепи Маркова времени. $Q = (Q_{i,j})$ это матрица, транспонирование которой является бесконечно малым генератором этой цепочки:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

Предположим, что матрица Q неприводима. Есть один вектор $u = (u_i)$ с

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013, стр. 152).

Число людей, которые развиваются в этой случайной среде, равно n . В среде y ($1 \leq i \leq K$), предположим, у нас есть линейный процесс рождения и смерти параметров

- $n a_i$ для рождения
- $n b_i$ для мертвых,

с $a_i > 0$ а также $b_i > 0$, Другими словами, в течение бесконечно малого промежутка времени dt ,

- с вероятностью $a_i dt$ каждый человек рождает нового человека,
- каждый человек умирает с вероятностью $b_i dt$,

Предположим, что в момент времени $t = 0$ есть n_0 люди ($n_0 \geq 1$) и окружающая среда i_0 . Вероятность наличия n особей в среде y в момент времени t является $p_{n,i}(t)$. Итак, мы имеем $p_{n,i}(0) = 1$ если $(n, i) = (n_0, i_0)$ а также $p_{n,i}(0) = 0$ если не. Основное уравнение

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (1)$$

Но $p_{n-1,i}$ отсутствует для $n = 0$. Как (Lotka, 1939), давайте определимся

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

Мы всегда будем предполагать, что $R_0 < 1$ население почти наверняка исчезнет (Когберн и Торрес, 1981; Бакаер и Эд-Дарраз, 2014). Это докритический режим. С $t \rightarrow +\infty$, у нас есть

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

Скорость вымирания существует и не зависит от $n \geq 1$ или i

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet et al., 2013, раздел 4.5). Это также не зависит от начального условия (n_0, i_0) , Проблема состоит в том, чтобы явно определить этот показатель.

Мы используем некоторые обозначения:

- $\Re(\cdot)$ является действительной частью комплексного числа
- $\sigma(M)$ является спектром матрицы M .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ является спектральной границей
- A - диагональная матрица $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$

- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$,

Когда матрица M имеет коэффициенты вне диагонали, которые являются положительными или равными нулю, что всегда будет иметь место ниже, из теоремы Перрона и Фробениуса следует, что $s(M)$ также является собственным значением M .

В разделе 2 мы используем результат (D'Souza and Hambly, 1997), касающийся ветвящихся процессов в случайной среде, чтобы показать, что

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

Мы также изучаем изменения функции $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ и производная $\lambda_1'(\alpha)$, что позволяет выделить три случая:

- тот, где $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$
- тот, где $m > 0$ а также $\lambda_1'(1) \leq 0$
- тот, где $m > 0$ а также $\lambda_1'(1) > 0$,

В первых двух случаях минимум Λ в интервале $[0,1]$ достигается при $\alpha = 1$, так что $\omega_1 = s(Q + D)$,

В разделе 3 мы видим, что спектральная граница μ_N усеченной матрицы мастер-уравнения образует возрастающую последовательность. Затем мы рассчитываем численно μ_N в серии примеров. Мы отмечаем, в частности, медлительность, без сомнения, логарифмическую, с которой μ_N сходится к ω_1 в третьем случае, упомянутом выше.

Из раздела 4 нас интересуют другие собственные значения и связанные с ними собственные векторы, для которых мы получаем только очень частичные результаты. Сначала мы преобразуем проблему собственных значений

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

в особую дифференциальную систему типа Фукса (Метеус, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

для функции генератора

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

Если собственный вектор $(\pi_{n,i})$ геометрически уменьшается относительно n , то собственное значение ω обязательно равно собственному значению матрицы $Q + \nu D$ с целым числом $\nu \geq 0$. Если $m < 0$ и $\omega = s(Q + \nu D)$, мы эффективно строим аналитические решения системы (5) в окрестности $x = 1$. Характеристическое уравнение фуксовской системы

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

другими словами, ω собственное значение матрицы $Q + \alpha D$. Это характеристическое уравнение получается путем поиска решений, которые ведут себя как $(1-x)^\alpha$ в окрестностях $x = 1$,

Давайте изучим третий случай: функция $\lambda_1(\alpha)$ достигает своего минимума внутри $]0, 1[$. Если мы предположим,

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- развитие $G_i(x)$ в окрестности $x = 1$ содержит логарифмический член,

тогда у нас $\alpha = \alpha^*$ и $\omega = \Lambda$. Более того, в теории Фукса логарифмические члены появляются, когда характеристическое уравнение (7) имеет двойной корень, в частности ветвь $\omega = s(Q + \alpha D)$. Из-за выпуклости функции $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ это происходит только при $\omega = \Lambda$.

В разделе 5 мы непосредственно изучаем асимптотику предельного собственного вектора $\pi = (\pi_{n,i})$ связано с ω_1 . Раздел 6 делает связь, когда $K = 2$ с дифференциальным уравнением Римана. В разделе 7 нас интересует цепочка Маркова, последняя из которых относится к работе (Dekking, 1988) и (Geiger et al., 2003). Отметим, что порог между слабо и сильно докритическими режимами не совпадает с тем, где $\Lambda \neq s(Q + D)$,

Чтобы лучше определить нашу проблему в связи с некоторыми другими работами, отметим, что система (1) представляет собой «неоднородный процесс квази рождения и смерти»; см. например (Sericola, 2013, p. 350) или (Latouche and Ramaswami, 1999, глава 12), в которых обсуждается стационарное распределение, но не скорость сходимости к нему. Кроме того, в постоянной среде с

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

у нас есть $D = (a - b)I$ а также I это единичная матрица. Итак, мы имеем $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ и формула (3) дает $\omega_1 = a - b$. Это хорошо известно либо по прямым расчетам (Hillion, 1986, глава V), либо как частный случай результатов Карлина и МакГрегора по процессам рождения и смерти (Collet et al., 2013, раздел 5.9.2). Обобщения этих последних результатов для «квази процессов рождения и смерти» (Clayton, 2010) касаются только случаев, когда «спектр» является реальным. Обычно это не так в нашей модели. Наконец, модель (1) вмешивается в качестве линеаризации некоторых нелинейных моделей населения и, в частности, эпидемических моделей (Vasaer, 2016).

2 Формула для скорости исчезновения

2.1 Время дискретизации среды и перехода к пределу

M^T транспонирование матрицы M (или вектора). Мы выбираем маленький шаг времени $\delta > 0$, Матрица

$$P = e^{Q^T \delta}$$

является матрицей цепи Маркова в дискретном времени. У нас есть $\mathcal{P}_{i,j} > 0 \forall i, \forall j$, потому что матрица Q неприводима. Среда остается заблокированной в состоянии i в течение временного шага δ . Тогда среда переходит в состояние j с вероятностью $\mathcal{P}_{i,j}$. В интервале времени δ население следует линейному процессу рождения и смерти параметров $n a_i$ а также $n b_i$ если среда находится в состоянии i . Таким образом, человек генерирует в среднем

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

люди. У нас есть $0 < m_i < +\infty$, Поэтому мы находимся в контексте ветвящегося процесса в марковской среде. Некоторые обозначения:

- $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ представляет собой последовательность k пройденных сред,

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha). \quad (8)$$

$\mathbb{E}(\cdot)$ обозначает математическое ожидание

- Z_k размер популяции в конце k временных шагов, длина δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$ матрица, заданная $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$: спектральный радиус положительной матрицы $\Sigma(\alpha)$,

$\mathbb{P}(Z_k > 0)$ такова вероятность того, что население не исчезнет. Следствие 1.8 из (D'Souza and Hambly, 1997) показывает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

В нашем случае ожидание $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ рассчитывается явно:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

Это также аналитическая функция α , потому что $\rho(\Sigma(\alpha))$ простое собственное значение положительной матрицы $\Sigma(\alpha)$, Следовательно, предел (9) равен $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$, Скорость исчезновения ω в непрерывном времени, следовательно, составляет

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

Давайте возьмем, в частности, $\delta = 1/h$ с целым числом $h \geq 1$, Затем мы имеем $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$, Но

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

из формулы Софуса Ли. Спектральный радиус является непрерывной функцией, мы имеем

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Потому что $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ мы заключаем, что

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Наконец, предложение 4.12 (Collet et al., 2013) обеспечивает равенство скоростей исчезновения, определенных с помощью (2) или с вероятностью не исчезновения, как в левой части уравнения (9). Таким образом, мы нашли формулу для скорости исчезновения в непрерывном времени.

2.2 Изучение функции $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

Мы определяем

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

Предложение 1 .

- Если $m \leq 0$, то $\Lambda = \lambda_1(1)$,
- Если $m > 0$ и $\lambda_1'(1) \leq 0$ то у нас тоже есть $\Lambda = \lambda_1(1)$,
- Если $m > 0$ и $\lambda_1'(1) > 0$ то есть уникальный $\alpha^* \in]0, 1[$ с $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$,

Доказательство . Если $v = (v_i)$ это вектор,

- $v \geq 0$ если $v_i \geq 0 \forall i$
- $v > 0$ если $v \geq 0$ а также $v \neq 0$

- $v \gg 0$ если $v_i > 0 \forall i$,

Мы используем одинаковые обозначения для матриц.

Давайте вернемся к рассуждению раздела 9 (Васаёв, 2016), но с $R_0 < 1$ вместо $R_0 > 1$, Матрица $Q + \alpha D$ неприводима для всех α , потому что матрица Q неприводима, а матрица D диагональна. Так $\lambda_1(\alpha)$ простое собственное значение матрицы $Q + \alpha D$,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ а также $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает обычное скалярное произведение вещественных векторов. $\lambda_1(\alpha)$ также является простым собственным значением транспонированной матрицы $Q^\top + \alpha D$,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^\top + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

Из простой теоремы о возмущении собственных значений мы знаем, что функция $\lambda_1(\alpha)$ дифференцируемо и

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

Особенно для $\alpha = 0$, у нас есть $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$, $w_1(0) = u$, $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$ а также

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

потому что $R_0 < 1$,

Если $m \leq 0$, функция $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ уменьшается, потому что $D \leq 0$. Теперь рассмотрим случай, когда $m > 0$. У нас есть $\lambda_1'(0) < 0$, функция $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ выпуклый (Cohen, 1981). Так $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$ это возрастающая функция. Кроме того, если $\alpha \rightarrow +\infty$, у нас есть $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$, функция $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ в этом случае является строго выпуклым, поскольку не является аффинным (Nussbaum, 1986). Так что есть уникальный $\alpha^* > 0$ с $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$,

Итак, есть три случая:

- Если $m \leq 0$, то $\Lambda = \lambda_1(1)$,
- Если $m > 0$ и $\lambda_1'(1) \leq 0$, так $\alpha^* \geq 1$ а также $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ уменьшается в течение интервала $[0, 1]$ так что у нас еще есть $\Lambda = \lambda_1(1)$,
- Если $m > 0$ и $\lambda_1'(1) > 0$, так $\alpha^* \in]0, 1[$ а также $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$,

2.3 Случай двух сред

Мы предполагаем $K = 2$, с $Q_{i,i} = -q_i$ если $i = 1, 2$, у нас есть

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

Характеристическое уравнение $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ написано

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Это отношения между ω а также α описывает гиперболу в плоскости (ω, α) . Это также может быть написано

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

Более того, $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ таков, что

$$2 \lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

а также

$$2 \lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Если $m \leq 0$ или если $m > 0$ и $\lambda_1'(1) \leq 0$, у нас есть $\Lambda = \lambda_1(1)$. Если $m > 0$ и $\lambda_1'(1) > 0$, мы должны иметь $d_1 d_2 < 0$. Предположим в этом случае, например, что $d_1 > 0$ а также $d_2 < 0$. Отменив дискриминант (13), мы после небольшого вычисления находим

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Заметь $\Lambda = 0$ а также $\alpha^* = 0$ если $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ то есть если $R_0 = 1$,

3 Усеченная матрица

С $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^\top$, главное уравнение написано $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$, \mathcal{M} является бесконечной матрицей. Давайте разрезать матрицу \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q-S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q-2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q-3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q-NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

с $S = A + B$, Мы определяем $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$,

Предложение 2 . Для всех $N \geq 1$, у нас есть $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$, (μ_N) следовательно, имеет предел, если $N \rightarrow +\infty$, кто ω_1 .

Доказательство . Матрица Метцлера - это матрица, в которой все коэффициенты вне диагонали равны ≥ 0 . Матрица $\mathcal{U}^{(N)}$ является неприводимой матрицей Метцлера, потому что Q неприводима, $a_i > 0$ а также $b_i > 0 \forall i$, Поэтому мы можем использовать следствия из теоремы Перрона и Фробениуса о спектральной границе матриц Метцлера; см. например (Нкаге Нкамба, 2012, теорема 30). С $e = (1, \dots, 1)^T$ у нас есть

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Потому что $e \gg 0$ мы выводим, что $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$, Итак, мы имеем

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

μ_N собственное значение матрицы $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

Вектор $\mathcal{W}^{(N)}$ состоит из N блоков размером K , $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$, Рассмотрим вектор

$$\tilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 также размера K . Затем мы имеем

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \tilde{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots & 0 \\ \dots & 0 & NA \\ \dots & 0 & NA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Потому что $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$, у нас есть $\mathcal{U}^{(N+1)} \tilde{\mathcal{W}} > \mu_N \tilde{\mathcal{W}}$, Потому что $\tilde{\mathcal{W}} > 0$ мы выводим, что $\mu_{N+1} > \mu_N$,

В качестве числовых значений возьмем

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

Затем мы имеем $u_1 = u_2 = 0,5$, Параметр a_1 варьируется, например, от 2 до 5; этот верхний предел соответствует $R_0 = 1$, Для небольших значений N , как правило, до $N = 10^3$, программное обеспечение, как Scilab рассчитывает полный спектр матрицы $\mathcal{U}^{(N)}$, В противном случае мы вычисляем наименьшее собственное значение $-\mathcal{U}^{(N)}$ и соответствующий собственный вектор итерационным методом, примененным к обратной матрице. Каждый использует трехдиагональную блочную структуру для инверсии на каждой итерации (Artalejo et al., 2013). С этим алгоритмом мы можем пойти так далеко $N = 10^6$ без особых проблем

Рисунок 1 показывает μ_N с точки зрения a_1 для N фиксированный, но большой. Итерационный алгоритм останавливается, когда две последовательные оценки μ_N отличаются меньше чем 10^{-4} . На рисунке также показаны пунктирными линиями и в соответствии с a_1 число Λ , заданное формулой (3), которое $\lambda_1(1)$ если $\lambda'_1(1) \leq 0$ и который задается формулой (14), когда $\lambda'_1(1) > 0$, У нас есть $\lambda'_1(1) < 0$ если $a_1 < a_1^*$ а также $\lambda'_1(1) > 0$ если $a_1 > a_1^*$, с $a_1^* \simeq 3,2829$, Соглашение между Λ и пределом (μ_N) кажется вероятным. Однако конвергенция чрезвычайно медленная, возможно, логарифмическая, когда R_0 приближается к 1, особенно когда $a_1 > a_1^*$,

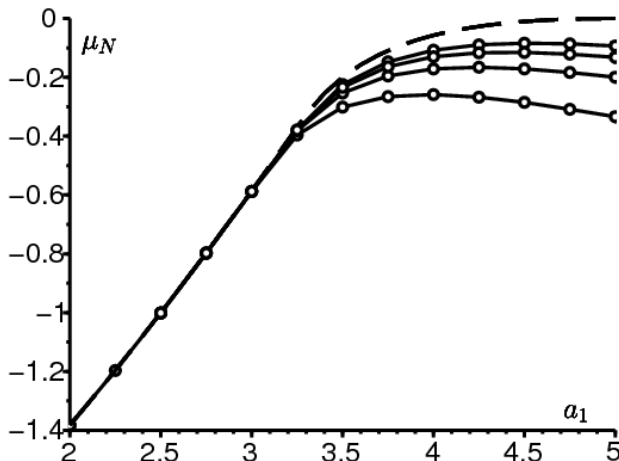


Рисунок 1. Пунктирная линия: Λ определяется формулой (3) как функция a_1 , Сплошные линии с точками: μ_N за $N = 10^3, 10^4, 10^5$ а также 10^6 (снизу вверх).

4 Собственные векторы и другие собственные значения

Нас сейчас интересует лимит $N \rightarrow \infty$ собственного вектора, связанного с μ_N а также к другим собственным значениям и векторам. В связи с этим мы получим только очень частичные результаты.

4.1 Фуксова система

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{C} это набор комплексных чисел и $'$ производная по переменной x ,

Предложение 3 .

- Если у нас есть уравнение (4), с $\omega \in \mathbb{C}$ а также $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$,
- если порождающий ряд (6) имеет радиус сходимости $\geq R$,

$G_i(x)$ является решением системы (5) для $x \in \mathbb{C}$, $|x| < R$ а также $1 \leq i \leq K$,

Доказательство . У нас есть

$$G_i'(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

Как и в классическом случае с постоянной средой (Hillion, 1986), мы умножаем (4) на x^n , Суммирование по всем $n \geq 0$ дает

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G_i'(x) + b_i G_i'(x) - (a_i + b_i)x G_i'(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Это эквивалентно (5).

Ноты.

- Отметим, что (5) является проблемой собственных значений для сингулярной дифференциальной системы. Эта система относится к типу Фукса, если $a_i \neq b_i \forall i$ (Methée, 1959). Система имеет особенность в $x = 1$ И в $x = b_i/a_i$ за $1 \leq i \leq K$, У нас есть $b_i/a_i < 1$ если $a_i > b_i$, Мы также можем написать систему

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Пример скалярного дифференциального уравнения типа 2 Фукса появился в исследовании квадратичных процессов рождения и смерти в постоянной среде (Picard, 1965).

4.2. Собственные значения при радиусе сходимости > 1

Предложение 4 .

- Если у нас есть уравнение (4), с $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ а также $\pi \neq 0$,
- если порождающий ряд (6) имеет радиус сходимости, строго превышающий 1,

тогда есть целое число $\nu \geq 0$ таким образом, что ω является собственным значением матрицы $Q + D \nu$.

Доказательство . Давайте рассуждать абсурдом. Предположим, что для всех $\nu \geq 0$ ω не является собственным значением $Q + \nu D$, Функции $G_i(x)$ аналитические в диске $|x| < R$ с $R > 1$, Если x сходится к 1 в (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Но ω не является собственным значением Q . Так $G_i(1) = 0 \forall i$,

Позвольте быть целым $\nu \geq 1$, По индукции предположим, что мы доказали $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$, Мы выводим ν раз уравнение (5) относительно x и используем формулу Лейбница для произведения $(1-x)(a_i x - b_i)$ а также $G_i'(x)$, У нас есть

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x).$$

$\binom{\nu}{k}$ обозначает коэффициент бинома. Полином $(1-x)(a_i x - b_i)$ имеет степень 2 в x . Только выражения с $0 \leq k \leq 2$ ненулевые в сумме слева:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu [a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu (\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

Мы заставляем x сходиться к 1 и находим с помощью гипотезы индукции

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

Однако ω не является собственным значением матрицы $Q + \nu D$, Так $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$,

Итак, мы показали, что $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$ для любого целого числа $\nu \geq 0$. Потому что функция $G_i(x)$ является аналитическим, мы имеем $G_i(x) = 0$ в окрестностях неподалеку от $x = 1$, и даже $G_i(x) = 0$ по всему диску $|x| < R$ по принципу аналитического расширения. Итак, мы имеем $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0 \forall n \geq 0$ а также $1 \leq i \leq K$, Это противоречит гипотезе $\pi \neq 0$,

Ноты.

- Собственные значения матриц $Q + \nu D$ не обязательно являются вещественными, поэтому система (5) не связана ни с теорией Вейля и Кодаиры (Dieudonné, 2003), ни с изучением (Клейтона), 2010) о некоторых квази-процессах рождения и смерти. Эти собственные значения, тем не менее, являются действительными, когда $K = 2$. Потому что собственное значение $s(Q + \nu D)$ вещественное число, другое собственное значение тоже реально.
- По соседству $x = 1$, система (16) может быть записана

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

$G(x)$ это вектор $(G_i(x))$, Система в форме

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

с

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

а также $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$, Если радиус сходимости ряда $G_i(x)$ это > 1 , то $G_i(x)$ является аналитическим в окрестности $x = 1$, Таким образом, вышеуказанная система имеет аналитическое решение в окрестности $x = 1$. Согласно (Gantmacher, 1966, p. 155), существует целое число $\nu \geq 0$ для которого ν является собственным значением Ω_{-1} , Так что есть вектор $w \neq 0$ с

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

Итак, мы имеем

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

и ω является собственным значением $Q + \nu D$, Это то, что было продемонстрировано элементарно в предложении 4.

Пример. Возьмите числовые значения (15) с $a_1 = 2,5$, В этом случае мы имеем $m < 0$, За $N = 1000$, первые двадцать собственных значений матрицы $\mathcal{M}^{(N)}$ примерно приведены в следующей таблице:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

Теперь собственные значения Q 0 и -2 , те из $Q + D$ находятся -1 а также $-3,5$, те из $Q + 2D$ находятся $-1,6972244$ а также $-5,3027756$, те из $Q + 3D$ находятся $-2,2877855$ а также $-7,2122145$, те из $Q + 4D$ находятся $-2,8377223$ а также $-9,1622777$, так далее. Они найдены в таблице выше. Поэтому кажется, что собственные значения $\mathcal{M}^{(N)}$ сходятся, когда $N \rightarrow +\infty$ к собственным значениям матриц $Q + \nu D$ за $\nu = 0, 1, 2, \dots$ а также μ_N сходятся к $s(Q + D)$, Помните, что здесь $s(Q + D) = \Lambda$ потому что $m < 0$,

4.3 Случай, когда $a_i < b_i \forall i$

Мы предполагаем $m < 0$, Будем формально искать решение в окрестности $x = 1$ системы (5) вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \quad (17)$$

У нас есть

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i} (1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} (1-x)^n.$$

У нас есть $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$, Мы определяем коэффициенты $(1-x)^n$, Мы получаем

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}, \quad \forall n \geq 0.$$

$c_{n-1,i}$ отсутствует, если $n = 0$, С $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$, (17) является решением (5), если

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Первый тип решения получается путем выбора ω среди собственных значений Q а также c_0 соответствующий собственный вектор. Соотношение (18) позволяет рассчитать c_n за $n \geq 1$ при условии, что матрица $Q + nD - \omega I$ всегда обратим.

Второй тип решения получается путем выбора $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ с $\nu \geq 1$, ω собственное значение $Q + \nu D$ а также c_ν связанный собственный вектор. Затем мы рассчитываем c_n за $n \geq \nu + 1$ с уравнением (18), при условии, что матрица $Q + nD - \omega I$ всегда обратим.

Давайте возьмем, в частности, $\omega = s(Q + \nu D)$ с целым числом $\nu \geq 0$, Потому что $a_i < b_i \forall i$, у нас есть $D < 0$, Более того, $Q + \nu D$ неприводим. Поэтому для любого целого числа $n > \nu$ имеем

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

Итак, мы имеем $s(Q + nD - \omega I) < 0$, Матрица $Q + nD - \omega I$ является обратной матрицей Мещлера и $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$, У нас есть

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

С $n \rightarrow +\infty$,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

а также

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

Ряд (17) сходится для $|1 - x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$, Серия (17) для $1 \leq i \leq K$ все сходятся для $|1 - x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$,

4.4 Радиус сходимости, равный 1

В двух предыдущих разделах мы обсуждали собственные значения матриц $Q + \nu D$ для целого числа $\nu \geq 0$. Однако (Васаёг и Ed-Darraz, 2014) уже выделили пример, где $R_0 < 1$ но где собственное значение $s(Q + D)$ матрицы $Q + D$ строго положительно: просто возьмите $q_1 = q_2 = 1, a_1 = 2,7, a_2 = 0,8, b_1 = b_2 = 2$ (так $a_1 > b_1$). Однако наша начальная проблема не может иметь положительного собственного значения. В частности, мы заключаем, что порождающий ряд $G_i(x)$ не всегда имеют радиус сходимости > 1 , Следующее предложение связывает поведение $G_i(x)$ около $x = 1$ с параметром α ,

Предложение 5 .

- Если у нас есть уравнение (4), с $\omega \in \mathbb{C}, (\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ а также $\pi \neq 0$,
- если порождающий ряд (6) имеет радиус сходимости, равный 1,
- если есть реальное число $\alpha > 0$ целое число $J \geq 0$ и аналитические функции $g_{i,j}(x)$ на диске с центром в $x = 1$ с

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

через интервал $(1 - \varepsilon, 1)$ с $\varepsilon > 0$,

- если вектор $(g_{i,J}(1))$ не ноль,

тогда ω является собственным значением матрицы $Q + \alpha D$,

Доказательство . У нас есть

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ &+ (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

$G_i(x)$ является решением уравнения (5) для $|x| < 1$, Мы делим на $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$, У нас есть

$$\begin{aligned} \omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x). \end{aligned}$$

С $x \rightarrow 1$, мы получаем

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

Итак, ω является собственным значением матрицы $Q + \alpha D$,

Запись. Форма функции $G_i(x)$ в предложении 5, который объединяет степенную функцию и логарифмический полином, можно ожидать от решения системы Фукса в окрестности особенности (Gantmacher, 1966, p. 159).

4.5 Случай, когда $t > 0$ а также $\lambda'_1(1) > 0$

Предложение 6 . Мы предполагаем : $t > 0$ а также $\lambda'_1(1) > 0$, В таком случае, $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ с $\alpha^* \in]0, 1[$. Мы предполагаем: $\alpha > 0$ и $\omega = s(Q + \alpha D)$,

- Если у нас есть уравнение (4), с $\omega \in \mathbb{C}$ а также $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- если связанный генерирующий ряд $G_i(x)$ имеют радиус сходимости, равный 1

- если $G_i(x)$ может быть написано на интервале $(1 - \varepsilon, 1)$ с $\varepsilon > 0$ в форме

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

с $J \geq 1$ и вектор $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ который не равен нулю,

тогда $\alpha = \alpha^*$ и $\omega = \Lambda$.

Доказательство . Верно,

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

У нас есть $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$, Потому что $G_i(x)$ является решением (5) на $|x| < 1$, у нас есть

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

Выражения в $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ И в $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ каждый должен отменить:

$$\begin{aligned} \omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\ \omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}. \end{aligned}$$

Мы определяем $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$, У нас есть

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

Потому что $\omega = s(Q + \alpha D)$ а также $\gamma_J \neq 0$ первое уравнение показывает, что γ_J является собственным вектором матрицы $Q + \alpha D$ связано с собственным значением $s(Q + \alpha D)$, С помощью обозначений раздела 2.2 мы получаем, что существует постоянная $\kappa \neq 0$ с $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$, Кроме того, мы видим, что второе уравнение принимает вид

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

Матрица $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ имеет одномерное ядро, во главе с $w_1(\alpha)$, Тем не менее с обозначениями раздела 2.2, транспонированная матрица $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ имеет одномерное ядро, во главе с $v_1(\alpha)$, Возьмем скалярное произведение (19) с $v_1(\alpha)$

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

Согласно (12) это эквивалентно $\lambda'_1(\alpha) = 0$, С $m > 0$ а также $\lambda'_1(1) > 0$, у нас есть $\alpha = \alpha^*$, Итак, мы имеем $\omega = \Lambda$,

5 Асимптотическое поведение собственных векторов

5.1 Случай, когда $m < 0$

Давайте теперь изучим поведение для большого n собственного вектора $(\pi_{n,i})$ связано с собственным значением ω_1 , Давайте непосредственно попробуем решение (4) с

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Для n больших у нас есть

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta} (1 + 1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} (1 - \delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

а также

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

для n большой. Мы видим, что выражения в $\Pi^n / n^{\beta-1}$ в (4) дать

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

У нас есть таким образом

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i / \Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

С $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$, мы принимаем $\Pi = a_1/b_1$, $k_1 \neq 0$ а также $k_i = 0$ если $i \neq 1$, С $q_i = -Q_{i,i}$, выражения в Π^n/n^β в (4)

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i / \Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i / \Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

Итак, мы имеем

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

а также

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

Мы можем вывести

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

В качестве альтернативы мы изучаем систему (5) в окрестности $x = b_1/a_1$, У нас есть

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

Для собственного значения ω_1 мы можем выбрать соответствующий собственный вектор так, чтобы $\pi_{n,i} > 0$ за $n \geq 1$, Для всей серии $G_i(x)$ рассмотрим особую точку, ближайшую к 0 в комплексной плоскости. Эта точка находится на оси $x > 0$, согласно теореме А. Прингсхайма (Queffelec and Zuily, 2013, p. 54). Согласно (Flajolet and Sedgewick, 2009), мы имеем

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1 + (\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

с точностью до мультипликативной константы. Это то, что мы нашли.

Числовой пример. Возьмите наш числовой пример (15) еще раз, с $a_1 = 2,5$, На рисунке 2 показано асимптотическое поведение собственного вектора, связанного с собственным значением μ_N , за $N = 1000$, Здесь мы имеем $\Lambda = -1$, Итак, мы имеем $\beta = 1$ а также $k_1/h_2 = 0,3$, Эта фигура, кажется, подтверждает полученные асимптотические результаты, поскольку краевой эффект вблизи $n = N$ не следует принимать во внимание.

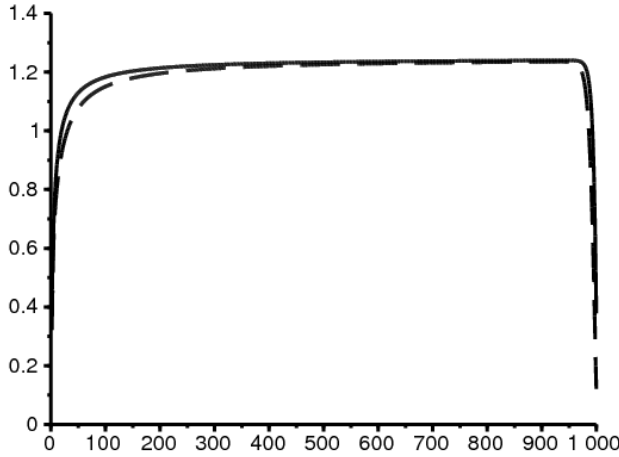


Рисунок 2. Корпус $a_1 = 2,5$, $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (сплошная линия) и $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (пунктирная линия) как функция от n . Используем усеченную матрицу $\mathcal{M}^{(N)}$ с $N = 1000$,

5.2 Случай, когда $m > 0$

Мы подозреваем $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ или $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$, В обоих случаях доминирующие выражения в (4) дают

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (22)$$

Другими словами, ω собственное значение матрицы $Q + (\beta - 1)D$, Действительно, если мы ищем решение вида $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ мы похожи на (20) с $\Pi = 1$, Что касается случая, когда

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

у нас есть

$$\begin{aligned}(n \pm 1)\pi_{n \pm 1, i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1-\beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots,\end{aligned}$$

что снова приводит к уравнению (22). Это говорит о том, что $\beta = 1 + \alpha^*$ если $\lambda'_1(1) > 1$ а также $\beta = 2$ если $\lambda'_1(1) \leq 0$. В обоих случаях радиус схождения $G_i(x)$ будет равен 1.

6 Вернемся к конкретному случаю, когда $K = 2$

Мы можем рассмотреть дифференциальное уравнение второго порядка, $G_1(x)$ а не дифференциальная система первого порядка для $G_1(x)$ а также $G_2(x)$, Мы получаем

$$\begin{aligned}(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} \\ + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2)+(\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} \\ + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1 = 0.\end{aligned}$$

Разделить на $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$ и разложив рациональную дробь на простые элементы, получим

$$\begin{aligned}0 = \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} + \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\omega+q_2}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ + \left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1-\frac{b_1}{a_1})(1-\frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})}.\end{aligned}$$

Предположим, числа $b_1/a_1, b_2/a_2$ и 1 все разные. Распознаем дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned}\frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1-k_0-k'_0}{x-x_0} + \frac{1-k_1-k'_1}{x-x_1} + \frac{1-k_2-k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ + \left[\frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} \right. \\ \left. + \frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0,\end{aligned}$$

то есть дифференциальное уравнение Римана (Розо, 1997, стр. 229) с тремя особыми точками $x_0 = 1, x_1 = b_1/a_1$ а также $x_2 = b_2/a_2$, Характеристические показатели этого уравнения соответственно

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

с α_+ а также α_- решения (13). Поэтому множество решений можно записать с помощью римановых обозначений

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Согласно (Розо, 1997, стр. 229), можно написать

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Мы определяем

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

Вернемся к случаю дифференциального гипергеометрического уравнения

$$y = \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

что означает равенство $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ между ангармоническими частями. Итак, мы имеем

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1-\mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

Гипергеометрическая функция

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

с обозначениями $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$, Если x находится в окрестности 1, переменная y находится в окрестности 0. Согласно теории дифференциального гипергеометрического уравнения, существуют постоянные κ_1 а также κ_2 с

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

при условии, что $\mathcal{C} \neq 1$ то есть $\alpha_- \neq \alpha_+$, Решения с фуксовым экспонентом α_+ при $x = 1$ соответствуют $\kappa_2 = 0$

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

Дело $m < 0$

Мы предполагаем, например, $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$, Мы принимаем $\alpha_+ = 1$ для собственной функции, связанной с $\omega_1 = s(Q + D)$, Мы выбираем κ_1 так что $G_1(0) = 1$, Затем мы имеем

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

из (13). Мы определяем

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

Это значение x , для которого $y = -1$, У нас есть $1 < \xi < b_1/a_1$, Переменная y уменьшается, если $0 < x < \xi$ со значениями

$$\frac{\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - 1} \in]0, 1[\quad \searrow \quad -1.$$

В случае $\xi < x < b_1/a_1$, выражение (23) следует заменить

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

которое является выражением (18) из § 182 (С. Jordan, 1896), в котором аргумент $\frac{y}{y-1}$ растет с 1/2 до 1.

Давайте вернемся к нашему численному примеру (15), с $a_1 = 2,5$, На рисунке 3 показаны производящие функции $G_1(x)$ а также $G_2(x)$ построенный с собственным вектором, связанным с μ_N , Вот $N = 4000$ со стандартизацией $G_1(0) = 1$, Мы используем метод Хорнера для оценки порождающих рядов. Мы сравниваем их с формулами (23) и (24). Здесь мы имеем $\xi \simeq 1,105$, Мультипликативный фактор нормализации был выбран таким образом, чтобы функции, полученные двумя методами, были наложены друг на друга.

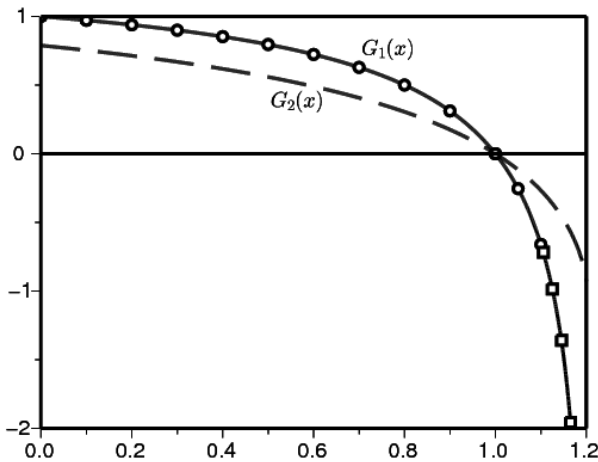


Рисунок 3. Случай, когда $a_1 = 2,5$, Отслеживаем производящие функции $G_1(x)$ (сплошная линия) и $G_2(x)$ (пунктирная линия) как функция x . Для расчета используется матрица $\mathcal{M}^{(N)}$ с $N = 4000$, Формулы (23) и (24) для $G_1(x)$ представлены маленькими кружками и квадратами.

Дело $m > 0$ а также $\lambda'_1(1) \leq 0$

Мы предполагаем, например, $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$, у нас сейчас

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

Выражение (23) больше не подходит, потому что переменная y расходится в $x = b_1/a_1 < 1$, с $0 < x < \xi$, y^{-1} является убывающей функцией, которая варьируется от 0 до 1. Возьмем на этом интервале выражение (32) из (С. Jordan, 1896, §182),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

с $\alpha_+ = 1$, $\omega_1 = s(Q+D)$ а также κ_1 так что $G_1(0) = 1$, Тем не менее, в течение интервала $\xi < x < 1$, мы берем выражение (34) из (С. Jordan, 1896, § 182), в котором аргумент $(1-y)^{-1}$ увеличивается с $1/2$ до 1:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Давайте вернемся к нашему численному примеру (15), с $a_1 = 3,2$, На рисунке 4 показаны формулы (25) и (26). Они хорошо совпадают с производящей функцией, построенной с собственным вектором. Здесь мы имеем $\xi \simeq 0,97$,

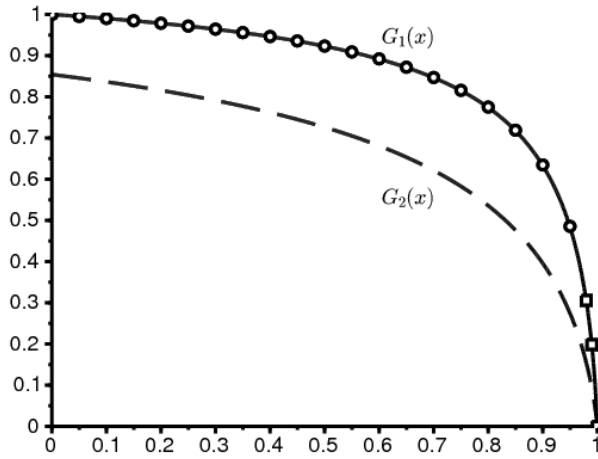


Рисунок 4. Случай, когда $a_1 = 3,2$, Сравнение формул (25) [маленькие круги] и (26) [маленькие квадраты] для $G_1(x)$ с производящей функцией собственного вектора, связанного с μ_N (сплошная линия), с $N = 10^4$,

Дело $m > 0$ а также $\lambda'_1(1) > 0$

Выражения (25) и (26), вероятно, больше не действительны, даже если $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$, Они должны быть заменены выражениями, содержащими логарифмический термин. С $a_1 = 3,5$, у нас есть $\Lambda = -0,2$ а также $\alpha^* = 0,6$ согласно формулам (14). Нам не удалось получить сугестивный граф в этом случае.

7 Марковская цепь включена

Для докритического ветвящегося процесса в случайной среде с одинаково распределенными независимыми средами, $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$, у нас есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha). \quad (27)$$

$f(x)$ обозначает производящую функцию (Dekking, 1988; Geiger et al., 2003). Пусть μ - минимум в правой части (27). В «слабо докритическом» случае, когда

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

у нас есть

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

для постоянного $c > 0$, В «крайне докритическом» случае, когда

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

у нас есть $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ а также

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

для постоянного $c > 0$, Процесс докритический, если $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$,

Давайте вернемся к нашему процессу рождения и смерти. Мы ограничиваемся частным случаем двух сред: $K = 2$, Мы определяем

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

С $a_i \neq b_i$, это порождающая функция количества особей через некоторое время t начиная с человека в момент времени 0 в среде i (Hillion, 1986). В любом случае,

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

Спустя некоторое время t_1 среда переходит из состояния 1 в состояние 2. Через некоторое время t_2 среда возвращается в состояние 1. Соответствующие плотности вероятности $q_1 e^{-q_1 t_1}$ а также $q_2 e^{-q_2 t_2}$, Затем рассмотрим включенную цепь Маркова, смотрящую только на изменение между временем 0 и временем $t_1 + t_2$, $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$, Давайте назовем это поколением. Функция генератора

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

В частности, $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$, Этот процесс ветвления является докритическим. Действительно, у нас есть

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

потому что $R_0 < 1$, Процесс очень докритический, когда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В этом случае мы имеем

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Обратите внимание, что если $d_1 < 0$ а также $d_2 < 0$, то процесс сильно докритический. В слабо докритическом случае имеем

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

и небольшой расчет показывает

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2} \right)^2}.$$

Обратите внимание, что это число < 1 если и только если $R_0 < 1$,

Для нашего числового примера формула (28) показывает, что включенная цепь Маркова является сильно докритической, когда $a_1 < 3,4$, Любопытно, что этот порог отличается от того, что разделяет случаи $\Lambda = s(Q + D)$ а также $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ с $0 < \alpha^* < 1$ для линейного процесса рождения и смерти. Этот последний порог был $\simeq 3,2829$ из раздела 3. Однако скорость, с которой включенная цепь Маркова сходится к исчезновению, не имеет ничего общего со скоростью, с которой непрерывный процесс времени делает то же самое.

8 Заключение

Остается уточнить многие моменты, касающиеся поведения собственных значений и собственных векторов. Среди возможных обобщений можно подумать, что если коэффициенты a_i , b_i а также $Q_{i,j}$ периодические функции времени t , то ω_1 будет равен $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$, $f(\cdot)$ обозначает доминирующий показатель Флоке и заменяет спектральную границу.

Спасибо

Мы благодарим Винсента Бансая, Анн Дюваль и Бруно Сериколу за их комментарии и предложения.

Библиографические ссылки

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. J Math Biol 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. J Math Biol 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. J Math Biol 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. SIAM J Matrix Anal Appl 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. JAppl Probab 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. Proc Amer Math Soc 81 : 657–658
- Collet P, Martяnez S, San Martяn J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin

- D'Souza JC, Hamby BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Prob* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) *Éléments d'analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire. *Ann I H Poincaré–Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, tome 3. Gauthier–Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffélec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l'agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris