

# ランダムな環境における誕生と死の亜臨界線形過程について

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Les Cordeliers、パリ、フランス  
nicolas.bacaer@ird.fr

## 概要

ランダム環境における線形亜臨界出生および死亡プロセスの消滅率の明示的な式を取得します。この式は、マスター方程式の打ち切られた行列の最大実部の固有値を数値計算することによって示されます。関連する固有ベクトルの生成関数は、フォクス型微分方程式の特異系をチェックします。リーマン微分方程式を導く2つの環境の場合に特に注意が払われます。

## 1はじめに

環境が有限数 $K$ の状態間で振動すると仮定します ( $K \geq 2$ ) 均一な連続時間マルコフ連鎖に従います。  $Q = (Q_{i,j})$  転置がこのチェーンの極小ジェネレーターである行列です :

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

行列 $Q$ は既約であると仮定します。単一のベクトルがあります  $u = (u_i)$  と

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(セリコラ、2013、p. 152)。

このランダムな環境で進化する個体の数は $n$ です。環境 $i$  ( $1 \leq i \leq K$ )、パラメータの誕生と死の線形プロセスがあると仮定します

- $n a_i$  出産のために
- $n b_i$  死者のために

と  $a_i > 0$  そして  $b_i > 0$ 。言い換えれば、微小な時間間隔 $dt$ の間、

- 確率で  $a_i dt$ 、各個人が新しい個人を出産し、
- 一人一人が確率で死ぬ  $b_i dt$ 。

時間 $t = 0$ で、 $n_0$  人 ( $n_0 \geq 1$ ) そして環境は  $i_0$ 。時間 $t$ で環境 $i$ に $n$ 人の個人がいる確率は  $p_{n,i}(t)$ 。だから私たちは  $p_{n,i}(0) = 1$  もし  $(n, i) = (n_0, i_0)$  そして  $p_{n,i}(0) = 0$  そうでない場合。主な方程式は

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (1)$$

だが  $p_{n-1,i}$  欠席している  $n = 0$ 。(ロトカ、1939) のように、定義しましょう

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

私たちは常にそれを仮定します  $R_0 < 1$ : 人口はほぼ確実に絶滅するでしょう (Cogburn and Torrez、1981; Bacaër and Ed-Darraz、2014)。それは亜臨界体制です。と  $t \rightarrow +\infty$ 、我々は持っています

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

絶滅率が存在し、 $n \geq l$ または $i$ に依存しない

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(コレットら、2013、セクション4.5)。また、初期状態には依存しません ( $n_0, i_0$ )。問題は、このレートを明示的に決定することです。

いくつかの表記法を使用します。

- $\Re(\cdot)$  複素数の実数部です
- $\sigma(M)$  は、行列 $M$ のスペクトルです。
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$  スペクトル範囲です
- $A$ は対角行列  $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$ 。

行列 $M$ が対角の外側に正またはゼロである係数を持っている場合、これは常に以下の場合に当てはまります。これは、PerronとFrobeniusの定理から次のようになります。  $s(M)$   $M$ の固有値でもあります。

セクション2では、ランダム環境での分岐プロセスに関する (D'Souza and Hambly、1997) の結果を使用して、

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

機能のバリエーションも調べます  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  とその派生物  $\lambda_1'(\alpha)$ 、これは3つのケースを区別することにつながります。

- どこに  $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$
- どこに  $m > 0$  そして  $\lambda_1'(1) \leq 0$
- どこに  $m > 0$  そして  $\lambda_1'(1) > 0$ 。

最初の2つのケースでは、区間 $[0,1]$ の最小 $\Lambda$ が $\alpha = 1$ で到達するため、次のようになります。  $\omega_1 = s(Q + D)$ 。

セクション3では、スペクトル境界が  $\mu_N$  マスター方程式の打ち切られた行列の増加シーケンスを形成します。次に、数値で計算します  $\mu_N$  一連の例で。特に遅いこと、間違いなく対数であることに注意してください。  $\mu_N$  に収束する  $\omega_1$  上記の3番目のケースでは。

セクション4から、他の固有値と関連する固有ベクトルに関心がありますが、それらの結果は非常に部分的です。最初に固有値問題を変換します

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n \pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} \pi_{n,j}, \quad (4)$$

フックス型の特異微分システム (メテウス、1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \quad (5)$$

ジェネレーター機能用

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

固有ベクトルの場合 ( $\pi_{n,i}$ ) $n$  に関して幾何学的に減少する場合、固有値 $\omega$ は必然的に行列の固有値に等しくなります  $Q + \nu D$  整数 $\nu \geq 0$ 。もし $M < 0$ と  $\omega = s(Q + \nu D)$ 、 $x = 1$ の近傍でシステム (5) の解析解を効率的に構築します。フクシアシステムの特性方程式は次のとおりです。

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

言い換えると、 $\omega$  行列の固有値です  $Q + \alpha D$ 。この特性方程式は、次のように動作する解を探すことによって得られます。  $(1-x)^\alpha$  近所で  $x = 1$ 。

3番目のケースを調べましょう：関数  $\lambda_1(\alpha)$  内部で最小に達する  $]0, 1[$ 。仮定すると

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- の開発  $G_i(x)_{x=1}$  の近傍には対数項が含まれ、

私たちはそれから  $\alpha = \alpha^*$  そして、 $\omega = \Lambda$ 。さらに、フックス理論では、特性方程式 (7) が二重根、特に分岐を持っている場合、対数項が現れます。  $\omega = s(Q + \alpha D)$ 。関数の凸性のため  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ 、これは  $\omega = \Lambda$  の場合にのみ発生します。

セクション5では、限界固有ベクトルの漸近的振る舞いを直接調べます。  $\pi = (\pi_{n,i})$  に関連付けられている  $\omega_1$ 。セクション6は、リーマン微分方程式で  $K = 2$  の場合にリンクします。セクション7では、マルコフ連鎖が含まれ、後者は (Dekking, 1988) および (Geiger et al., 2003) の研究の枠組みに含まれます。弱垂臨界と強垂臨界の間のしきい値は、次の場合と同じではないことに注意してください。  $\Lambda \neq s(Q + D)$ 。

他のいくつかの作品に関連して問題をより適切に位置付けるために、システム (1) は「準誕生と死の不均一なプロセス」であることに注意します。たとえば、(Sericola, 2013, p. 350) または (Latouche and Ramaswami, 1999, Chapter 12) を参照してください。これらは、定常分布について説明していますが、収束率については説明していません。さらに、一定の環境で

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

我々は持っています  $D = (a - b)I$  そして  $I$  単位行列です。だから私たちは  $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$  そして式 (3) は  $\omega_1 = a - b$ 。これは、直接計算 (Hillion, 1986, V章) によって、または誕生と死の過程に関するカーリンとマクレガーの結果の特別なケースとしてよく知られています (Collet et al., 2013, セクション5.9.2)。これらの後者の結果を「生と死の準プロセス」(Clayton, 2010) に一般化すると、「スペクトル」が現実である場合にのみ関係します。これは、私たちのモデルでは一般的に当てはまりません。最後に、モデル (1) は、特定の非線形母集団モデル、特に流行モデルの線形化として紹介します (Bacaër, 2016)。

## 2絶滅率の式

### 2.1環境の時間離散化と限界への移行

$M^T$  は、行列  $M$  (またはベクトル) の転置です。時間の小さなステップを選びます  $\delta > 0$ 。マトリックス

$$P = e^{Q^T \delta}$$

離散時間でのマルコフ連鎖の行列です。我々は持っています  $P_{i,j} > 0 \forall i, \forall j$ , 行列  $Q$  は既約なので、環境は、タイムステップ  $\delta$  の間、状態  $i$  でブロックされたままです。次に、環境は状態  $j$  にジャンプします  $P_{i,j}$ 。長さの時間間隔  $\delta$  では、母集団はパラメータの出生と死亡の線形プロセスに従います  $n a_i$  そして  $n b_i$  環境が状態  $i$  の場合。したがって、個人は平均して生成します

$$m_i = e^{(a_i - b_i) \delta}$$

人。我々は持っています  $0 < m_i < +\infty$ 。したがって、私たちはマルコフ環境での分岐プロセスのコンテキストにいます。いくつかの表記：

- $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$   $k$  のトラバース環境のシーケンスであり、

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha). \quad (8)$$

$\mathbb{E}(\cdot)$  数学的期待を表す

- $Z_k$  長さ  $\delta$  の  $k$  個のタイムステップの終了時の母集団のサイズ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$  によって与えられる行列  $\Sigma_{i,j}(\alpha) = P_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = P \operatorname{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$  : 正の行列のスペクトル半径  $\Sigma(\alpha)$ 。

$\mathbb{P}(Z_k > 0)$  人口が絶滅していない確率もそうです。(D'Souza and Hambly, 1997) の結果1.8は、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

私たちのケースでは、 $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$  明示的に計算されます：

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

(8) と (10) から、

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

$\alpha$  の分析関数でもあります。  $\rho(\Sigma(\alpha))$  正の行列の単純な固有値です  $\Sigma(\alpha)$ 。したがって、制限 (9) は  $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ 。したがって、連続時間における消光率  $\omega$  は

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

特に取りましょう  $\delta = 1/h$  整数で  $h \geq 1$ 。私たちは  $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$ 。だが

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[ e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

ソフス・リーの公式から。スペクトル半径は連続関数であり、

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho\left(e^{Q^\top + \alpha D}\right) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

なぜなら  $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ 、と結論付けます

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

最後に、(Collet et al.、2013) の命題4.12は、式 (9) の左側にあるように、(2) または非消滅の確率で定義される消滅率の同等性を保証します。このようにして、連続時間における絶滅率の公式を見つけました。

## 2.2機能の検討 $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

私たちは定義します

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

### 命題1。

- もしメートル、その後、 $\leq 0 \Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし  $M > 0$  と  $\lambda_1'(1) \leq 0$ 、それから私たちも持っています  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし  $M > 0$  と  $\lambda_1'(1) > 0$ 、それからユニークな  $\alpha^* \in ]0, 1[$  と  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ 。

証明。  $v =$  の場合  $(v_i)$  ベクトルです

- $v \geq 0$  もし  $v_i \geq 0 \forall i$
- $v > 0$  もし  $v \geq 0$  そして  $v \neq 0$
- $v \gg 0$  もし  $v_i > 0 \forall i$ 。

行列には同じ表記法を使用します。

(Bacaër, 2016) のセクション9の推論をもう一度取り上げますが、 $R_0 < 1$  の代わりに  $R_0 > 1$ 。マトリックス  $Q + \alpha D$  行列  $Q$  は既約であり、行列  $D$  は対角であるため、すべての  $a_i$  について既約です。そう  $\lambda_1(\alpha)$  行列の単純な固有値です  $Q + \alpha D$ 、

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  そして  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  実数ベクトルの通常のスカラー積を示します。  $\lambda_1(\alpha)$  転置行列の単純な固有値でもあります  $Q^\top + \alpha D$ 、

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^T + \alpha D)v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha)v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

単純な固有値摂動定理から、関数  $\lambda_1(\alpha)$  区別可能であり、

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), Dw_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

特に  $\alpha = 0$ 、我々は持っています  $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ 、 $w_1(0) = u$ 、 $v_1(0) = \mathbf{1}^T$  そして

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^T, Du \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i)u_i < 0$$

なぜなら  $R_0 < 1$ 。

もしメートル  $\leq 0$ 、機能  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  減少しているため  $D \leq 0$ 。ここで、 $m > 0$ 。我々は持っています  $\lambda_1'(0) < 0$ 。関数  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  凸状です (コーエン、1981)。そう  $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$  増加する機能です。さらに、 $\alpha \rightarrow +\infty$ 、我々は持っています  $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$ 。関数  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  アフィンではないため、この場合は厳密に凸です (Nussbaum、1986)。だからユニークな  $\alpha^* > 0$  と  $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$ 。

したがって、3つのケースがあります。

- もしメートル、その後、 $\leq 0$   $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし  $M > 0$  と  $\lambda_1'(1) \leq 0$ 、そう  $\alpha^* \geq 1$  そして  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  間隔で減少します  $[0, 1]$  なので、まだ  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし  $M > 0$  と  $\lambda_1'(1) > 0$ 、そう  $\alpha^* \in ]0, 1[$  そして  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ 。

## 2.3 2つの環境の場合

とする  $K = 2$ 。と  $Q_{i,i} = -q_i$  もし  $i = 1, 2$ 、我々は持っています

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

特性方程式  $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$  書かれた

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

間のこの関係  $\omega$  そして  $\alpha$  平面内の双曲線を説明します  $(\omega, \alpha)$ 。それも書くことができます

$$\alpha^2 - \alpha \left( \frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

さらに、 $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  そのようなものです

$$2\lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

そして

$$2\lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

もしメートル  $\leq 0$  場合、または  $M > 0$  と  $\lambda_1'(1) \leq 0$ 、我々は持っています  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。もし  $M > 0$  と  $\lambda_1'(1) > 0$ 、私たちは持っている必要があります  $d_1 d_2 < 0$ 。この場合、たとえば、 $d_1 > 0$  そして  $d_2 < 0$ 。(13) の判別式を取り消すと、小さな計算の後に、

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

そのことに注意してください  $\Lambda = 0$  そして  $\alpha^* = 0$  もし  $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ 、つまり  $R_0 = 1$ 。

## 3 打ち切られた行列

と  $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ 、主な方程式が書かれています  $\frac{dp}{dt} = Mp$ 。  $M$  は無限行列です。マトリックスをカットしましょう  $M$

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

と  $S = A + B$ 。私たちは定義します  $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$ 。

**命題2。** すべてのために  $N \geq 1$ 、我々は持っています  $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$ 。 ( $\mu_N$ ) したがって、  $N \rightarrow +\infty$ 、誰が  $\omega_1$ 。

証明。メツラー行列は、対角線の外側のすべての係数が  $\geq 0$  の行列です。行列  $\mathcal{U}^{(N)}$   $Q$  は既約なので、既約メツラー行列です。  $a_i > 0$  そして  $b_i > 0 \forall i$ 。したがって、メツラー行列のスペクトル境界に関するペロンとフロベニウスの定理の帰結を使用できます。例を参照してください (Nkague Nkamba, 2012, 定理30)。と  $e = (1, \dots, 1)^T$  我々は持っています

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

なぜなら  $e \gg 0$ 、私たちはそれを推定します  $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$ 。だから私たちは

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

$\mu_N$  行列の固有値です  $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

ベクトル  $\mathcal{W}^{(N)}$  構成されている  $N$  のサイズのブロック  $K$ 、  $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$ 。ベクトルを考える

$$\tilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0もサイズ  $K$  です。その後、

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \tilde{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots & \\ \cdots & 0 & (N+1)B \\ \cdots & 0 & NA \mid Q - (N+1)S \\ \cdots & 0 & NA \mid Q - (N+1)S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

なぜなら  $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ 、我々は持っています  $\mathcal{U}^{(N+1)} \tilde{\mathcal{W}} > \mu_N \tilde{\mathcal{W}}$ 。なぜなら  $\tilde{\mathcal{W}} > 0$ 、私たちはそれを推定します  $\mu_{N+1} > \mu_N$ 。

数値としてとりましょう

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

私たちは  $u_1 = u_2 = 0,5$ 。パラメータ  $a_1$  たとえば、2と5の間で変化します。この上限は、  $R_0 = 1$ 。  $N$  の小さな値の場合、通常最大  $N = 10^3$ 、Scilabのようなソフトウェアは、行列の完全なスペクトルを計算します  $\mathcal{U}^{(N)}$ 。それ以外の場合、の最小固有値を計算します  $-\mathcal{U}^{(N)}$  逆行列に適用される反復法による対応する固有ベクトル。各反復での反転には、3重対角ブロック構造を利用します (Artalejo et al.、2013)。このアルゴリズムを使用すると、  $N = 10^6$  多くの問題なし。

図1は  $\mu_N$  の面では  $a_1$  以下のための  $N$  が固定ではなく、大。反復アルゴリズムは、次の2つの連続推定が終了すると停止します。  $\mu_N$  より少ない違い  $10^{-4}$ 。この図はまた、点線で示し、  $a_1$  式 (3) で与えられる数、  $\lambda_1(1)$  もし  $\lambda'_1(1) \leq 0$  これは、式 (14) で与えられます。  $\lambda'_1(1) > 0$ 。我々は持っています  $\lambda'_1(1) < 0$  もし  $a_1 < a_1^*$  そして  $\lambda'_1(1) > 0$  もし  $a_1 > a_1^*$ 、  $a_1^* \approx 3,2829$ 。  $\Lambda$  と ( $\mu_N$ ) 可能性が高いようです。ただし、収束は非常に遅く、おそらく対数的です。  $R_0$  特に1に近づく  $a_1 > a_1^*$ 。

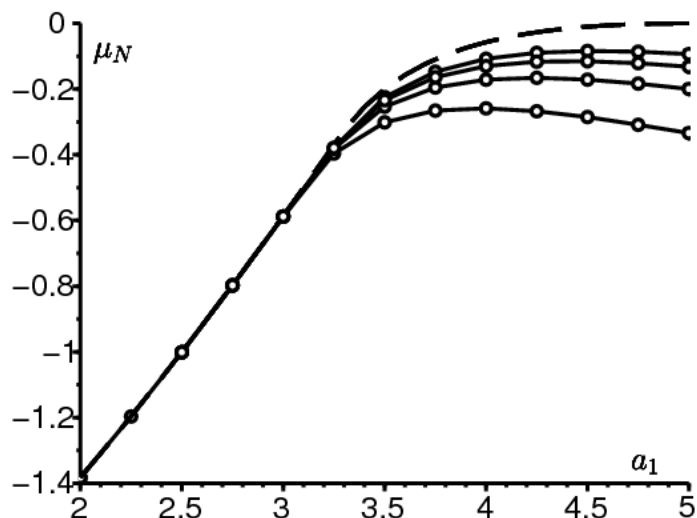


図1.点線：△式(3)の関数として与えられる  $a_1$ 。点のある連続線： $\mu_N$  ために  $N = 10^3, 10^4, 10^5$  そして  $10^6$  (下から上へ)。

## 4固有ベクトルと他の固有値

私たちは今、限界に興味があります  $N \rightarrow \infty$  関連する固有ベクトルの  $\mu_N$  他の固有値とベクトルも同様です。これに関しては、非常に部分的な結果しか得られません。

### 4.1フクシアンシステム

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ 、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 、 $\mathbb{C}$  は複素数のセットであり、' 変数に関する導関数  $x$ 。

命題3。

- 方程式(4)がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$  そして  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ 、
- 生成系列(6)の収束半径  $\geq R$  がある場合、

$G_i(x)$  は、システム(5)のソリューションです。 $x \in \mathbb{C}$ 、 $|x| < R$  そして  $1 \leq i \leq K$ 。

証明。我々は持っています

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

一定の環境での古典的なケース (Hillion, 1986) と同様に、(4)を乗算します  $x^n$ 。すべての  $n \geq 0$  の合計は

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i)x G'_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

これは(5)と同等です。

ノート。

- (5)は特異微分システムの固有値の問題であることに注意してください。このシステムは、次の場合にフックスタイプです。 $a_i \neq b_i \forall i$  (Methée, 1959)。システムには特異点があります  $x = 1$  そして  $x = b_i/a_i$  ために  $1 \leq i \leq K$ 。我々は持っています  $b_i/a_i < 1$  もし  $a_i > b_i$ 。システムを書くこともできます

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Fuchsタイプ2のスカラー微分方程式の例は、一定の環境における二次の誕生と死の過程の研究に現れました (Picard, 1965)。

## 4.2収束半径が> 1の場合の固有値

### 命題4.

- 方程式 (4) がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$ 、 $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  として  $\pi \neq 0$ 、
- 生成系列 (6) の収束半径が厳密に1より大きい場合

次に整数があります  $\nu \geq 0$   $\omega$  が行列  $Q + \nu D$  の固有値であるようなもの。

証明。ばかげた理由で考えましょう。すべての  $\nu \geq 0$  について、 $\omega$  は次の固有値ではないと仮定します。  $Q + \nu D$ 。機能  $G_i(x)$  ディスクで分析的で  $|x| < R$  と  $R > 1$ 。(5) で  $x$  が1に収束する場合：

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

しかし、 $\omega$  は  $Q$  の固有値ではありません。そう  $G_i(1) = 0 \forall i$ 。

整数にする  $\nu \geq 1$ 。帰納によって、我々が証明したと仮定します  $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$ 。  $x$  に関して  $\nu$  倍式 (5) を導出し、ライブニッツの公式を次の積に使用します。  $(1-x)(a_i x - b_i)$  そして  $G'_i(x)$ 。我々は持っています

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x).$$

$\binom{\nu}{k}$  二項式の係数を示します。多項式  $(1-x)(a_i x - b_i)x$  の次数は2です。との表現のみ  $0 \leq k \leq 2$  左側の合計がゼロでない場合：

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

$x$  を1に収束させ、帰納法の仮説で

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

ただし、 $\omega$  は行列の固有値ではありません  $Q + \nu D$ 。そう  $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$ 。

だから、私たちはそれを示しました  $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$  として、任意の整数  $\nu \geq 0$  の場合。機能が  $G_i(x)$  分析的であり、 $G_i(x) = 0$  の近くで  $x = 1$ 、そして  $G_i(x) = 0$  ディスク全体  $|x| < R$  分析拡張の原則に従って。だから私たちは  $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0 \forall n \geq 0$  として  $1 \leq i \leq K$ 。これは仮説と矛盾します  $\pi \neq 0$ 。

ノート。

- 行列  $Q + \nu D$  の固有値は必ずしもすべてが実数であるとは限らないため、システム (5) は、ワイルとコダイラの理論 (Dieudonné, 2003) または (Clayton, 2010) 誕生と死の特定の準プロセスについて。それでも、これらの固有値は、 $K = 2$  のときにすべて実数になります。固有値は  $s(Q + \nu D)$  は実数で、他の固有値も実数です。
- 近所で  $x = 1$ 、システム (16) を書くことができます

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

$G(x)$  ベクトルです ( $G_i(x)$ )。システムは次の形式です

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

と

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

そして  $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$ 。シリーズの収束半径  $G_i(x)$  が  $> 1$  の場合、 $G_i(x)$  近所で分析的で  $x = 1$ 。したがって、上記のシステムは  $x = 1$  の近傍に解析解を持っています。(Gantmacher, 1966, p. 155) によると、整数が存在



します  $\nu \geq 0$   $\nu$  は次の固有値です  $\Omega_{-1}$ 。ベクトルがあります  $w \neq 0$  と

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

だから私たちは

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

そして  $\omega$  は固有値です  $Q + \nu D$ 。これは、提案4で基本的に実証されたものです。

例。数値 (15) を  $a_1 = 2,5$ 。この場合、 $m < 0$ 。ために  $N = 1000$ 、行列の最初の20個の固有値  $M^{(N)}$  大まかに次の表で与えられます：

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

今の固有値  $Q$  0であり、 $-2$ 、それらの  $Q + D$  は  $-1$  そして  $-3,5$ 、それらの  $Q + 2D$  は  $-1,6972244$  そして  $-5,3027756$ 、それらの  $Q + 3D$  は  $-2,2877855$  そして  $-7,2122145$ 、それらの  $Q + 4D$  は  $-2,8377223$  そして  $-9,1622777$ 、などそれらは上の表にあります。したがって、その固有値は  $M^{(N)}$  収束するとき  $N \rightarrow +\infty$  行列の固有値に向けて  $Q + \nu D$  ために  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  そして  $\mu_N$  に収束する  $s(Q + D)$ 。ここを覚えて  $s(Q + D) = \Lambda$  なぜなら  $m < 0$ 。

#### 4.3場合 $a_i < b_i \forall i$

とする  $m < 0$ 。次の形式のシステム (5) の  $x = 1$  の近傍で解を正式に求めましょう

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \quad (17)$$

我々は持っています

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i} (1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} (1-x)^n.$$

我々は持っています  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ 。の係数を特定します  $(1-x)^n$ 。私達は手に入れました

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}, \quad \forall n \geq 0.$$

$c_{n-1,i}$  ない場合  $n = 0$ 。と  $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ 、(17) は (5) の解です。

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

最初のタイプのソリューションは、 $\omega$  の固有値の中で  $Q$  そして  $c_0$  対応する固有ベクトル。関係 (18) により、 $c_n$  ために  $n \geq 1$ 、ただし行列  $Q + nD - \omega I$  常に反転可能です。

2番目のタイプのソリューションは、 $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$  と  $\nu \geq 1$ 、 $\omega$  の固有値  $Q + \nu D$  そして  $c_\nu$  関連する固有ベクトル。次に計算します  $c_n$  ために  $n \geq \nu + 1$  式 (18) で、ただし、行列  $Q + nD - \omega I$  常に反転可能です。

特に取りましょう  $\omega = s(Q + \nu D)$  整数で  $\nu \geq 0$ 。なぜなら  $a_i < b_i \forall i$ 、我々は持っています  $D < 0$ 。さらに、 $Q + \nu D$  既約です。したがって、 $n > \nu$  の整数に対して、

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

だから私たちは  $s(Q + nD - \omega I) < 0$ 。マトリックス  $Q + nD - \omega I$  は可逆メツツラー行列であり、 $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$ 。我々は持っています

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

と  $n \rightarrow +\infty$ 、

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

そして

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

シリーズ (17) は、 $|1 - x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ 。シリーズ (17)  $1 \leq i \leq K$  すべてのために収束しています  $|1 - x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ 。

#### 4.4 1に等しい収束半径

前の2つのセクションでは、整数  $v \geq 0$  の場合の行列  $Q + vD$  の固有値に関心がありました。ただし (Bacaër と Ed-Darraz, 2014) は、 $R_0 < 1$  しかし、固有値は  $s(Q + D)$  マトリックスの  $Q + D$  厳密に肯定的です：ただ取る  $q_1 = q_2 = 1$ 、 $a_1 = 2, 7$ 、 $a_2 = 0, 8$ 、 $b_1 = b_2 = 2$  (そう  $a_1 > b_1$ )。最初の問題は正の固有値を持つことはできません。特に、生成シリーズは  $G_i(x)$  常に収束半径があるとは限らない  $> 1$ 。次の命題は、 $G_i(x)$  近く  $x = 1$  パラメータ付き  $\alpha$ 。

#### 命題5。

- 方程式 (4) がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$ 、 $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  そして  $\pi \neq 0$ 、
- 生成系列 (6) の収束半径が1の場合
- 実数がある場合  $\alpha > 0$ 、整数  $J \geq 0$  および分析機能  $g_{i,j}(x)$  中心のディスク  $x = 1$  と

$$G_i(x) = (1 - x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^j g_{i,j}(x)$$

間隔をあけて  $(1 - \varepsilon, 1)$  と  $\varepsilon > 0$ 、

- ベクトルの場合  $(g_{i,J}(1))$  ゼロではない、

$\omega$  は行列の固有値  $Q + \alpha D$ 。

証明。我々は持っています

$$\begin{aligned} G_i'(x) &= (1 - x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^j g_{i,j}'(x) \\ &\quad + (1 - x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1 - x)]^j - j [\log(1 - x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

$G_i(x)$  は、式 (5) の解です。  $|x| < 1$ 。で割る  $(1 - x)^\alpha [\log(1 - x)]^J$ 。我々は持っています

$$\begin{aligned} \omega \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^{j-J} g_{i,j}(x) &+ (1 - x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^{j-J} g_{i,j}'(x) \\ &+ (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1 - x)]^{j-J} - j [\log(1 - x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ &= \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1 - x)]^{h-J} g_{j,h}(x). \end{aligned}$$

と  $x \rightarrow 1$ 、私達は手に入れました

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j} g_{j,J}(1).$$

したがって、 $\omega$  は行列の固有値です。  $Q + \alpha D$ 。

注意。関数の形式  $G_i(x)$  ベキ関数と対数多項式を組み合わせた命題5では、特異点の近くのフックスシステムの解から期待できるものです (Gantmacher, 1966年, p. 159)。

#### 4.5 場合 $m > 0$ そして $\lambda_1'(1) > 0$

命題6。私たちは仮定します： $m > 0$  そして  $\lambda_1'(1) > 0$ 。その場合、 $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$  と  $\alpha^* \in ]0, 1[$ 。我々は想定しています。 $\alpha > 0$  と  $\omega = s(Q + \alpha D)$ 。

- 方程式 (4) がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$  そして  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- 関連する生成シリーズ  $G_i(x)$  収束半径が  $\delta$  に等しい
- もし  $G_i(x)$  間隔で書くことができます  $(1 - \varepsilon, 1)$   $\varepsilon > 0$  の形式

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

と  $J \geq 1$  そしてベクトル  $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$  ゼロではありません

次に  $\alpha = \alpha^*$  そして、 $\omega = \Lambda$ 。

証明。確かに、

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

我々は持っています  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ 。なぜなら  $G_i(x)$  上の (5) の解決策です  $|x| < 1$ 、我々は持っています

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

の表現  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$  そして  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$  それぞれキャンセルする必要があります：

$$\begin{aligned} \omega g_{i,j,0} - \alpha (a_i - b_i) g_{i,j,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,j,0}, \\ \omega g_{i,j-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,j,0} + \alpha g_{i,j-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,j-1,0}. \end{aligned}$$

私たちは定義します  $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ 。我々は持っています

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

なぜなら  $\omega = s(Q + \alpha D)$  そして  $\gamma_J \neq 0$ 、最初方程式は、 $\gamma_J$  行列の固有ベクトルです  $Q + \alpha D$  固有値に関連付けられています  $s(Q + \alpha D)$ 。セクション2.2の表記から、定数があると推定します  $\kappa \neq 0$  と  $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$ 。さらに、2番目の方程式は次の形をとります。

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

マトリックス  $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$  1次元の核を持ち、 $w_1(\alpha)$ 。セクション2.2の表記をそのままに、転置行列  $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$  によって導かれる1次元の核を持つ  $v_1(\alpha)$ 。(19)の内積をとる  $v_1(\alpha)$

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

(12) によれば、これは  $\lambda'_1(\alpha) = 0$ 。と  $m > 0$  そして  $\lambda'_1(1) > 0$ 、我々は持っています  $\alpha = \alpha^*$ 。だから私たちは  $\omega = \Lambda$ 。

## 5固有ベクトルの漸近的振る舞い

### 5.1場合 $m < 0$

次に、固有ベクトルの  $n$  ラージの動作を調べてみましょう  $(\pi_{n,i})$  固有値に関連付けられています  $\omega_1$ 。(4)の解決策を直接試してみましょう

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

以下のための $n$ 大、我々は持っています

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta}(1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta}(1-\delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

そして

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

だから私たちは

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

以下のための $n$ 大。の表現が  $\Pi^n/n^{\beta-1}$  (4) で

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

だから私たちは

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

と  $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ 、私たちは取る  $\Pi = a_1/b_1$ 、 $k_1 \neq 0$  そして  $k_i = 0$  もし  $i \neq 1$ 。と  $q_i = -Q_{i,i}$ 、式  $\Pi^n/n^\beta$  (4) では

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i / \Pi - a_i - b_i) h_i + (a_i / \Pi - b_i \Pi)(\beta - 1) k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

このように

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1) k_1 - q_1 k_1$$

そして

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1) h_i + Q_{i,1} k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

推測できる

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

または、システム (5) の近くで研究します。  $x = b_1/a_1$ 。我々は持っています

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

固有値について  $\omega_1$ 、関連する固有ベクトルを選択して、 $\pi_{n,i} > 0$  ために  $n \geq 1$ 。シリーズ全体  $G_i(x)$ 、複素平面で0に最も近い特異点を考えます。A.プリングスハイムの定理 (Queffelec and Zuily, 2013, p. 54) によると、この点は  $x > 0$  軸上にあります。(Flajolet and Sedgewick, 2009) によると、

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1+(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

乗法定数内に。これが私たちが見つけたものです。

数値例。数値例 (15) をもう一度、 $a_1 = 2,5$ 。図2は、固有値に関連付けられた固有ベクトルの漸近的な動作を示しています  $\mu_N$ 、ために  $N = 1000$ 。ここにあります  $\Lambda = -1$ 。だから私たちは  $\beta = 1$  そして  $k_1/h_2 = 0,3$ 。この図は、 $n = N$  付近のエッジ効果を考慮に入れるべきではないため、得られた漸近的な結果を裏付けているようです。

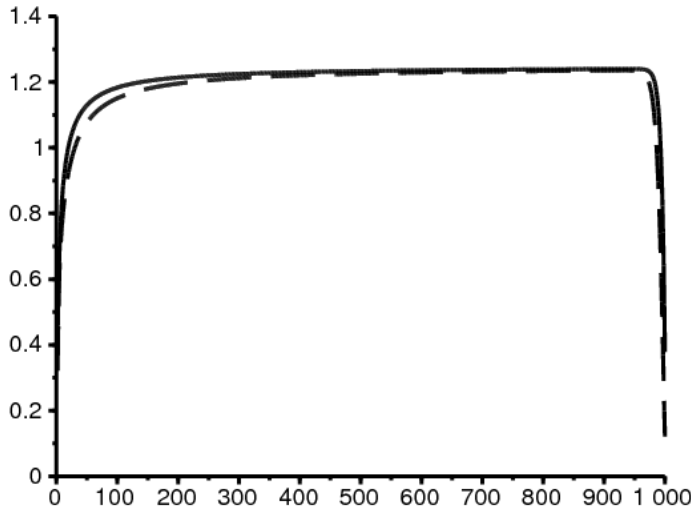


図2. ケース  $a_1 = 2, 5$ .  $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$  (実線) と  $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$  (点線)  $n$  の関数として。打ち切り行列を使用します  $\mathcal{M}^{(N)}$  と  $N = 1000$ 。

## 5.2 ケース $m > 0$

私たちは疑います  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$  または  $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$ 。どちらの場合も、(4) の支配的な表現は

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

言い換えると、 $\omega$  行列の固有値です  $Q + (\beta - 1)D$ 。確かに、私たちはフォームの解決策を探しているなら  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ 、私たちは (20) のように  $\Pi = 1$ 。の場合は

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

我々は持っています

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n \pm 1, i} &\simeq \left( \log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[ \frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

これも式 (22) になります。これは、 $\beta = 1 + \alpha^*$  もし  $\lambda_1'(1) > 1$  そして  $\beta = 2$  もし  $\lambda_1'(1) \leq 0$ 。どちらの場合も、収束半径は  $G_i(x)$  1 になります。

## 6 特定のケースに戻ります $K = 2$

によって満たされる二階微分方程式を考えることができます  $G_1(x)$  一次微分システムではなく  $G_1(x)$  そして  $G_2(x)$ 。私達は手に入れました

$$\begin{aligned} &(1-x)^2(a_1x - b_1)(a_2x - b_2) \frac{d^2 G_1}{dx^2} \\ &+ (1-x) \left\{ [\omega + q_1 + a_1(1-2x) + b_1](a_2x - b_2) + (\omega + q_2)(a_1x - b_1) \right\} \frac{dG_1}{dx} \\ &+ [(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1q_2] G_1 = 0. \end{aligned}$$

で割る  $(1-x)^2(a_1x - b_1)(a_2x - b_2)$  そして、有理分数を単純な要素に分解することにより、

$$0 = \frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[ \frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[ \frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2) - q_1 q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x - \frac{b_1}{a_1})(x - \frac{b_2}{a_2})}.$$

数を仮定します  $b_1/a_1$ 、 $b_2/a_2$  と1はすべて異なります。次の形式の微分方程式を認識します

$$\frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[ \frac{1 - k_0 - k'_0}{x - x_0} + \frac{1 - k_1 - k'_1}{x - x_1} + \frac{1 - k_2 - k'_2}{x - x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[ \frac{k_0 k'_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{x - x_0} + \frac{k_1 k'_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_0)}{x - x_1} + \frac{k_2 k'_2 (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}{x - x_2} \right] \frac{G_1}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} = 0,$$

つまり、3つの特異点を持つリーマン微分方程式 (Roseau, 1997, p. 229)  $x_0 = 1$ 、 $x_1 = b_1/a_1$  そして  $x_2 = b_2/a_2$ 。この方程式の特性指数はそれぞれ

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

と  $\alpha_+$  そして  $\alpha_-$  (13) の解。したがって、解のセットはリーマン表記で書くことができます

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

(Roseau, 1997, p. 229) によれば、

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

私たちは定義します

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

超幾何微分方程式の場合に戻ります

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

平等に変換されます  $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$  非調和指数間。このように

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

超幾何関数は

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

表記あり  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ 。場合、 $x$ が1の近傍で、変数 $y$ が微分超幾何方程式の理論によれば、0の近傍で、定数であります  $\kappa_1$  そして  $\kappa_2$  と

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[ \kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

それを条件として  $c \neq 1$ 、つまり  $\alpha_- \neq \alpha_+$ 。フクシアンの出展者によるソリューション  $\alpha_+$  で、 $X=1$  に対応  $\kappa_2 = 0$

$$G_1(x) = \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

### ケース $m < 0$

例として  $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$ 。私たちは取る  $\alpha_+ = 1$  に関連する固有関数  $\omega_1 = s(Q + D)$ 。我々が選択しました  $\kappa_1$  そのため  $G_1(0) = 1$ 。私たちは

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

(13) から。私たちは定義します

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

これは、 $x$ の値です。  $y = -1$ 。我々は持っています  $1 < \xi < b_1/a_1$ 。値を持つ  $0 < x \ll 1$  の場合、変数  $y$  は減少します

$$\frac{\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - 1} \in ]0, 1[ \quad \searrow \quad -1.$$

その場合  $\xi < x < b_1/a_1$ 、式 (23) を置き換える必要があります

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

これは (C. Jordan、1896) の §182 の式 (18) であり、引数は  $\frac{y}{y-1}$  1/2 から 1 に成長します。

数値例 (15) に戻りましょう。  $a_1 = 2,5$ 。図3は生成関数を示しています  $G_1(x)$  そして  $G_2(x)$  に関連付けられた固有ベクトルで構築  $\mu_N$ 。ここに  $N = 4000$  標準化あり  $G_1(0) = 1$ 。生成系列を評価するためにホーナー法を使用します。それらを式 (23) および (24) と比較します。ここにあります  $\xi \approx 1,105$ 。2つの方法で得られた関数を重ね合わせることができるよう、正規化の倍率を選択しました。

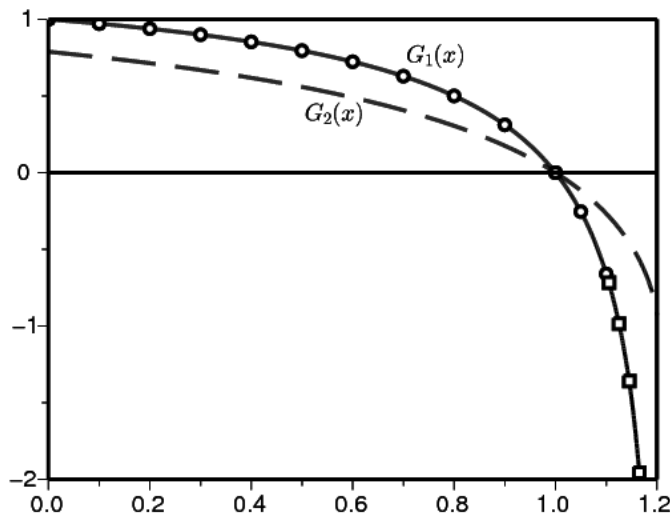


図3. ケース  $a_1 = 2,5$ 。生成関数をトレースします  $G_1(x)$  (実線) と  $G_2(x)$  (点線)  $x$ の関数として。行列の計算に使用するもの  $\mathcal{M}^{(N)}$  と  $N = 4000$ 。の式 (23) および (24)  $G_1(x)$  小さな円と正方形で表されます。

### ケース $m > 0$ そして $\lambda'_1(1) \leq 0$

例として  $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$ 。私たちは今持っています

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

式 (23) は、変数  $y$  分岐する  $x = b_1/a_1 < 1$ 。と  $0 < x < \xi$ 、 $y^{-1}0$ と1の間の数から-1まで変化する減少関数です。この間隔を (C. Jordan、1896、§182) の式 (32) とします。

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

と  $\alpha_+ = 1$ 、 $\omega_1 = s(Q+D)$  そして  $\kappa_1$  そのため  $G_1(0) = 1$ 。ただし、期間中  $\xi < x < 1$ 、(C. Jordan、1896、§182) の式 (34) をとります。  $(1-y)^{-1}$  1/2から1に増加します。

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

数値例 (15) に戻りましょう。  $a_1 = 3, 2$ 。図4に式 (25) と (26) を示します。それらは、固有ベクトルで構築された生成関数とよく一致します。ここにあります  $\xi \approx 0, 97$ 。

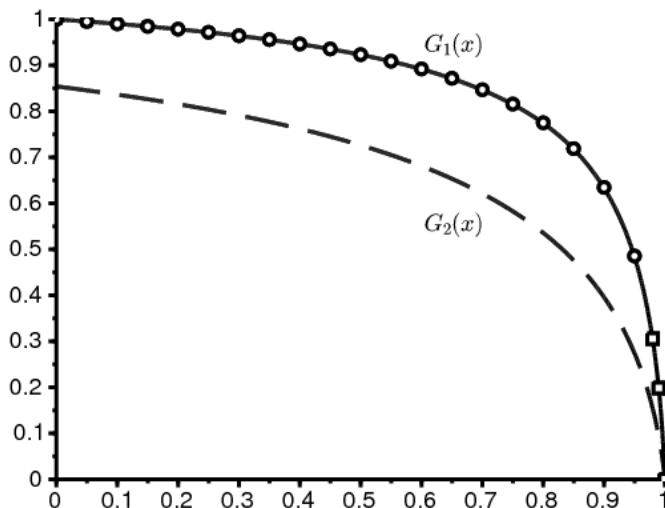


図4. ケース  $a_1 = 3, 2$ 。式 (25) [小さい円] と (26) [小さい正方形] の比較  $G_1(x)$  に関連付けられた固有ベクトルの生成関数  $\mu_N$  (実線)、 $N = 10^4$ 。

### ケース $m > 0$ そして $\lambda'_1(1) > 0$

式 (25) および (26) は、たとえ次の場合でも、おそらく無効になります。  $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$ 。それらは、対数項を含む式に置き換える必要があります。と  $a_1 = 3, 5$ 、我々は持っています  $\Lambda = -0, 2$  そして  $\alpha^* = 0, 6$  式 (14) に従います。この場合、示唆的なグラフを取得できませんでした。

## 7 含まれるマルコフ連鎖

同一に分散された独立した環境を持つランダムな環境での垂臨界分岐プロセスの場合、 $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ 、我々は持っています

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha). \quad (27)$$

$f(x)$  は母関数を表す (Dekking、1988; Geiger et al.、2003)。  $\mu$  を (27) の右辺の最小値とします。「弱臨界未満」の場合



$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

我々は持っています

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

一定の  $c > 0$ 。「非常に未臨界」の場合

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

我々は持っています  $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$  そして

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

一定の  $c > 0$ 。以下の場合、プロセスは未臨界です。  $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$ 。

誕生と死のプロセスに戻りましょう。2つの環境の特定のケースに限定します。  $K = 2$ 。私たちは定義します

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

と  $a_i \neq b_i$ 、それは時間後の個体数の生成関数です  $t$  環境内の時間0の個人から開始  $i$  (ヒリオン、1986)。すべての場合において、

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

しばらくして  $t_1$ 、環境が状態1から状態2に切り替わります。しばらくすると  $t_2$ 、環境は状態1に戻ります。関連する確率密度は  $q_1 e^{-q_1 t_1}$  そして  $q_2 e^{-q_2 t_2}$ 。次に、時間0と時間間のみの変化のみを考慮して、含まれているマルコフチェーンを検討します。  $t_1 + t_2$ 、  $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ 。それを世代と呼びましょう。ジエネレータ関数は

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

特に、  $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$ 。この分岐プロセスは重要ではありません。確かに、

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

なぜなら  $R_0 < 1$ 。プロセスは次の場合に非常に重要です

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[ \frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

この場合、

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

注意してください  $d_1 < 0$  そして  $d_2 < 0$ 、その後、プロセスは非常に臨界未満です。弱臨界未満のケースでは、

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

そして少し計算が示しています

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left( \frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2} \right)^2}.$$

この数は  $< 1$  もしそうなら  $R_0 < 1$ 。

私たちの数値例では、式 (28) は、含まれるマルコフ連鎖が次の場合に強く未臨界であることを示しています。  $a_1 < 3,4$ 。奇妙なことに、このしきい値はケースを分離するしきい値とは異なります  $\Lambda = s(Q + D)$  そして  $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$  と  $0 < \alpha^* < 1$  誕生と死の線形プロセスのために。この最後のしきい値は  $\approx 3,2829$  ただし、セクション3

から。ただし、含まれているマルコフ連鎖が絶滅に収束する速度は、連続時間プロセスが同じことを行う速度とはほとんど関係がありません。

## 8 まとめ

固有値と固有ベクトルの振る舞いに関しては、まだ解明されていない点がたくさんあります。可能な一般化の中では、係数  $a_i$ 、 $b_i$  そして  $Q_{i,j}$  は時間  $t$  の周期関数であり、 $\omega_1$  に等しくなります  $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ 。  $f(\cdot)$  支配的なフロケ指数を指定し、スペクトル境界を置き換えます。

## ありがとう

Vincent Bansaye、Anne Duval、Bruno Sericola のコメントと提案に感謝します。

## 参考文献

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martinez S, San Martin J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D'Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Prob* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) *Éléments d'analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) *Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire*. *Ann I H Poincaré-Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphia
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) *Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle*. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l'agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) *Équations différentielles*. In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris