

Sui processi lineari subcritici di nascita e morte in un ambiente casuale

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers, Parigi, Francia
nicolas.bacaer@ird.fr

riassunto

Otteniamo una formula esplicita per il tasso di estinzione dei processi lineari subcritici di nascita e morte in un ambiente casuale. Questa formula è illustrata calcolando numericamente l'autovalore della parte reale più grande per la matrice troncata dell'equazione principale. La funzione generatrice dell'autovettore associato controlla un singolare sistema di equazioni differenziali di tipo Fuchs. Particolare attenzione è rivolta al caso di due ambienti, che porta a un'equazione differenziale di Riemann.

1. Introduzione

Supponiamo che l'ambiente oscilli tra un numero finito K di stati ($K \geq 2$) seguendo una catena Markov a tempo continuo omogeneo. $Q = (Q_{i,j})$ è la matrice il cui trasposizione è il generatore infinitesimale di questa catena:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

Partiamo dal presupposto che la matrice Q è irriducibile. C'è un singolo vettore $u = (u_i)$ con

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013, p. 152).

Il numero di individui che si evolvono in questo ambiente casuale è n . Nell'ambiente i ($1 \leq i \leq K$), supponiamo di avere un processo lineare di nascita e morte dei parametri

- $n a_i$ per le nascite
- $n b_i$ per i morti,

con $a_i > 0$ e $b_i > 0$. In altre parole, durante un intervallo di tempo infinitesimale dt ,

- con una probabilità $a_i dt$, ogni individuo dà alla luce un nuovo individuo,
- ogni individuo muore con una probabilità $b_i dt$.

Supponiamo che al momento $t = 0$ ci sia n_0 persone ($n_0 \geq 1$) e l'ambiente è i_0 . La probabilità di avere n individui nell'ambiente i al momento t è $p_{n,i}(t)$. Quindi abbiamo $p_{n,i}(0) = 1$ se $(n, i) = (n_0, i_0)$ e $p_{n,i}(0) = 0$ altrimenti. L'equazione principale è

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (1)$$

Ma $p_{n-1,i}$ è assente per $n = 0$. Come (Lotka, 1939), definiamolo

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

Lo supponiamo sempre $R_0 < 1$: quasi sicuramente la popolazione si estinguerà (Cogburn e Torrez, 1981; Bacaër e Ed-Darraz, 2014). È il regime subcritico. Con $t \rightarrow +\infty$, noi abbiamo

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

Il tasso di estinzione esiste e non dipende da $n \geq 1$ o i

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet et al., 2013, sezione 4.5). Inoltre, non dipende dalla condizione iniziale (n_0, i_0) . Il problema è determinare esplicitamente questo tasso.

Usiamo alcune notazioni:

- $\Re(\cdot)$ è la parte reale di un numero complesso
- $\sigma(M)$ è lo spettro di una matrice M .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ è il limite spettrale
- A è la matrice diagonale $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$.

Quando la matrice M ha coefficienti al di fuori della diagonale che sono positivi o zero, che sarà sempre il caso seguente, segue dal teorema di Perron e Frobenius che $s(M)$ è anche un autovalore di M .

Nella sezione 2, utilizziamo un risultato di (D'Souza e Hambly, 1997) relativo ai processi di ramificazione in un ambiente casuale per mostrare che

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

Studiamo anche le variazioni della funzione $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ e il derivato $\lambda_1'(\alpha)$, che porta a distinguere tre casi:

- quello dove $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$
- quello dove $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$
- quello dove $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$.

Nei primi due casi, il minimo Λ nell'intervallo $[0, 1]$ viene raggiunto a $\alpha = I$, in modo che $\omega_1 = s(Q + D)$.

Nella sezione 3, osserviamo che il limite spettrale μ_N della matrice troncata dell'equazione principale forma una sequenza crescente. Quindi calcoliamo numericamente μ_N in una serie di esempi. Notiamo in particolare la lentezza, senza dubbio logaritmica, con la quale μ_N converge a ω_1 nel terzo caso sopra menzionato.

Dalla sezione 4 siamo interessati agli altri autovalori e agli autovettori associati, per i quali otteniamo risultati solo parziali. Trasformiamo innanzitutto il problema degli autovalori

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

in un singolare sistema differenziale del tipo Fuchs (Methée, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

per la funzione generatore

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

Se l'autovettore $(\pi_{n,i})$ diminuisce geometricamente rispetto a n , quindi l'autovalore ω è necessariamente uguale all'autovalore di una matrice $Q + \nu D$ con intero $\nu \geq 0$. Se $m < 0$ e $\omega = s(Q + \nu D)$, costruiamo efficacemente soluzioni analitiche del sistema (5) nelle vicinanze di $x = I$. L'equazione caratteristica del sistema fucsa è

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

in altre parole, ω è un autovalore della matrice $Q + \alpha D$. Questa equazione caratteristica si ottiene cercando soluzioni che si comportino come $(1-x)^\alpha$ nel quartiere di $x = 1$.

Studiamo il terzo caso: la funzione $\lambda_1(\alpha)$ raggiunge il suo minimo dentro $]0, 1[$. Se assumiamo

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- lo sviluppo di $G_i(x)$ in prossimità di $x = I$ contiene un termine logaritmico,

abbiamo quindi $\alpha = \alpha^*$ e $\omega = \Lambda$. Inoltre, nella teoria di Fuchs, i termini logaritmici appaiono quando l'equazione caratteristica (7) ha una doppia radice, in particolare il ramo $\omega = s(Q + \alpha D)$. A causa della convessità della funzione $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$, questo accade solo per $\omega = \Lambda$.

Nella sezione 5, studiamo direttamente il comportamento asintotico del limite autovettore $\pi = (\pi_{n,i})$ associato a ω_1 . La sezione 6 stabilisce il collegamento quando $K = 2$ con un'equazione differenziale di Riemann. Nella sezione 7, siamo interessati alla catena di Markov inclusa, quest'ultima che rientra nel quadro del lavoro di (Dekking, 1988) e (Geiger et al., 2003). Notiamo che la soglia tra i regimi debolmente e fortemente subcritici non è la stessa di quella in cui $\Lambda \neq s(Q + D)$.

Per meglio collocare il nostro problema in relazione ad alcune altre opere, notiamo che il sistema (1) è un "processo non omogeneo di quasi nascita e morte"; vedi ad esempio (Sericola, 2013, p. 350) o (Latouche e Ramaswami, 1999, capitolo 12), che discutono della distribuzione stazionaria ma non del tasso di convergenza verso di essa. Inoltre, in un ambiente costante con

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

noi abbiamo $D = (a - b)I$ e I è la matrice dell'identità. Quindi abbiamo $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ e formula (3) dà $\omega_1 = a - b$. Questo è ben noto sia mediante calcolo diretto (Hillion, 1986, capitolo V), sia come un caso speciale dei risultati di Karlin e McGregor sui processi di nascita e morte (Collet et al., 2013, sezione 5.9.2). Le generalizzazioni di questi ultimi risultati ai "quasi processi di nascita e morte" (Clayton, 2010) riguardano solo casi in cui lo "spettro" è reale. Questo non è generalmente il caso nel nostro modello. Infine, il modello (1) interviene come linearizzazione di alcuni modelli di popolazione non lineare, e in particolare dei modelli epidemici (Bacaër, 2016).

2 La formula per il tasso di estinzione

2.1 Tempo di discretizzazione dell'ambiente e passaggio al limite

M^T è la trasposizione di una matrice M (o di un vettore). Scegliamo un piccolo passo temporale $\delta > 0$. La matrice

$$\mathcal{P} = e^{Q^T \delta}$$

è la matrice di una catena di Markov in tempo discreto. abbiamo $\mathcal{P}_{i,j} > 0 \forall i, \forall j$, perché la matrice Q è irriducibile. L'ambiente rimane bloccato nello stato i per un passaggio temporale δ . Quindi l'ambiente passa allo stato j , con una probabilità $\mathcal{P}_{i,j}$. Nell'intervallo di tempo δ , la popolazione segue un processo lineare di nascita e morte dei parametri $n a_i$ e $n b_i$ se l'ambiente è nello stato i . Pertanto, un individuo genera in media

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

persone. abbiamo $0 < m_i < +\infty$. Siamo quindi nel contesto di un processo di ramificazione in un ambiente Markov. Alcune notazioni:

- $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ è una sequenza di k ambienti attraversati,

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha). \quad (8)$$

$\mathbb{E}(\cdot)$ denota aspettativa matematica

- Z_k è la dimensione della popolazione alla fine della fase temporale k , di lunghezza δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$ la matrice data da $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$: il raggio spettrale della matrice positiva $\Sigma(\alpha)$.

$\mathbb{P}(Z_k > 0)$ così è la probabilità che la popolazione non si estingua. Corollario 1.8 di (D'Souza e Hambly, 1997) lo dimostra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

Nel nostro caso, l'aspettativa di $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ è calcolato esplicitamente:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{\xi_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

Ne consegue (8) e (10) che

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

È anche una funzione analitica di α perché $\rho(\Sigma(\alpha))$ è un semplice autovalore della matrice positiva $\Sigma(\alpha)$. Il limite (9) è quindi uguale a $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Il tasso di estinzione ω in tempo continuo è quindi

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

Prendiamo in particolare $\delta = 1/h$ con un numero intero $h \geq 1$. Abbiamo quindi $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$. Ma

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

dalla formula di Sophus Lie. Il raggio spettrale essendo una funzione continua, abbiamo

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Perché $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$, lo concludiamo

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Infine, la proposizione 4.12 di (Collet et al., 2013) garantisce l'uguaglianza dei tassi di estinzione definiti con (2) o con la probabilità di non estinzione come nella parte sinistra dell'equazione (9). Abbiamo quindi trovato la formula per il tasso di estinzione in tempo continuo.

2.2 Studio della funzione $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

Definiamo

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

Proposta 1.

- Se $m \leq 0$, allora $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$, quindi abbiamo anche $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$, poi c'è un unico $\alpha^* \in]0, 1[$ con $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

Prova. Se $v = (v_i)$ è un vettore,

- $v \geq 0$ Se $v_i \geq 0 \forall i$
- $v > 0$ Se $v \geq 0$ e $v \neq 0$
- $v \gg 0$ Se $v_i > 0 \forall i$.

Usiamo notazioni identiche per le matrici.

Riprendiamo il ragionamento della sezione 9 di (Bacaër, 2016) ma con $R_0 < 1$ invece di $R_0 > 1$. La matrice $Q + \alpha D$ è irriducibile per tutto α perché la matrice Q è irriducibile e la matrice D diagonale. In tal modo $\lambda_1(\alpha)$ è un semplice autovalore della matrice $Q + \alpha D$,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il solito prodotto scalare di vettori reali. $\lambda_1(\alpha)$ è anche un semplice autovalore della matrice trasposta $Q^\top + \alpha D$,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^\top + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

Dal semplice teorema di perturbazione degli autovalori, sappiamo che la funzione $\lambda_1(\alpha)$ è differenziabile e

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

Specialmente per $\alpha = 0$, noi abbiamo $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$, $w_1(0) = u$, $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$ e

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

perché $R_0 < 1$.

Se $m \leq 0$, la funzione $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ sta diminuendo perché $D \leq 0$. Ora considera il caso in cui $m > 0$. abbiamo $\lambda_1'(0) < 0$. Funzione $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ è convesso (Cohen, 1981). pertanto $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$ è una funzione crescente. Inoltre, se $\alpha \rightarrow +\infty$, noi abbiamo $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$. Funzione $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ è in questo caso strettamente convesso poiché non è affine (Nussbaum, 1986). Quindi c'è un unico $\alpha^* > 0$ con $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$.

Quindi ci sono tre casi:

- Se $m \leq 0$, allora $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$, allora $\alpha^* \geq 1$ e $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ diminuisce nell'intervallo $[0, 1]$, quindi abbiamo ancora $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$, allora $\alpha^* \in]0, 1[$ e $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

2.3 Il caso di due ambienti

Assumiamo $K = 2$. Con $Q_{i,i} = -q_i$ Se $i = 1, 2$, noi abbiamo

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

L'equazione caratteristica $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ è scritto

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Questa relazione tra ω e α descrive un'iperbole nel piano (ω, α) . Può anche essere scritto

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

Più, $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ è tale che

$$2\lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

e

$$2\lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Se $m \leq 0$ o se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$, noi abbiamo $\Lambda = \lambda_1(1)$. Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$, noi dobbiamo avere $d_1 d_2 < 0$. Supponiamo in questo caso ad esempio quello $d_1 > 0$ e $d_2 < 0$. Annullando il discriminante di (13), troviamo dopo un piccolo calcolo che

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Notare che $\Lambda = 0$ e $\alpha^* = 0$ Se $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$, cioè se $R_0 = 1$.

3 La matrice troncata

Con $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^\top$, viene scritta l'equazione principale $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$. \mathcal{M} è una matrice infinita. Tagliamo la matrice \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

con $S = A + B$. Definiamo $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$.

Proposta 2. Per tutti $N \geq 1$, noi abbiamo $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$. (μ_N) pertanto ha un limite se $N \rightarrow +\infty$, chi è ω_1 .

Prova. Una matrice Metzler è una matrice in cui tutti i coefficienti esterni alla diagonale sono ≥ 0 . La matrice $\mathcal{U}^{(N)}$ è una matrice irriducibile di Metzler perché Q è irriducibile, $a_i > 0$ e $b_i > 0 \forall i$. Possiamo quindi usare i corollari del teorema di Perron e Frobenius riguardo al limite spettrale delle matrici di Metzler; vedi per esempio (Nkague Nkamba, 2012, Teorema 30). Con $e = (1, \dots, 1)^\top$ noi abbiamo

$$(\mathcal{U}^{(N)})^\top e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Perché $e \gg 0$, lo deduciamo $s((\mathcal{U}^{(N)})^\top) < 0$. Quindi abbiamo

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^\top) < 0.$$

μ_N è un autovalore della matrice $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

Il vettore $\mathcal{W}^{(N)}$ è composto da N blocchi di dimensione K , $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$. Considera il vettore

$$\bar{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 è anche di dimensioni K . Abbiamo quindi

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \bar{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots \\ \dots & 0 & (N+1)B \\ \dots & 0 & NA & Q - (N+1)S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Perché $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$, noi abbiamo $\mathcal{U}^{(N+1)} \bar{\mathcal{W}} > \mu_N \bar{\mathcal{W}}$. Perché $\bar{\mathcal{W}} > 0$, lo deduciamo $\mu_{N+1} > \mu_N$.

Come valori numerici, prendiamo

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

Abbiamo quindi $u_1 = u_2 = 0,5$. Il parametro a_1 varia ad esempio tra 2 e 5; questo limite superiore corrisponde a $R_0 = 1$. Per piccoli valori di N , in genere fino a $N = 10^3$, software come Scilab calcola l'intero spettro della matrice $\mathcal{U}^{(N)}$. Altrimenti calcoliamo il più piccolo autovalore di $-\mathcal{U}^{(N)}$ e l'autovettore corrispondente mediante un metodo iterativo applicato alla matrice inversa. Uno sfrutta la struttura a blocchi tridiagonali per l'inversione ad ogni iterazione (Artalejo et al., 2013). Con questo algoritmo, possiamo arrivare fino a $N = 10^6$ senza troppi problemi.

La figura 1 mostra μ_N in termini di a_1 per N fisso ma grande. L'algoritmo iterativo viene interrotto quando due stime consecutive di μ_N differiscono meno di 10^{-4} . La figura mostra anche a linee tratteggiate e secondo a_1 il numero Λ dato dalla formula (3), che è $\lambda_1(1)$ se $\lambda'_1(1) \leq 0$ e che è dato dalla formula (14) quando $\lambda'_1(1) > 0$. abbiamo $\lambda'_1(1) < 0$ se $a_1 < a_1^*$ e $\lambda'_1(1) > 0$ se $a_1 > a_1^*$, con $a_1^* \simeq 3,2829$. L'accordo tra Λ e il limite di (μ_N) sembra probabile. Tuttavia, la convergenza è estremamente lenta, forse logaritmica, quando R_0 si avvicina a 1, soprattutto quando $a_1 > a_1^*$.

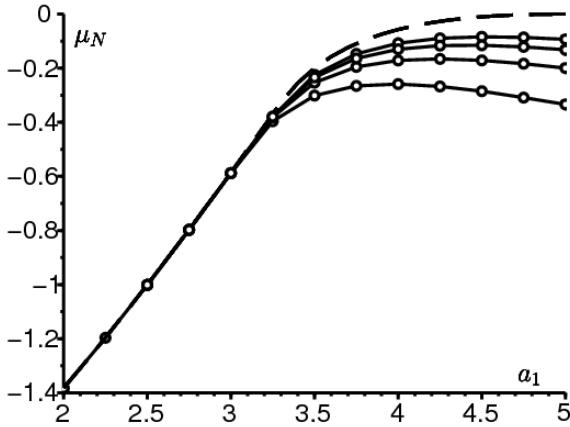


Figura 1. Linea tratteggiata: Λ dato dalla formula (3) in funzione di a_1 . Linee continue con punti: μ_N per $N = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 (dal basso verso l'alto).

4 autovettori e altri autovalori

Ora siamo interessati al limite $N \rightarrow \infty$ dell'autovettore associato a μ_N così come agli altri autovalori e vettori. A questo proposito, otterremo solo risultati molto parziali.

4.1 Un sistema fucsia

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{C} è l'insieme di numeri complessi e $'$ la derivata rispetto alla variabile x .

Proposta 3.

- Se abbiamo equazione (4), con $\omega \in \mathbb{C}$ e $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$,
- se le serie generatrici (6) hanno un raggio di convergenza $\geq R$,

$G_i(x)$ è la soluzione del sistema (5) per $x \in \mathbb{C}$, $|x| < R$ e $1 \leq i \leq K$.

Prova. abbiamo

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

Come nel caso classico con ambiente costante (Hillion, 1986), moltiplichiamo (4) per x^n . La sommatoria su tutti $N \geq 0$ dà

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i)x G'_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Ciò equivale a (5).

Appunti.

- Notiamo che (5) è un problema di autovalore per un sistema differenziale singolare. Questo sistema è del tipo Fuchs se $a_i \neq b_i \forall i$ (Methée, 1959). Il sistema ha una singolarità in $x = 1$ e dentro $x = b_i/a_i$ per $1 \leq i \leq K$. abbiamo $b_i/a_i < 1$ se $a_i > b_i$. Possiamo anche scrivere il sistema

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Un esempio di equazione differenziale scalare di tipo 2 di Fuchs dell'ordine 2 è apparso nello studio dei processi quadratici di nascita e morte in un ambiente costante (Picard, 1965).

4.2 Autovalori quando il raggio di convergenza è > 1

Proposta 4.

- Se abbiamo equazione (4), con $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ e $\pi \neq 0$,
- se le serie generatrici (6) hanno un raggio di convergenza strettamente maggiore di 1,

quindi c'è un numero intero $\nu \geq 0$ tale che ω è un autovalore della matrice $Q + \nu D$.

Prova. Lasciateci ragionare dall'assurdo. Supponiamo che per tutto $\nu \geq 0$, ω non sia un autovalore di $Q + \nu D$. Le funzioni $G_i(x)$ sono analitici in un disco $|x| < R$ con $R > 1$. Se x converge a 1 in (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Ma ω non è un autovalore di Q . pertanto $G_i(1) = 0 \forall i$.

Sia un numero intero $\nu \geq 1$. Per induzione, supponiamo che abbiamo dimostrato $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$. Deriviamo ν volte l'equazione (5) rispetto a x e usiamo la formula di Leibniz per il prodotto di $(1-x)(a_i x - b_i)$ e $G_i^{(\nu)}(x)$. abbiamo

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x).$$

$\binom{\nu}{k}$ indica il coefficiente del binomio. Il polinomio $(1-x)(a_i x - b_i)$ è di grado 2 in x . Solo espressioni con $0 \leq k \leq 2$ sono diversi da zero nella somma a sinistra:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

Facciamo convergere x in 1 e troviamo l'ipotesi dell'induzione

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

Tuttavia ω non è un autovalore della matrice $Q + \nu D$. pertanto $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$.

Quindi, lo abbiamo dimostrato $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$ e per qualsiasi numero intero $\nu \geq 0$. Perché la funzione $G_i(x)$ è analitico, abbiamo $G_i(x) = 0$ nelle vicinanze di $x = 1$, e persino $G_i(x) = 0$ su tutto il disco $|x| < R$ secondo il principio di estensione analitica. Quindi abbiamo $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0 \forall n \geq 0$ e $1 \leq i \leq K$. Ciò contraddice l'ipotesi $\pi \neq 0$.

Appunti.

- Gli autovalori delle matrici $Q + \nu D$ non sono necessariamente tutti reali, quindi il sistema (5) non è collegato né alla teoria di Weyl e Kodaira (Dieudonné, 2003), né allo studio di (Clayton, 2010) su alcuni quasi-processi di nascita e morte. Questi autovalori sono comunque tutti reali quando $K = 2$. Perché l'autovalore $s(Q + \nu D)$ è un numero reale, anche l'altro autovalore è reale.
- Nel quartiere di $x = 1$, è possibile scrivere il sistema (16)

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

$G(x)$ è il vettore $(G_i(x))$. Il sistema è nella forma

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

con

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

e $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$. Se il raggio di convergenza della serie $G_i(x)$ è > 1 , quindi $G_i(x)$ è analitico in un quartiere di $x = 1$. Quindi il sistema sopra ha una soluzione analitica in un quartiere di $x = 1$. Secondo (Gantmacher, 1966, p. 155), esiste un numero intero $\nu \geq 0$ per cui ν è un autovalore di Ω_{-1} . Quindi c'è un vettore $w \neq 0$ con

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

Quindi abbiamo

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

e ω è un autovalore di $Q + \nu D$. Questo è ciò che è stato dimostrato elementare nella proposizione 4.

Esempio. Prendi i valori numerici (15) con $a_1 = 2,5$. In questo caso, abbiamo $m < 0$. Per $N = 1000$, i primi venti autovalori della matrice $\mathcal{M}^{(N)}$ sono approssimativamente dati dalla seguente tabella:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

Ora gli autovalori di Q sono 0 e -2, quelli di $Q + D$ siamo -1 e -3,5, quelli di $Q + 2D$ siamo -1,6972244 e -5,3027756, quelli di $Q + 3D$ siamo -2,2877855 e -7,2122145, quelli di $Q + 4D$ siamo -2,8377223 e -9,1622777, eccetera. Si trovano nella tabella sopra. Sembra quindi che gli autovalori di $\mathcal{M}^{(N)}$ convergere quando $N \rightarrow +\infty$ verso gli autovalori delle matrici $Q + \nu D$ per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ e μ_N converge a $s(Q + D)$. Ricordalo qui $s(Q + D) = \Lambda$ perché $m < 0$.

4.3 Il caso in cui $a_i < b_i \forall i$

Assumiamo $m < 0$. Cerchiamo formalmente una soluzione in prossimità di $x = 1$ del sistema (5) del modulo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \quad (17)$$

abbiamo

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i} (1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} (1-x)^n.$$

abbiamo $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Identifichiamo i coefficienti di $(1-x)^n$. Otteniamo

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}, \quad \forall n \geq 0.$$

$c_{n-1,i}$ è assente se $n = 0$. Con $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$, (17) è una soluzione di (5) if

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Un primo tipo di soluzione si ottiene scegliendo ω tra gli autovalori di Q e c_0 un autovettore corrispondente. La relazione (18) consente di calcolare c_n per $n \geq 1$, a condizione che la matrice $Q + nD - \omega I$ è sempre invertibile.

Un secondo tipo di soluzione si ottiene scegliendo $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ con $\nu \geq 1$, ω un autovalore di $Q + \nu D$ e c_ν un autovettore associato. Quindi calcoliamo c_n per $n \geq \nu + 1$ con equazione (18), a condizione che la matrice $Q + nD - \omega I$ è sempre invertibile.

Prendiamo in particolare $\omega = s(Q + \nu D)$ con un numero intero $\nu \geq 0$. Perché $a_i < b_i \forall i$, noi abbiamo $D < 0$. Più, $Q + \nu D$ è irriducibile. Quindi per qualsiasi numero intero $n > \nu$, abbiamo

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

Quindi abbiamo $s(Q + nD - \omega I) < 0$. La matrice $Q + nD - \omega I$ è una matrice Metzler invertibile e $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$. abbiamo

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Con $n \rightarrow +\infty$,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

e

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

La serie (17) è convergente per $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$. La serie (17) per $1 \leq i \leq K$ convergono tutti per $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$.

4.4 Un raggio di convergenza uguale a 1

Nelle due sezioni precedenti, abbiamo discusso gli autovalori delle matrici $Q + \nu D$ per un numero intero $\nu \geq 0$. Tuttavia (Bacaër e Ed-Darraz, 2014) hanno già evidenziato un esempio in cui $R_0 < 1$ ma dove l'autovalore $s(Q + D)$ della matrice $Q + D$ è strettamente positivo: basta prendere $q_1 = q_2 = 1$, $a_1 = 2,7$, $a_2 = 0,8$, $b_1 = b_2 = 2$ (pertanto $a_1 > b_1$). Il nostro problema iniziale non può avere un autovalore positivo. Concludiamo in particolare che le serie generatrici $G_i(x)$ non hanno sempre un raggio di convergenza > 1 . La seguente proposta collega il comportamento di $G_i(x)$ vicino a $x = 1$ con il parametro α .

Proposta 5 .

- Se abbiamo equazione (4), con $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ e $\pi \neq 0$,
- se le serie generatrici (6) hanno un raggio di convergenza pari a 1,
- se c'è un numero reale $\alpha > 0$, un numero intero $J \geq 0$ e funzioni analitiche $g_{i,j}(x)$ in un disco centrato in $x = 1$ con

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

- per un intervallo $(1-\varepsilon, 1)$ con $\varepsilon > 0$,
- se il vettore $(g_{i,J}(1))$ non è zero,

allora ω è un autovalore della matrice $Q + \alpha D$.

Prova . abbiamo

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ &\quad + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

$G_i(x)$ è la soluzione dell'equazione (5) per $|x| < 1$. Ci dividiamo per $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$. abbiamo

$$\begin{aligned} &\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ &\quad + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ &= \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x). \end{aligned}$$

Con $x \rightarrow 1$, otteniamo

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

Quindi ω è un autovalore della matrice $Q + \alpha D$.

Nota. La forma della funzione $G_i(x)$ nella proposizione 5, che combina una funzione di potere e un polinomio logaritmico, è ciò che ci si può aspettare da una soluzione di un sistema di Fuchs in prossimità di una singolarità (Gantmacher, 1966, p. 159).

4.5 Il caso in cui $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$

Proposta 6. Assumiamo : $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$. In quel caso, $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ con $\alpha^* \in]0, 1[$. Supponiamo: $\alpha > 0$ e $\omega = s(Q + \alpha D)$.

- Se abbiamo equazione (4), con $\omega \in \mathbb{C}$ e $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- se le serie generatrici associate $G_i(x)$ avere un raggio di convergenza pari a 1
- se la $G_i(x)$ può essere scritto su un intervallo $(1 - \varepsilon, 1)$ con $\varepsilon > 0$ nel modulo

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

con $J \geq 1$ e un vettore $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ che non è zero,

quindi $\alpha = \alpha^*$ e $\omega = \Lambda$.

Prova . In effetti,

$$G_i'(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

abbiamo $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Perché $G_i(x)$ è una soluzione di (5) in poi $|x| < 1$, noi abbiamo

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

Espressioni in $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ e dentro $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ ognuno deve cancellare:

$$\begin{aligned} \omega g_{i,j,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,j,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,j,0}, \\ \omega g_{i,j-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,j,0} + \alpha g_{i,j-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,j-1,0}. \end{aligned}$$

Definiamo $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$. abbiamo

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

Perché $\omega = s(Q + \alpha D)$ e $\gamma_J \neq 0$, la prima equazione mostra che γ_J è un autovettore della matrice $Q + \alpha D$ associato con autovalore $s(Q + \alpha D)$. Con le notazioni della sezione 2.2, deduciamo che esiste una costante $\kappa \neq 0$ con $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$. Inoltre, vediamo che la seconda equazione prende la forma

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

La matrice $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ ha un nucleo monodimensionale, guidato da $w_1(\alpha)$. Sempre con le notazioni della sezione 2.2, la matrice trasposta $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ ha un nucleo monodimensionale, guidato da $v_1(\alpha)$. Prendiamo il prodotto punto di (19) con $v_1(\alpha)$

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

Secondo (12), ciò equivale a $\lambda_1'(\alpha) = 0$. Con $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$, noi abbiamo $\alpha = \alpha^*$. Quindi abbiamo $\omega = \Lambda$.

5 Comportamento asintotico degli autovettori

5.1 Il caso in cui $m < 0$

Vediamo ora di studiare il comportamento per n per grande di un autovettore $(\pi_{n,i})$ associato con autovalore ω_1 . Proviamo direttamente una soluzione di (4) con

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Per n grande, abbiamo

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta} (1 + 1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} (1 - \delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

e

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

per n grande. Vediamo che le espressioni in $\Pi^n/n^{\beta-1}$ in (4) dare

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

Quindi abbiamo

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

Con $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$, prendiamo $\Pi = a_1/b_1$, $k_1 \neq 0$ e $k_i = 0$ se $i \neq 1$. Con $q_i = -Q_{i,i}$, espressioni in Π^n/n^β in (4) sono

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (20)$$

Quindi abbiamo

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

e

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

Possiamo dedurre

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

In alternativa, studiamo il sistema (5) nelle vicinanze di $x = b_1/a_1$, abbiamo

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

Per l'autovalore ω_1 , possiamo scegliere l'autovettore associato in modo che $\pi_{n,i} > 0$ per $n \geq 1$. Per l'intera serie $G_i(x)$, considera il punto singolare più vicino a 0 nel piano complesso. Questo punto si trova sull'asse $x > 0$, secondo un teorema di A. Pringsheim (Queffelec e Zuily, 2013, p. 54). Secondo (Flajolet e Sedgewick, 2009), allora abbiamo

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1+(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

all'interno di una costante moltiplicativa. Questo è ciò che abbiamo trovato.

Esempio numerico Torniamo al nostro esempio numerico (15), con $a_1 = 2,5$. La Figura 2 mostra il comportamento asintotico dell'autovettore associato all'autovalore μ_N , per $N = 1000$. Qui abbiamo $\Lambda = -1$. Quindi abbiamo $\beta = 1$ e $k_1/h_2 = 0,3$. La figura sembra confermare i risultati asintotici ottenuti, dato che l'effetto del bordo vicino a $n = N$ non dovrebbe essere preso in considerazione.

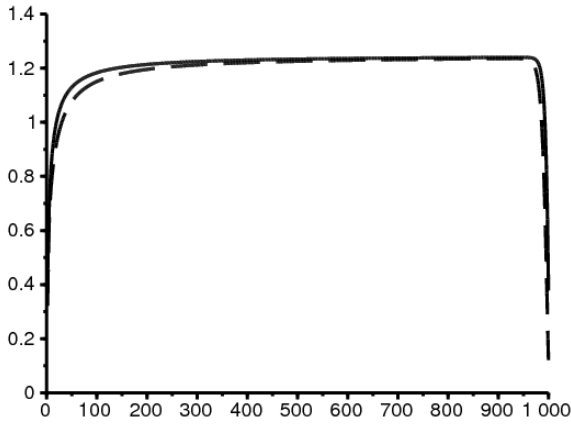


Figura 2. Il caso $a_1 = 2,5$. $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (linea continua) e $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (linea tratteggiata) in funzione di n . Usiamo la matrice troncata $\mathcal{M}^{(N)}$ con $N = 1000$.

5.2 Casi in cui $m > 0$

Sospettiamo $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ o $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$. In entrambi i casi, le espressioni dominanti in (4) danno

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

In altre parole, ω è un autovalore della matrice $Q + (\beta - 1)D$. Anzi, se stiamo cercando una soluzione del modulo $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$, siamo come in (20) con $\Pi = 1$. Per quanto riguarda il caso in cui

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

noi abbiamo

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n\pm 1,i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

che porta di nuovo all'equazione (22). Questo suggerisce che $\beta = 1 + \alpha^*$ Se $\lambda_1'(1) > 1$ e $\beta = 2$ Se $\lambda_1'(1) \leq 0$. In entrambi i casi, il raggio di convergenza di $G_i(x)$ sarebbe uguale a 1.

6 Tornare al caso particolare in cui $K = 2$

Possiamo considerare soddisfatta l'equazione differenziale dell'ordine 2 $G_1(x)$ piuttosto che il sistema differenziale del primo ordine per $G_1(x)$ e $G_2(x)$. Otteniamo

$$(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2) + (\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1 = 0.$$

Dividendo per $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$ e decomponendo la frazione razionale in elementi semplici, otteniamo

$$0 = \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2) - q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x - \frac{b_1}{a_1})(x - \frac{b_2}{a_2})}.$$

Supponi i numeri b_1/a_1 , b_2/a_2 e 1 sono tutti distinti. Riconosciamo un'equazione differenziale della forma

$$\frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - k_0 - k'_0}{x-x_0} + \frac{1 - k_1 - k'_1}{x-x_1} + \frac{1 - k_2 - k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} + \frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0,$$

vale a dire un'equazione differenziale di Riemann (Roseau, 1997, p. 229) con tre punti singolari $x_0 = 1$, $x_1 = b_1/a_1$ e $x_2 = b_2/a_2$. Gli esponenti caratteristici di questa equazione sono rispettivamente

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

con α_+ e α_- soluzioni di (13). L'insieme di soluzioni può quindi essere scritto con la notazione di Riemann

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Secondo (Roseau, 1997, p. 229), si può scrivere

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Definiamo

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

Torniamo al caso dell'equazione ipergeometrica differenziale

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

che si traduce in uguaglianza $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ tra quozienti anarmonici. Quindi abbiamo

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

La funzione ipergeometrica è

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

con la notazione $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$. Se x è in prossimità di 1, la variabile y è in prossimità di 0. Secondo la teoria dell'equazione ipergeometrica differenziale, ci sono costanti κ_1 e κ_2 con

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

purché $\mathcal{C} \neq 1$, cioè $\alpha_- \neq \alpha_+$. Soluzioni con un espositore fucsia α_+ at $x = 1$ corrisponde a $\kappa_2 = 0$

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

Il caso $m < 0$

Partiamo per esempio $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$. Prendiamo $\alpha_+ = 1$ per l'autofunzione associata a $\omega_1 = s(Q + D)$. Noi scegliamo κ_1 così che $G_1(0) = 1$. Abbiamo quindi

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

da (13). Definiamo

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

È il valore di x per il quale $y = -1$. abbiamo $1 < \xi < b_1/a_1$. La variabile y diminuisce se $0 < x < \xi$ con valori

$$\frac{\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - 1} \in]0, 1[\quad \searrow \quad -1.$$

Nel caso $\xi < x < b_1/a_1$, l'espressione (23) dovrebbe essere sostituita

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

che è l'espressione (18) del §182 di (C. Jordan, 1896), in cui l'argomento $\frac{y}{y-1}$ cresce da 1/2 a 1.

Torniamo al nostro esempio numerico (15), con $a_1 = 2,5$. La Figura 3 mostra le funzioni di generazione $G_1(x)$ e $G_2(x)$ costruito con l'autovettore associato a μ_N . Qua $N = 4000$ con standardizzazione $G_1(0) = 1$. Usiamo il metodo Horner per valutare le serie generatrici. Vengono confrontati con le formule (23) e (24). Qui abbiamo $\xi \simeq 1,105$. È stato scelto il fattore moltiplicativo della normalizzazione in modo che le funzioni ottenute dai due metodi siano sovrapponibili.

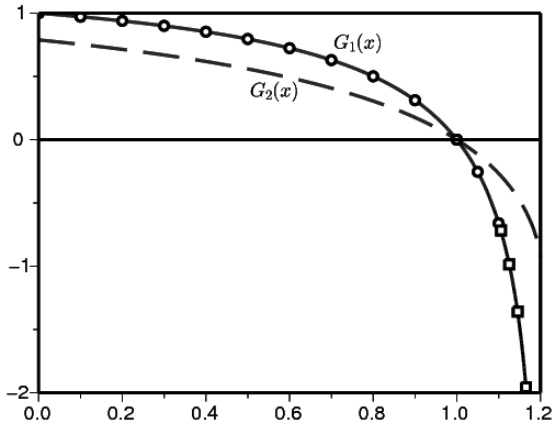


Figura 3. Il caso in cui $a_1 = 2,5$. Tracciamo le funzioni di generazione $G_1(x)$ (linea continua) e $G_2(x)$ (linea tratteggiata) in funzione di x . Si usa per il calcolo la matrice $\mathcal{M}^{(N)}$ con $N = 4000$. Le formule (23) e (24) per $G_1(x)$ sono rappresentati da piccoli cerchi e quadrati.

Il caso $m > 0$ e $\lambda'_1(1) \leq 0$

Partiamo per esempio $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$. Abbiamo ora

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

L'espressione (23) non è più adatta a causa della variabile y diverge in $x = b_1/a_1 < 1$. Con $0 < x < \xi$, y^{-1} è una funzione decrescente che varia da un numero compreso tra 0 e 1 a -1 . Prendiamo su questo intervallo l'espressione (32) di (C. Jordan, 1896, §182),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-\mathcal{A}} F(\mathcal{A}, \mathcal{A} + 1 - \mathcal{C}; \mathcal{A} + 1 - \mathcal{B}; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A} + 1 - \mathcal{C}; \mathcal{A} + 1 - \mathcal{B}; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

con $\alpha_+ = 1$, $\omega_1 = s(Q + D)$ e κ_1 così che $G_1(0) = 1$. Tuttavia, nel corso dell'intervallo $\xi < x < 1$, prendiamo l'espressione (34) di (C. Jordan, 1896, §182), in cui l'argomento $(1-y)^{-1}$ aumenta da 1/2 a 1:

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\
&= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}).
\end{aligned} \tag{26}$$

Torniamo al nostro esempio numerico (15), con $a_1 = 3,2$. La Figura 4 mostra le formule (25) e (26). Coincidono bene con la funzione generatrice costruita con l'autovettore. Qui abbiamo $\xi \simeq 0,97$.

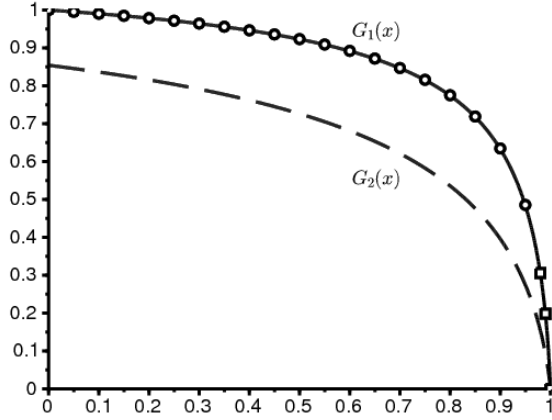


Figura 4. Il caso in cui $a_1 = 3,2$. Confronto di formule (25) [piccoli cerchi] e (26) [piccoli quadrati] per $G_1(x)$ con la funzione generatrice dell'autovettore associata a μ_N (linea continua), con $N = 10^4$.

Il caso $m > 0$ e $\lambda'_1(1) > 0$

Le espressioni (25) e (26) probabilmente non sono più valide, anche se $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$. Devono essere sostituiti da espressioni contenenti un termine logaritmico. Con $a_1 = 3,5$, noi abbiamo $\Lambda = -0,2$ e $\alpha^* = 0,6$ secondo le formule (14). In questo caso non siamo riusciti a ottenere un grafico suggestivo.

7 La catena Markov inclusa

Per un processo di ramificazione subcritica in un ambiente casuale con ambienti indipendenti identicamente distribuiti, $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$, noi abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha). \tag{27}$$

$f(x)$ denota la funzione generatrice (Dekking, 1988; Geiger et al., 2003). Sia μ il minimo nella parte destra di (27). Nel caso "debolmente subcritico" dove

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

noi abbiamo

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

per una costante $c > 0$. Nel caso "altamente subcritico" dove

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

noi abbiamo $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ e

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

per una costante $c > 0$. Il processo è subcritico se $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$.

Torniamo al nostro processo di nascita e morte. Ci limitiamo al caso particolare di due ambienti: $K = 2$. Definiamo

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

Con $a_i \neq b_i$, è la funzione generatrice del numero di individui dopo un certo periodo di tempo t a partire da un individuo al momento 0 nell'ambiente i (Hillion, 1986). In tutti i casi,

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

Dopo un po t_1 , l'ambiente passa dallo stato 1 allo stato 2. Dopo qualche tempo t_2 , l'ambiente torna allo stato 1. Le densità di probabilità associate sono $q_1 e^{-q_1 t_1}$ e $q_2 e^{-q_2 t_2}$. Quindi considera la catena Markov inclusa guardando solo al cambiamento tra il tempo 0 e il tempo $t_1 + t_2$, $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$. Chiamiamola una generazione. La funzione generatore è

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

In particolare, $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$. Questo processo di ramificazione è subcritico. Anzi, abbiamo

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

perché $R_0 < 1$. Il processo è altamente subcritico quando

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0.\end{aligned}\tag{28}$$

In questo caso, abbiamo

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Si noti che se $d_1 < 0$ e $d_2 < 0$, quindi il processo è fortemente subcritico. Nel caso debolmente subcritico, abbiamo

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

e un piccolo calcolo mostra

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2}\right)^2}.$$

Si noti che questo numero è < 1 se e solo se $R_0 < 1$.

Per il nostro esempio numerico, la formula (28) mostra che la catena Markov inclusa è fortemente subcritica quando $a_1 < 3,4$. Curiosamente, questa soglia differisce da quella che separa i casi $\Lambda = s(Q + D)$ e $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ con $0 < \alpha^* < 1$ per il processo lineare di nascita e morte. Quest'ultima soglia era $\simeq 3,2829$ dalla Sezione 3. Tuttavia, la velocità con cui la catena Markov inclusa converge all'estinzione ha poco a che fare con la velocità con cui il processo a tempo continuo fa lo stesso.

8 Conclusione

Molti punti rimangono da chiarire riguardo al comportamento degli autovalori e degli autovettori. Tra le possibili generalizzazioni, si può pensare che se i coefficienti a_i , b_i e $Q_{i,j}$ sono funzioni periodiche del tempo t , quindi ω_1 sarà uguale a $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. $f(\cdot)$ designa l'esponente Floquet dominante e sostituisce il limite spettrale.

Grazie

Ringraziamo Vincent Bansaye, Anne Duval e Bruno Sericola per i loro commenti e suggerimenti.

Riferimenti bibliografici

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martinez S, San Martion J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D'Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Probab* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) Éléments d'analyse, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) Analytic combinatorics. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) Théorie des matrices, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire. *Ann I H Poincaré-Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) Les théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) Cours d'analyse de l'École polytechnique, tome 3. Gauthier-Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuily C (2013) Analyse pour l'agrégation, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications. Lavoisier, Paris