

# Sobre los procesos lineales subcríticos de nacimiento y muerte en un entorno aleatorio

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Les Cordeliers, Paris, Francia  
nicolas.bacaer@ird.fr

## resumen

Obtenemos una fórmula explícita para la tasa de extinción de los procesos lineales subcríticos de nacimiento y muerte en un entorno aleatorio. Esta fórmula se ilustra calculando numéricamente el valor propio de la parte real más grande para la matriz truncada de la ecuación maestra. La función generadora del vector propio asociado verifica un sistema singular de ecuaciones diferenciales de tipo Fuchs. Se presta especial atención al caso de dos entornos, lo que conduce a una ecuación diferencial de Riemann.

## 1. Introducción

Supongamos que el entorno oscila entre un número finito  $K$  de estados ( $K \geq 2$ ) siguiendo una cadena homogénea de tiempo continuo de Markov.  $Q = (Q_{i,j})$  es la matriz cuya transposición es el generador infinitesimal de esta cadena:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

Suponemos que la matriz  $Q$  es irreducible. Hay un solo vector  $u = (u_i)$  con

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013, p. 152).

El número de individuos que evolucionan en este entorno aleatorio es  $n$ . En el ambiente  $i$  ( $1 \leq i \leq K$ ), supongamos que tenemos un proceso lineal de nacimiento y muerte de parámetros

- $n a_i$  para nacimientos
- $n b_i$  por los muertos

con  $a_i > 0$  y  $b_i > 0$ . En otras palabras, durante un intervalo de tiempo infinitesimal  $dt$ ,

- con una probabilidad  $a_i dt$ , cada individuo da a luz a un nuevo individuo,
- cada individuo muere con una probabilidad  $b_i dt$ .

Supongamos que en el tiempo  $t = 0$  hay  $n_0$  personas ( $n_0 \geq 1$ ) y el medio ambiente es  $i_0$ . La probabilidad de tener  $n$  individuos en el entorno  $i$  en el momento  $t$  es  $p_{n,i}(t)$ . Entonces tenemos  $p_{n,i}(0) = 1$  Si  $(n, i) = (n_0, i_0)$  y  $p_{n,i}(0) = 0$  si no. La ecuación principal es

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (1)$$

Pero  $p_{n-1,i}$  está ausente por  $n = 0$ . Como (Lotka, 1939), definamos

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

Siempre asumiremos que  $R_0 < 1$ : es casi seguro que la población se extingue (Cogburn y Torrez, 1981; Bacaër y Ed-Darraz, 2014). Es el régimen subcrítico. Con  $t \rightarrow +\infty$ , se tiene

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

La tasa de extinción existe y no depende de  $n \geq 1$  o  $i$

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet et al., 2013, sección 4.5). Tampoco depende de la condición inicial  $(n_0, i_0)$ . El problema es determinar explícitamente esta tasa.

Usamos algunas notaciones:

- $\Re(\cdot)$  es la parte real de un número complejo
- $\sigma(M)$  es el espectro de una matriz  $M$ .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$  es el límite espectral
- $A$  es la matriz diagonal  $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$ .

Cuando la matriz  $M$  tiene coeficientes fuera de la diagonal que son positivos o cero, que siempre será el siguiente caso, se sigue del teorema de Perron y Frobenius que  $s(M)$  es también un valor propio de  $M$ .

En la sección 2, usamos un resultado de (D'Souza y Hambly, 1997) sobre procesos de ramificación en un entorno aleatorio para mostrar que

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

También estudiamos las variaciones de la función.  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  y la derivada  $\lambda_1'(\alpha)$ , lo que lleva a distinguir tres casos:

- aquel donde  $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$
- aquel donde  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) \leq 0$
- aquel donde  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) > 0$ .

En los primeros dos casos, el mínimo  $\Lambda$  en el intervalo  $[0,1]$  se alcanza en  $\alpha = 1$ , de modo que  $\omega_1 = s(Q + D)$ .

En la sección 3, observamos que el límite espectral  $\mu_N$  de la matriz truncada de la ecuación maestra forma una secuencia creciente. Luego calculamos numéricamente  $\mu_N$  en una serie de ejemplos. Observamos en particular la lentitud, sin duda logarítmica, con la que  $\mu_N$  converge a  $\omega_1$  en el tercer caso mencionado anteriormente.

De la sección 4, estamos interesados en los otros valores propios y los vectores propios asociados, para los cuales obtenemos resultados muy parciales. Primero transformamos el problema del valor propio

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

en un sistema diferencial singular del tipo Fuchs (Metheus, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

para la función de generador

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

Si el vector propio  $(\pi_{n,i})$  disminuye geoméricamente con respecto a  $n$ , entonces el valor propio  $\omega$  es necesariamente igual al valor propio de una matriz  $Q + \nu D$  con entero  $\nu \geq 0$ . Si  $m < 0$  y  $\omega = s(Q + \nu D)$ , en realidad construimos soluciones analíticas del sistema (5) en la vecindad de  $x = 1$ . La ecuación característica del sistema fuchsiano es

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

dicho de otro modo,  $\omega$  es un valor propio de la matriz  $Q + \alpha D$ . Esta ecuación característica se obtiene buscando soluciones que se comporten como  $(1-x)^\alpha$  en el barrio de  $x = 1$ .

Estudiamos el tercer caso: la función  $\lambda_1(\alpha)$  alcanza su mínimo dentro  $]0, 1[$ . Si asumimos

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- el desarrollo de  $G_i(x)$  en la vecindad de  $x = 1$  contiene un término logarítmico,

tenemos entonces  $\alpha = \alpha^*$  y  $\omega = \Lambda$ . Además, en la teoría de Fuchs, los términos logarítmicos aparecen cuando la ecuación característica (7) tiene una raíz doble, en particular la rama  $\omega = s(Q + \alpha D)$ . Debido a la convexidad de la función.  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ , esto solo ocurre para  $\omega = \Lambda$ .

En la sección 5, estudiamos directamente el comportamiento asintótico del vector propio límite  $\pi = (\pi_{n,i})$  asociado a  $\omega_1$ . La sección 6 establece el enlace cuando  $K = 2$  con una ecuación diferencial de Riemann. En la sección 7, estamos interesados en la cadena de Markov incluida, esta última en el marco del trabajo de (Dekking, 1988) y (Geiger et al., 2003). Observamos que el umbral entre los regímenes débil y fuertemente subcrítico no es el mismo que aquel donde  $\Lambda \neq s(Q + D)$ .

Para situar mejor nuestro problema en relación con algún otro trabajo, observamos que el sistema (1) es un "proceso no homogéneo de cuasi nacimiento y muerte"; ver por ejemplo (Sericola, 2013, p. 350) o (Latouche y Ramaswami, 1999, capítulo 12), que discuten la distribución estacionaria pero no la tasa de convergencia hacia ella. Además, en un entorno constante con

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

se tiene  $D = (a - b)I$  y  $I$  es la matriz de identidad. Entonces tenemos  $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$  y la fórmula (3) da  $\omega_1 = a - b$ . Esto es bien conocido ya sea por cálculo directo (Hillion, 1986, capítulo V), o como un caso especial de los resultados de Karlin y McGregor en los procesos de nacimiento y muerte (Collet et al., 2013, sección 5.9.2). Las generalizaciones de estos últimos resultados a los "cuasi procesos de nacimiento y muerte" (Clayton, 2010) solo se refieren a casos en los que el "espectro" es real. Este no es generalmente el caso en nuestro modelo. Finalmente, el modelo (1) interviene como la linealización de ciertos modelos de población no lineales, y en particular modelos epidémicos (Bacaër, 2016).

## 2 La fórmula para la tasa de extinción

### 2.1 Tiempo de discretización del entorno y paso al límite.

$M^\top$  es la transposición de una matriz  $M$  (o de un vector). Elegimos un pequeño paso de tiempo  $\delta > 0$ . La matriz

$$\mathcal{P} = e^{Q^\top \delta}$$

es la matriz de una cadena de Markov en tiempo discreto. Se tiene  $\mathcal{P}_{i,j} > 0 \forall i, \forall j$ , porque la matriz  $Q$  es irreducible. El entorno permanece bloqueado en el estado  $i$  durante un paso de tiempo  $\delta$ . Entonces el entorno salta al estado  $j$ , con una probabilidad  $\mathcal{P}_{i,j}$ . En el intervalo de tiempo  $\delta$ , la población sigue un proceso lineal de nacimiento y muerte de parámetros.  $n a_i$  y  $n b_i$  si el ambiente está en estado  $i$ . Por lo tanto, un individuo genera en promedio

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

personas. Se tiene  $0 < m_i < +\infty$ . Por lo tanto, estamos en el contexto de un proceso de ramificación en un entorno de Markov. Algunas anotaciones:

- $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$  es una secuencia de  $k$  entornos atravesados,

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha). \quad (8)$$

$\mathbb{E}(\cdot)$  denota expectativa matemática

- $Z_k$  es el tamaño de la población al final del paso de tiempo  $k$ , de longitud  $\delta$
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$  la matriz dada por  $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$ : el radio espectral de la matriz positiva  $\Sigma(\alpha)$ .

$\mathbb{P}(Z_k > 0)$  también lo es la probabilidad de que la población no se extinga. El corolario 1.8 de (D'Souza y Hambly, 1997) muestra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

En nuestro caso, la expectativa de  $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$  se calcula explícitamente:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

De (8) y (10) se desprende que

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

También es una función analítica de  $\alpha$  porque  $\rho(\Sigma(\alpha))$  es un valor propio simple de la matriz positiva  $\Sigma(\alpha)$ . El límite (9) es por lo tanto igual a  $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ . La tasa de extinción  $\omega$  en tiempo continuo es por lo tanto

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

Tomemos en particular  $\delta = 1/h$  con un entero  $h \geq 1$ . Entonces tenemos  $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$ . Pero

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[ e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

de la fórmula de Sophus Lie. Siendo el radio espectral una función continua, tenemos

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Porque  $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ , concluimos que

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Finalmente, la Proposición 4.12 de (Collet et al., 2013) asegura la igualdad de las tasas de extinción definidas con (2) o con la probabilidad de no extinción como en el lado izquierdo de la ecuación (9). Así encontramos la fórmula para la tasa de extinción en tiempo continuo.

## 2.2 Estudio de la función. $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

Definimos

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

### Proposición 1.

- Si  $m \leq 0$ , entonces  $\Lambda = \lambda_1(1)$ .
- Si  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , entonces también tenemos  $\Lambda = \lambda_1(1)$ .
- Si  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) > 0$ , entonces hay un único  $\alpha^* \in ]0, 1[$  con  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ .

*Prueba.* Si  $v = (v_i)$  es un vector

- $v \geq 0$  Si  $v_i \geq 0 \forall i$
- $v > 0$  Si  $v \geq 0$  y  $v \neq 0$
- $v \gg 0$  Si  $v_i > 0 \forall i$ .

Utilizamos anotaciones idénticas para las matrices.

Volvamos al razonamiento de la sección 9 de (Bacaër, 2016) pero con  $R_0 < 1$  en vez de  $R_0 > 1$ . La matriz  $Q + \alpha D$  es irreducible para todo  $\alpha$  porque la matriz  $Q$  es irreducible y la matriz  $D$  es diagonal. Entonces  $\lambda_1(\alpha)$  es un valor propio simple de la matriz  $Q + \alpha D$ ,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar habitual de vectores reales.  $\lambda_1(\alpha)$  es también un valor propio simple de la matriz transpuesta  $Q^\top + \alpha D$ ,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^\top + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

Por el teorema de perturbación de valor propio simple, sabemos que la función  $\lambda_1(\alpha)$  es diferenciable y

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

Especialmente para  $\alpha = 0$ , se tiene  $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ ,  $w_1(0) = u$ ,  $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$  y

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

porque  $R_0 < 1$ .

Si  $m \leq 0$ , la función  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  está disminuyendo porque  $D \leq 0$ . Ahora considere el caso donde  $m > 0$ . Se tiene  $\lambda_1'(0) < 0$ . La función  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  es convexo (Cohen, 1981). Entonces  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  Es una función creciente. Además, si  $\alpha \rightarrow +\infty$ , se tiene  $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$ . La función  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  es en este caso

estrictamente convexo ya que no es afín (Nussbaum, 1986). Entonces hay un único  $\alpha^* > 0$  con  $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$ .

Entonces hay tres casos:

- Si  $m \leq 0$ , entonces  $\Lambda = \lambda_1(1)$ .
- Si  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , entonces  $\alpha^* \geq 1$  y  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  disminuye durante el intervalo  $[0, 1]$  así que todavía tenemos  $\Lambda = \lambda_1(1)$ .
- Si  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) > 0$ , entonces  $\alpha^* \in ]0, 1[$  y  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ .

### 2.3 El caso de dos ambientes

Asumimos  $K = 2$ . Con  $Q_{i,i} = -q_i$  Si  $i = 1, 2$ , se tiene

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

La ecuación característica  $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$  está escrito

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Esta relación entre  $\omega$  y  $\alpha$  describe una hipérbola en el avión  $(\omega, \alpha)$ . También se puede escribir

$$\alpha^2 - \alpha \left( \frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

De más,  $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  es tal que

$$2\lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

y

$$2\lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Si  $m \leq 0$ , o si  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , se tiene  $\Lambda = \lambda_1(1)$ . Si  $m > 0$  y  $\lambda_1'(1) > 0$ , Debemos tener  $d_1 d_2 < 0$ . Supongamos en este caso, por ejemplo, que  $d_1 > 0$  y  $d_2 < 0$ . Al cancelar el discriminante de (13), encontramos después de un pequeño cálculo que

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Darse cuenta de  $\Lambda = 0$  y  $\alpha^* = 0$  Si  $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ , es decir, si  $R_0 = 1$ .

### 3 La matriz truncada

Con  $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ , la ecuación principal está escrita  $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$ .  $\mathcal{M}$  Es una matriz infinita. Cortemos la matriz  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

con  $S = A + B$ . Definimos  $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$ .

**Proposición 2.** Para todos  $N \geq 1$ , se tiene  $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$ .  $(\mu_N)$  por lo tanto tiene un límite si  $N \rightarrow +\infty$ , quien es  $\omega_1$ .

*Prueba.* Una matriz de Metzler es una matriz en la que todos los coeficientes fuera de la diagonal son  $\geq 0$ . La matriz  $\mathcal{U}^{(N)}$  es una matriz de Metzler irreducible porque  $Q$  es irreducible,  $a_i > 0$  y  $b_i > 0 \forall i$ . Por lo tanto, podemos utilizar los corolarios del teorema de Perron y Frobenius sobre el límite espectral de las matrices de Metzler; ver por ejemplo (Nkague Nkamba, 2012, Teorema 30). Con  $e = (1, \dots, 1)^T$  se tiene

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Porque  $e \gg 0$  deducimos que  $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$ . Entonces tenemos

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

$\mu_N$  es un valor propio de la matriz  $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

El vector  $\mathcal{W}^{(N)}$  está compuesto por  $N$  bloques de tamaño  $K$ ,  $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$ . Considera el vector

$$\widetilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 es también de tamaño  $K$ . Entonces tenemos

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots \\ \dots & 0 & (N+1)B \\ \dots & 0 & NA & Q - (N+1)S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Porque  $NA\mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ , se tiene  $\mathcal{U}^{(N+1)}\widehat{\mathcal{W}} > \mu_N\widehat{\mathcal{W}}$ . Porque  $\widehat{\mathcal{W}} > 0$  deducimos que  $\mu_{N+1} > \mu_N$ .

Como valores numéricos, tomemos

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

Entonces tenemos  $u_1 = u_2 = 0,5$ . El parámetro  $a_1$  varía, por ejemplo, entre 2 y 5; este límite superior corresponde a  $R_0 = 1$ . Para valores pequeños de  $N$ , típicamente hasta  $N = 10^3$ , software como Scilab calcula el espectro completo de la matriz  $\mathcal{U}^{(N)}$ . De lo contrario, calculamos el valor propio más pequeño de  $-\mathcal{U}^{(N)}$  y el vector propio correspondiente mediante un método iterativo aplicado a la matriz inversa. Se aprovecha la estructura de bloques tridiagonales para la inversión en cada iteración (Artalejo et al., 2013). Con este algoritmo, podemos llegar tan lejos  $N = 10^6$  sin demasiados problemas

La figura 1 muestra  $\mu_N$  en función de  $a_1$  para  $N$  fijo pero grande. El algoritmo iterativo se detiene cuando dos estimaciones consecutivas de  $\mu_N$  difieren menos de  $10^{-4}$ . La figura también se muestra en líneas de puntos y de acuerdo con  $a_1$  el número  $\Lambda$  dado por la fórmula (3), que es  $\lambda_1(1)$  si  $\lambda_1'(1) \leq 0$  y que viene dada por la fórmula (14) cuando  $\lambda_1'(1) > 0$ . Se tiene  $\lambda_1'(1) < 0$  si  $a_1 < a_1^*$  y  $\lambda_1'(1) > 0$  si  $a_1 > a_1^*$ , con  $a_1^* \simeq 3,2829$ . El acuerdo entre  $\Lambda$  y el límite de  $(\mu_N)$  parece probable. Sin embargo, la convergencia es extremadamente lenta, quizás logarítmica, cuando  $R_0$  se acerca a 1, especialmente cuando  $a_1 > a_1^*$ .

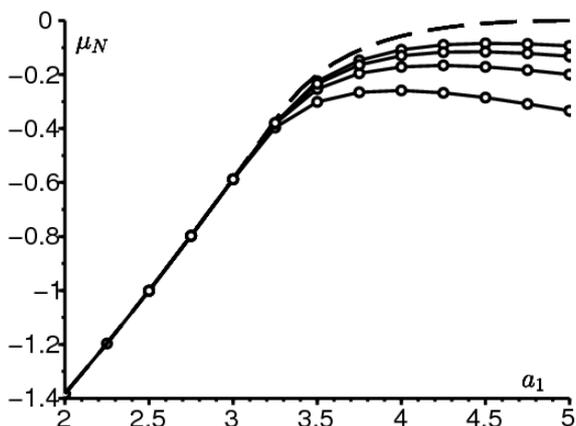


Figura 1. Línea punteada:  $\Lambda$  dado por la fórmula (3) en función de  $a_1$ . Líneas continuas con puntos:  $\mu_N$  para  $N = 10^3, 10^4, 10^5$  y  $10^6$  (de abajo hacia arriba).

## 4 vectores propios y otros valores propios

Ahora estamos interesados en el límite.  $N \rightarrow \infty$  del vector propio asociado con  $\mu_N$  así como a los otros valores propios y vectores. En este sentido, solo obtendremos resultados muy parciales.

### 4.1 Un sistema fuchsiano

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{C}$  es el conjunto de números complejos y  $'$  la derivada con respecto a la variable  $x$ .

**Proposición 3 .**

- Si tenemos la ecuación (4), con  $\omega \in \mathbb{C}$  y  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ ,
- si las series generadoras (6) tienen un radio de convergencia  $\geq R$ ,

$G_i(x)$  es la solución del sistema (5) para  $x \in \mathbb{C}$ ,  $|x| < R$  y  $1 \leq i \leq K$ .

*Prueba .* Se tiene

$$G_i'(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

Como en el caso clásico con ambiente constante (Hillion, 1986), multiplicamos (4) por  $x^n$ . La suma de todos los  $n \geq 0$  da

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G_i'(x) + b_i G_i'(x) - (a_i + b_i)x G_i'(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Esto es equivalente a (5).

Notas

- Notamos que (5) es un problema de valor propio para un sistema diferencial singular. Este sistema es del tipo Fuchs si  $a_i \neq b_i \forall i$  (Methée, 1959). El sistema tiene una singularidad en  $x = 1$  y en  $x = b_i/a_i$  para  $1 \leq i \leq K$ . Se tiene  $b_i/a_i < 1$  si  $a_i > b_i$ . También podemos escribir el sistema

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Un ejemplo de una ecuación diferencial escalar tipo Fuchs de orden 2 apareció en el estudio de los procesos cuadráticos de nacimiento y muerte en un entorno constante (Picard, 1965).

### 4.2 Valores propios cuando el radio de convergencia es $> 1$

**Proposición 4 .**

- Si tenemos la ecuación (4), con  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  y  $\pi \neq 0$ ,
- si las series generadoras (6) tienen un radio de convergencia estrictamente mayor que 1,

entonces hay un número entero  $\nu \geq 0$  tal que  $\omega$  es un valor propio de la matriz  $Q + \nu D$ .

*Prueba*. Razonemos por lo absurdo. Suponga que para todos  $\nu \geq 0$ ,  $\omega$  no es un valor propio de  $Q + \nu D$ . Las funciones  $G_i(x)$  son analíticas en un disco  $|x| < R$  con  $R > 1$ . Si  $x$  converge a 1 en (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Pero  $\omega$  no es un valor propio de  $Q$ . Entonces  $G_i(1) = 0 \forall i$ .

Dejar ser un número entero  $\nu \geq 1$ . Por inducción, supongamos que hemos demostrado  $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$ . Derivamos  $\nu$  veces la ecuación (5) con respecto a  $x$  y utilizamos la fórmula de Leibniz para el producto de  $(1-x)(a_i x - b_i)$  y  $G_i^{(\nu)}(x)$ . Se tiene

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x).$$

$\binom{\nu}{k}$  denota el coeficiente del binomio. El polinomio  $(1-x)(a_i x - b_i)$  es de grado 2 en  $x$ . Solo expresiones con  $0 \leq k \leq 2$  son distintos de cero en la suma de la izquierda:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

Hacemos que  $x$  converja a 1 y encontramos con la hipótesis de inducción

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

Sin embargo,  $\omega$  no es un valor propio de la matriz  $Q + \nu D$ . Entonces  $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$ .

Entonces, hemos demostrado que  $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$  y para cualquier entero  $\nu \geq 0$ . Porque la función  $G_i(x)$  es analítico, tenemos  $G_i(x) = 0$  en la vecindad de  $x = 1$ , e incluso  $G_i(x) = 0$  todo el disco  $|x| < R$  según el principio de extensión analítica. Entonces tenemos  $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0 \forall n \geq 0$  y  $1 \leq i \leq K$ . Esto contradice la hipótesis.  $\pi \neq 0$ .

Notas

- Los valores propios de las matrices  $Q + \nu D$  no son necesariamente todos reales, de modo que el sistema (5) no está vinculado ni a la teoría de Weyl y Kodaira (Dieudonné, 2003), ni al estudio de (Clayton, 2010) sobre ciertos cuasi-procesos de nacimiento y muerte. Sin embargo, estos valores propios son todos reales cuando  $K = 2$ . Porque el valor propio  $s(Q + \nu D)$  es un número real, el otro valor propio también es real.
- En el barrio de  $x = 1$ , el sistema (16) se puede escribir

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

$G(x)$  es el vector  $(G_i(x))$ . El sistema tiene la forma

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

con

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

y  $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$ . Si el radio de convergencia de la serie  $G_i(x)$  es  $> 1$ , entonces  $G_i(x)$  es analítico en un barrio de  $x = 1$ . Entonces, el sistema anterior tiene una solución analítica en una vecindad de  $x = 1$ . Según (Gantmacher, 1966, p. 155), existe un número entero  $\nu \geq 0$  para el cual  $\nu$  es un valor propio de  $\Omega_{-1}$ . Entonces hay un vector  $w \neq 0$  con

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

Entonces tenemos

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

y  $\omega$  es un valor propio de  $Q + \nu D$ . Esto es lo que se ha demostrado principalmente en la Proposición 4.

Ejemplo. Tome los valores numéricos (15) con  $a_1 = 2,5$ . En este caso, tenemos  $m < 0$ . Para  $N = 1000$ , los primeros veinte valores propios de la matriz  $\mathcal{M}^{(N)}$  son más o menos dados por la siguiente tabla:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

Ahora los valores propios de  $Q$  son 0 y -2. Esos de  $Q + D$  están -1 y -3,5, Esos de  $Q + 2D$  están -1,6972244 y -5,3027756, Esos de  $Q + 3D$  están -2,2877855 y -7,2122145, Esos de  $Q + 4D$  están -2,8377223 y -9,1622777 etc. Se encuentran en la tabla de arriba. Por lo tanto, parece que los valores propios de  $\mathcal{M}^{(N)}$  convergen cuando  $N \rightarrow +\infty$  hacia los valores propios de las matrices  $Q + \nu D$  para  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  y  $\mu_N$  converge a  $s(Q + D)$ . Recuerda eso aquí  $s(Q + D) = \Lambda$  porque  $m < 0$ .

### 4.3 El caso donde $a_i < b_i \forall i$

Asumimos  $m < 0$ . Busquemos formalmente una solución cerca de  $x = 1$  del sistema (5) de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n. \quad (17)$$

Se tiene

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

Se tiene  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ . Identificamos los coeficientes de  $(1-x)^n$ . Obtenemos

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}, \quad \forall n \geq 0.$$

$c_{n-1,i}$  está ausente si  $n = 0$ . Con  $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ , (17) es una solución de (5) si

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Se obtiene un primer tipo de solución eligiendo  $\omega$  entre los valores propios de  $Q$  y  $c_0$  un vector propio correspondiente. La relación (18) permite calcular  $c_n$  para  $n \geq 1$ , siempre que la matriz  $Q + nD - \omega I$  Es siempre invertible.

Se obtiene un segundo tipo de solución eligiendo  $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$  con  $\nu \geq 1$ ,  $\omega$  un valor propio de  $Q + \nu D$  y  $c_\nu$  un vector propio asociado. Entonces calculamos  $c_n$  para  $n \geq \nu + 1$  con la ecuación (18), siempre que la matriz  $Q + nD - \omega I$  Es siempre invertible.

Tomemos en particular  $\omega = s(Q + \nu D)$  con un entero  $\nu \geq 0$ . Porque  $a_i < b_i \forall i$ , se tiene  $D < 0$ . De más,  $Q + \nu D$  Es irreducible. Entonces, para cualquier número entero  $n > \nu$ , tenemos

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

Entonces tenemos  $s(Q + nD - \omega I) < 0$ . La matriz  $Q + nD - \omega I$  es una matriz de Metzler invertible y  $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$ . Se tiene

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Con  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

y

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

La serie (17) es convergente para  $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ . La serie (17) para  $1 \leq i \leq K$  todos convergen para  $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ .

#### 4.4 Un radio de convergencia igual a 1

En las dos secciones anteriores, estábamos interesados en los valores propios de las matrices  $Q + \nu D$  para un entero  $\nu \geq 0$ . Sin embargo (Bacaer y Ed-Darraz, 2014) ya han destacado un ejemplo donde  $R_0 < 1$  pero donde el valor propio  $s(Q + D)$  de la matriz  $Q + D$  es estrictamente positivo: solo toma  $q_1 = q_2 = 1$ ,  $a_1 = 2,7$ ,  $a_2 = 0,8$ ,  $b_1 = b_2 = 2$  (Entonces  $a_1 > b_1$ ) Sin embargo, nuestro problema inicial no puede tener un valor propio positivo. Concluimos en particular que la serie generadora  $G_i(x)$  no siempre tienen un radio de convergencia  $> 1$ . La siguiente proposición vincula el comportamiento de  $G_i(x)$  cerca de  $x = 1$  con el parámetro  $\alpha$ .

##### Proposición 5 .

- Si tenemos la ecuación (4), con  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  y  $\pi \neq 0$ ,
- si la serie generadora (6) tiene un radio de convergencia igual a 1,
- si hay un número real  $\alpha > 0$  un entero  $J \geq 0$  y funciones analíticas  $g_{i,j}(x)$  en un disco centrado en  $x = 1$  con

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

durante un intervalo  $(1-\varepsilon, 1)$  con  $\varepsilon > 0$ ,

- si el vector  $(g_{i,j}(1))$  no es cero

entonces  $\omega$  es un valor propio de la matriz  $Q + \alpha D$ .

*Prueba .* Se tiene

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ &+ (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

$G_i(x)$  es la solución de la ecuación (5) para  $|x| < 1$ . Dividimos por  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ . Se tiene

$$\begin{aligned} &\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ &+ (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ &= \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x). \end{aligned}$$

Con  $x \rightarrow 1$ , obtenemos

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

Entonces  $\omega$  es un valor propio de la matriz  $Q + \alpha D$ .

Nota. La forma de la función  $G_i(x)$  en la Proposición 5, que combina una función de potencia y un polinomio logarítmico, es lo que se puede esperar de una solución de un sistema Fuchs en la vecindad de una singularidad (Gantmacher, 1966, p. 159).

#### 4.5 El caso donde $m > 0$ y $\lambda'_1(1) > 0$

**Proposición 6.** *Asumimos :  $m > 0$  y  $\lambda'_1(1) > 0$ . En este caso,  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$  con  $\alpha^* \in ]0, 1[$ . Asumimos:  $\alpha > 0$  y  $\omega = s(Q + \alpha D)$ .*

- Si tenemos la ecuación (4), con  $\omega \in \mathbb{C}$  y  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- si la serie generadora asociada  $G_i(x)$  tener un radio de convergencia igual a 1
- Si el  $G_i(x)$  se puede escribir en un intervalo  $(1 - \varepsilon, 1)$  con  $\varepsilon > 0$  en el formulario

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

con  $J \geq 1$  y un vector  $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$  que no es cero

entonces  $\alpha = \alpha^*$  y  $\omega = \Lambda$ .

*Prueba.* En efecto,

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

Se tiene  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ . Porque  $G_i(x)$  es una solución de (5) en  $|x| < 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

Expresiones en  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^j$  y en  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{j-1}$  cada uno debe cancelar:

$$\begin{aligned} \omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\ \omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i)[Jg_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}. \end{aligned}$$

Definimos  $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ . Se tiene

$$(Q + \alpha D - \omega I)\gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I)\gamma_{J-1} + JD\gamma_J = 0.$$

Porque  $\omega = s(Q + \alpha D)$  y  $\gamma_J \neq 0$ , la primera ecuación muestra que  $\gamma_J$  es un vector propio de la matriz  $Q + \alpha D$  asociado con el valor propio  $s(Q + \alpha D)$ . Con las anotaciones de la sección 2.2, deducimos que hay una constante  $\kappa \neq 0$  con  $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$ . Además, vemos que la segunda ecuación toma la forma

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]\gamma_{J-1} + J\kappa Dw_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

La matriz  $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$  tiene un núcleo unidimensional, dirigido por  $w_1(\alpha)$ . Aún con las anotaciones de la sección 2.2, la matriz transpuesta  $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$  tiene un núcleo unidimensional, dirigido por  $v_1(\alpha)$ . Tomamos el producto punto de (19) con  $v_1(\alpha)$

$$\langle v_1(\alpha), Dw_1(\alpha) \rangle = 0.$$

De acuerdo con (12), esto es equivalente a  $\lambda'_1(\alpha) = 0$ . Con  $m > 0$  y  $\lambda'_1(1) > 0$ , se tiene  $\alpha = \alpha^*$ . Entonces tenemos  $\omega = \Lambda$ .

## 5 Comportamiento asintótico de vectores propios

### 5.1 El caso donde $m < 0$

Estudiemos ahora el comportamiento para  $n$  grande de un vector propio  $(\pi_{n,i})$  asociado con el valor propio  $\omega_1$ . Probemos directamente una solución de (4) con

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Para  $n$  grande, tenemos

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta} (1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} (1 - \delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

y

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

Entonces tenemos

$$n \pi_{n,i} \simeq \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

$$(n \pm 1) \pi_{n\pm 1,i} \simeq \Pi^{n\pm 1} \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

para  $n$  grande. Vemos que las expresiones en  $\Pi^n/n^{\beta-1}$  en (4) dan

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

Entonces tenemos

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

Con  $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ , se toma  $\Pi = a_1/b_1$ ,  $k_1 \neq 0$  y  $k_i = 0$  Si  $i \neq 1$ . Con  $q_i = -Q_{i,i}$ , expresiones en  $\Pi^n/n^\beta$  en (4) son

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (20)$$

Entonces tenemos

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

y

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

Podemos deducir

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

Alternativamente, estudiamos el sistema (5) cerca de  $x = b_1/a_1$ . Se tiene

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

Para el valor propio  $\omega_1$ , podemos elegir el vector propio asociado para que  $\pi_{n,i} > 0$  para  $n \geq 1$ . Para toda la serie  $G_i(x)$ , considere el punto singular más cercano a 0 en el plano complejo. Este punto está en el eje  $x > 0$ , según un teorema de A. Pringsheim (Queffélec y Zuily, 2013, p. 54). Según (Flajolet y Sedgewick, 2009), entonces tenemos

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1 + (\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

dentro de una constante multiplicativa. Esto es lo que encontramos.

Ejemplo numérico. Tome nuestro ejemplo numérico (15) nuevamente, con  $a_1 = 2,5$ . La Figura 2 muestra el comportamiento asintótico del vector propio asociado con el valor propio  $\mu_N$ , para  $N = 1000$ . Aquí tenemos  $\Lambda = -1$ . Entonces tenemos  $\beta = 1$  y  $k_1/h_2 = 0,3$ . La figura parece confirmar los resultados asintóticos obtenidos, dado que el efecto de borde cerca de  $n = N$  no debe tenerse en cuenta.

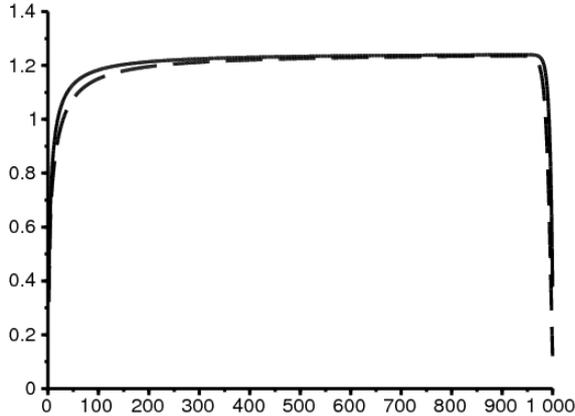


Figura 2. El caso  $a_1 = 2,5$ .  $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$  (línea continua) y  $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$  (línea de puntos) en función de  $n$ . Usamos la matriz truncada  $\mathcal{M}^{(N)}$  con  $N = 1000$ .

## 5.2 Casos donde $m > 0$

Sospechamos  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$  o  $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$ . En ambos casos, las expresiones dominantes en (4) dan

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

Dicho de otro modo,  $\omega$  es un valor propio de la matriz  $Q + (\beta - 1)D$ . De hecho, si estamos buscando una solución de la forma  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ , somos como en (20) con  $\Pi = 1$ . En cuanto al caso donde

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

se tiene

$$\begin{aligned}(n \pm 1)\pi_{n \pm 1, i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n}\right) \left[ \frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1-\beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots,\end{aligned}$$

que nuevamente conduce a la ecuación (22). Esto sugiere que  $\beta = 1 + \alpha^*$  Si  $\lambda'_1(1) > 1$  y  $\beta = 2$  Si  $\lambda'_1(1) \leq 0$ . En ambos casos, el radio de convergencia de  $G_i(x)$  sería igual a 1.

## 6 Regrese al caso particular donde $K = 2$

Podemos considerar la ecuación diferencial de segundo orden satisfecha por  $G_1(x)$  en lugar del sistema diferencial de primer orden para  $G_1(x)$  y  $G_2(x)$ . Obtenemos

$$\begin{aligned}(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} \\ + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2) + (\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} \\ + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1 = 0.\end{aligned}$$

Dividiendo por  $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$  y al descomponer la fracción racional en elementos simples, obtenemos

$$\begin{aligned}0 = \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[ \frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ + \left[ \frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1-\frac{b_1}{a_1})(1-\frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})}.\end{aligned}$$

Supongamos que los números  $b_1/a_1, b_2/a_2$  y 1 son todos distintos. Reconocemos una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned}\frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[ \frac{1-k_0-k'_0}{x-x_0} + \frac{1-k_1-k'_1}{x-x_1} + \frac{1-k_2-k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ + \left[ \frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} \right. \\ \left. + \frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0,\end{aligned}$$

es decir, una ecuación diferencial de Riemann (Roseau, 1997, p. 229) con tres puntos singulares  $x_0 = 1, x_1 = b_1/a_1$  y  $x_2 = b_2/a_2$ . Los exponentes característicos de esta ecuación son respectivamente

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

con  $\alpha_+$  y  $\alpha_-$  soluciones de (13). Por lo tanto, el conjunto de soluciones se puede escribir con la notación de Riemann

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Según (Roseau, 1997, p. 229), se puede escribir

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}}\right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Definimos

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

Volvemos al caso de la ecuación diferencial hipergeométrica.

$$y = \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

lo que se traduce en igualdad  $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$  entre cocientes anarmónicos. Así tenemos

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}}\right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1-\mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

La función hipergeométrica es

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

con la notación  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ . Si  $x$  está cerca de 1, la variable  $y$  está cerca de 0. De acuerdo con la teoría de la ecuación hipergeométrica diferencial, hay constantes  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  con

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[ \kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

siempre que  $\mathcal{C} \neq 1$ , es decir  $\alpha_- \neq \alpha_+$ . Soluciones con un expositor fucsia  $\alpha_+$  en  $x = 1$  corresponde a  $\kappa_2 = 0$

$$G_1(x) = \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

### El caso $m < 0$

Asumimos por ejemplo  $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$ . Se toma  $\alpha_+ = 1$  para la función propia asociada con  $\omega_1 = s(Q + D)$ . Nosotros elegimos  $\kappa_1$  para que  $G_1(0) = 1$ . Entonces tenemos

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

de (13). Definimos

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

Es el valor de  $x$  para el cual  $y = -1$ . Se tiene  $1 < \xi < b_1/a_1$ . La variable  $y$  disminuye si  $0 < x < \xi$  con valores

$$\frac{\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - 1} \in ]0, 1[ \quad \searrow \quad -1.$$

En caso  $\xi < x < b_1/a_1$ , la expresión (23) debe ser reemplazada

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

cual es la expresión (18) de §182 de (C. Jordan, 1896), en la cual el argumento  $\frac{y}{y-1}$  crece de 1/2 a 1.

Tome nuestro ejemplo numérico (15) nuevamente, con  $a_1 = 2,5$ . La Figura 3 muestra las funciones generadoras  $G_1(x)$  y  $G_2(x)$  construido con el vector propio asociado con  $\mu_N$ . aquí  $N = 4000$  con estandarización  $G_1(0) = 1$ . Utilizamos el método de Horner para evaluar las series generadoras. Se comparan con las fórmulas (23) y (24). Aquí tenemos  $\xi \simeq 1,105$ . El factor de multiplicación para la normalización fue elegido para que las funciones obtenidas por los dos métodos sean superponibles.

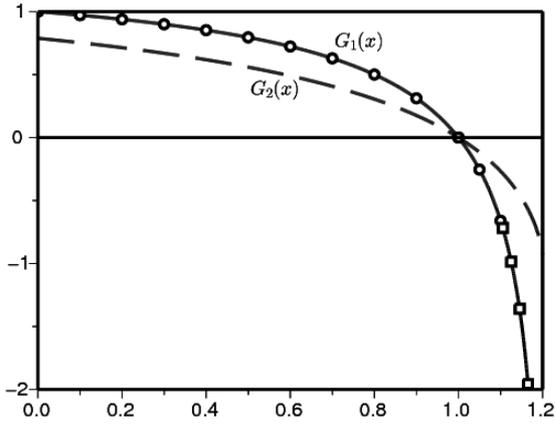


Figura 3. El caso donde  $a_1 = 2,5$ . Trazamos las funciones generadoras  $G_1(x)$  (línea continua) y  $G_2(x)$  (línea de puntos) en función de  $x$ . Uno usa para el cálculo la matriz  $\mathcal{M}^{(N)}$  con  $N = 4000$ . Las fórmulas (23) y (24) para  $G_1(x)$  están representados por pequeños círculos y cuadrados.

### El caso $m > 0$ y $\lambda'_1(1) \leq 0$

Asumimos por ejemplo  $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$ . Tenemos ahora

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

La expresión (23) ya no es adecuada porque la variable  $y$  diverge en  $x = b_1/a_1 < 1$ . Con  $0 < x < \xi$ ,  $y^{-1}$  es una función decreciente que varía de un número entre 0 y 1 a  $-1$ . Tomamos en este intervalo la expresión (32) de (C. Jordan, 1896, §182),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-\mathcal{A}} F(\mathcal{A}, \mathcal{A} + 1 - \mathcal{C}; \mathcal{A} + 1 - \mathcal{B}; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A} + 1 - \mathcal{C}; \mathcal{A} + 1 - \mathcal{B}; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

con  $\alpha_+ = 1$ ,  $\omega_1 = s(Q + D)$  y  $\kappa_1$  de manera que  $G_1(0) = 1$ . Sin embargo, durante el intervalo  $\xi < x < 1$ , tomamos la expresión (34) de (C. Jordan, 1896, §182), en la cual el argumento  $(1 - y)^{-1}$  aumenta de  $1/2$  a  $1$ :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Tome nuestro ejemplo numérico (15) nuevamente, con  $a_1 = 3,2$ . La Figura 4 muestra las fórmulas (25) y (26). Coinciden bien con la función generadora construida con el vector propio. Aquí tenemos  $\xi \simeq 0,97$ .

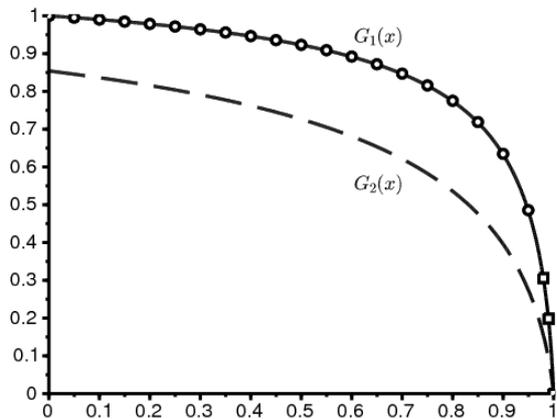


Figura 4. El caso donde  $a_1 = 3,2$ . Comparación de las fórmulas (25) [círculos pequeños] y (26) [cuadrados pequeños] para  $G_1(x)$  con la función generadora del vector propio asociado con  $\mu_N$  (línea continua), con  $N = 10^4$ .

#### El caso $m > 0$ y $\lambda'_1(1) > 0$

Las expresiones (25) y (26) probablemente ya no sean válidas, incluso si  $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$ . Deben ser reemplazados por expresiones que contengan un término logarítmico. Con  $a_1 = 3,5$ , se tiene  $\Lambda = -0,2$  y  $\alpha^* = 0,6$  según las fórmulas (14). No pudimos obtener un gráfico sugerente en este caso.

## 7 La cadena de Markov incluida

Para un proceso de ramificación subcrítico en un entorno aleatorio con entornos independientes distribuidos idénticamente,  $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha). \quad (27)$$

$f(x)$  denota la función generadora (Dekking, 1988; Geiger et al., 2003). Sea  $\mu$  el mínimo en el lado derecho de (27). En el caso "débilmente subcrítico" donde

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

se tiene

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

por una constante  $c > 0$ . En el caso "altamente subcrítico" donde

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

se tiene  $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$  y

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

por una constante  $c > 0$ . El proceso es subcrítico si  $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$ .

Volvamos a nuestro proceso de nacimiento y muerte. Nos limitamos al caso particular de dos entornos:  $K = 2$ . Definimos

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

Con  $a_i \neq b_i$ , es la función generadora del número de individuos después de un tiempo  $t$  a partir de un individuo en el momento 0 en el entorno  $i$  (Hillion, 1986). En todo caso,

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

Después de un tiempo  $t_1$ , el entorno cambia del estado 1 al estado 2. Después de un tiempo  $t_2$ , el entorno vuelve al estado 1. Las densidades de probabilidad asociadas son  $q_1 e^{-q_1 t_1}$  y  $q_2 e^{-q_2 t_2}$ . Luego considere la cadena de Markov incluida mirando solo el cambio entre el tiempo 0 y el tiempo  $t_1 + t_2$ ,  $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ . Llamémoslo una generación. La función del generador es

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

En particular,  $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$ . Este proceso de ramificación es subcrítico. De hecho, tenemos

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

porque  $R_0 < 1$ . El proceso es altamente subcrítico cuando

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[ \frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0.\end{aligned}\tag{28}$$

En este caso, tenemos

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Tenga en cuenta que si  $d_1 < 0$  y  $d_2 < 0$ , entonces el proceso es fuertemente subcrítico. En el caso débilmente subcrítico, tenemos

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

y un pequeño cálculo muestra

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2}\right)^2}.$$

Tenga en cuenta que este número es  $< 1$  si y solo si  $R_0 < 1$ .

Para nuestro ejemplo numérico, la fórmula (28) muestra que la cadena de Markov incluida es fuertemente subcrítica cuando  $\alpha_1 < 3,4$ . Curiosamente, este umbral difiere del que separa los casos  $\Lambda = s(Q + D)$  y  $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$  con  $0 < \alpha^* < 1$  para el proceso lineal de nacimiento y muerte. Este último umbral fue  $\simeq 3,2829$  de la Sección 3. Sin embargo, la velocidad a la que la cadena de Markov incluida converge hacia la extinción tiene poco que ver con la velocidad a la que el proceso de tiempo continuo hace lo mismo.

## 8 Conclusión

Quedan muchos puntos por aclarar sobre el comportamiento de los valores propios y los vectores propios. Entre las posibles generalizaciones, uno puede pensar que si los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  y  $Q_{i,j}$  son funciones periódicas del tiempo  $t$ , entonces  $\omega_1$  será igual a  $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ .  $f(\cdot)$  designa el exponente de Floquet dominante y reemplaza el límite espectral.

### Gracias

Agradecemos a Vincent Bansaye, Anne Duval y Bruno Sericola por sus comentarios y sugerencias.

### Referencias bibliográficas

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacamir N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacamir N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martynez S, San Martyon J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D'Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Probab* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) *Milléments d'analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire. *Ann I H Poincaré-Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphia
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l'agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) *Équations différentielles*. In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris