

حول العمليات الخطية دون الحرجة للولادة والموت في بيئة عشوائية

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108

<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement

Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا

nicolas.bacaer@ird.fr

ملخص

نحصل على صيغة صريحة لمعدل انقراض عمليات الولادة والوفاة دون الحرجة الخطية في بيئة عشوائية. يتم توضيح هذه الصيغة عن طريق حساب القيمة الذاتية الأكبر جزء حقيقي للمصفوفة المقطوعة من المعادلة الرئيسية. تتحقق الوظيفة المولدة للمتجه الذاتي المرتبط بنظام مفرد من المعادلات التفاضلية من نوع فوكس. يتم إيلاء اهتمام خاص لحالة بينتين ، مما يؤدي إلى معادلة ريمان التفاضلية.

1 المقدمة

نفترض أن يتذبذب البيئة بين عدد محدود K الدول ($K \geq 2$) بعد سلسلة ماركوف المتجانسة المستمرة. $Q = (Q_{i,j})$ هي المصفوفة التي يكون تبديلها هو المولد اللامتناهي لهذه السلسلة:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

نفترض أن المصفوفة Q غير قابلة للاختزال. يوجد ناقل واحد $u = (u_i)$ مع

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(سيركولا ، 2013 ، ص 152).

عدد الأفراد الذين يتطورون في هذه البيئة العشوائية هو n . في البيئة i ($1 \leq i \leq K$) ، نفترض أن لدينا عملية خطية للولادة وموت المعلومات

- $n a_i$ للولادات
- $n b_i$ للميت ،

مع $a_i > 0$ و $b_i > 0$. وبعبارة أخرى ، خلال فترة زمنية متناهية الصغر dt ،

- مع احتمال $a_i dt$ ، كل فرد يلد فردًا جديدًا ،
- يموت كل فرد باحتمال $b_i dt$.

افتراض أنه في الوقت $t = 0$ يوجد n_0 اشخاص ($n_0 \geq 1$) والبيئة i_0 . احتمال وجود n أفراد في البيئة i في الوقت t هو $p_{n,i}(t)$. إذا لدينا $p_{n,i}(0) = 1$ إذا $(n, i) = (n_0, i_0)$ و $p_{n,i}(0) = 0$ وإلا. المعادلة الرئيسية هي

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (1)$$

لكن $p_{n-1,i}$ غائب عن $n = 0$. مثل (Lotka، 1939) ، دعنا نحدد

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

سنفترض ذلك دائماً $R_0 < 1$: من شبه المؤكد أن السكان سينقرضون (Bacaër and Ed-Darraz, Cogburn and Torrez, 1981) (2014). إنه النظام دون الحرج. مع $t \rightarrow +\infty$ ، نملك

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

معدل الانقراض موجود ولا يعتمد على رقم I أو ط

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(كوليت وآخرون ، 2013 ، القسم 4.5). كما أنها لا تعتمد على الحالة الأولية (n_0, i_0) . المشكلة هي تحديد هذا المعدل بشكل صريح.

نستخدم بعض الرموز:

- $\Re(\cdot)$ هو الجزء الحقيقي من العدد المركب
- $\sigma(M)$ هو طيف من مصفوفة M .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ هو الحد الطيفي
- A هي المصفوفة القطرية $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$

عندما يكون للمصفوفة M معاملات خارج القطر تكون موجبة أو صفرية ، والتي ستكون دائماً هي الحالة أدناه ، فإنه يتبع من نظرية Perron و Frobenius أن $s(M)$ هو أيضا القيمة الذاتية من M .

في القسم 2 ، نستخدم نتيجة (D'Souza and Hambly, 1997) بشأن عمليات التفرع في بيئة عشوائية لإظهار أن

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

ندرس أيضا الاختلافات في الوظيفة $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ و $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ المشتق $\lambda_1'(\alpha)$ مما يؤدي إلى تمييز ثلاث حالات:

- واحد حيث $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$
- واحد حيث $m > 0$ و $\lambda_1'(1) \leq 0$
- واحد حيث $m > 0$ و $\lambda_1'(1) > 0$.

في الحالتين الأوليين ، يتم الوصول إلى الحد الأدنى Λ في الفاصل الزمني $[0,1]$ عند $\alpha = 1$ ، بحيث $\omega_1 = s(Q + D)$.

في القسم 3 ، نلاحظ أن الحد الطيفي μ_N من المصفوفة المبتورة من المعادلة الرئيسية تشكل تسلسل متزايد. ثم نحسب عدديا μ_N في سلسلة من الأمثلة. نلاحظ على وجه الخصوص البطء ، ولا شك اللوغاريتمي الذي معه μ_N يتلاقى ل ω_1 في الحالة الثالثة المذكورة أعلاه.

من القسم 4 ، نحن مهتمون بالقيم الذاتية الأخرى والمتجهات الذاتية المرتبطة بها ، والتي نحصل عليها من نتائج جزئية جداً. نقوم أولاً بتحويل مشكلة القيمة الذاتية

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

في نظام تفاضلي فريد من نوع فوكس (ميثوس ، 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

لوظيفة المولد

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

إذا كان المتجه الذاتي $(\pi_{n,i})$ يتناقص هندسياً بالنسبة إلى n ، فإن القيمة الذاتية ω تساوي بالضرورة القيمة الذاتية للمصفوفة $Q + \nu D$ مع عدد صحيح $\nu \geq 0$. إذا كانت $m < 0$ و $\omega = s(Q + \nu D)$ ، نقوم ببناء حلول تحليلية للنظام بشكل فعال (5) في حي $s = 1$. المعادلة المميزة لنظام Fuchsian هي

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

بعبارة أخرى، ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha D$. يتم الحصول على هذه المعادلة المميزة من خلال البحث عن حلول تتصرف على أنها $(1 - x)^\alpha$ في حي $x = 1$.

دعونا ندرس الحالة الثالثة: الوظيفة $\lambda_1(\alpha)$ يصل إلى الحد الأدنى من الداخل $[0, 1]$. إذا افترضنا

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- التطور ل $G_i(x)$ على مقربة من s يحتوي على مصطلح لوغاريتمي ،

لدينا بعد ذلك $\alpha = \alpha^*$ و $\omega = \Lambda$. علاوة على ذلك ، في نظرية فوكس ، تظهر المصطلحات اللوغاريتمية عندما يكون للمعادلة المميزة (7) جذر مزدوج ، وخاصة الفرع $\omega = s(Q + \alpha D)$. بسبب تحذب الوظيفة $s(Q + \alpha D) \mapsto \alpha$ ، هذا يحدث فقط لـ $\omega = \Lambda$.

في القسم 5 ، ندرس مباشرة السلوك المقارب للمتجه الذاتي الحد $\pi = (\pi_{n,i})$ يرتبط مع ω_1 . القسم 6 يجعل الارتباط عندما $K = 2$ مع معادلة ريمان التفاضلية. في القسم 7 ، نحن مهتمون بسلسلة ماركوف المدرجة ، والتي تقع الأخيرة في إطار عمل (Dekking ، 1988) و (Geiger et al. ، 2003). نلاحظ أن العتبة بين الأنظمة الضعيفة ودون الحرجة بقوة ليست هي نفسها حيث $\Lambda \neq s(Q + D)$.

لتحديد موقفنا بشكل أفضل فيما يتعلق ببعض الأعمال الأخرى ، نلاحظ أن النظام (1) هو "عملية غير متجانسة من شبه الولادة والموت" ؛ انظر على سبيل المثال (Sericola، 2013، p. 350) أو (Latouche and Ramaswami، 1999، Chapter 12) ، التي تناقش التوزيع الثابت ولكن ليس معدل التقارب تجاهه. علاوة على ذلك ، في بيئة مستمرة مع

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

نملك $D = (a - b)I$ و I هي مصفوفة الهوية. إذا لدينا $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ والصيغة (3) يعطي $\omega_1 = a - b$. هذا معروف جيدًا إما عن طريق الحساب المباشر (Hillion ، 1986 ، الفصل الخامس) ، أو كحالة خاصة لنتائج Karlin و McGregor في عمليات الولادة والوفاة (Collet et al. ، 2013 ، القسم 5.9.2). إن تعميم هذه النتائج الأخيرة يؤدي إلى "عمليات الولادة والوفاة شبه" (كلايتون ، 2010) تتعلق فقط بالحالات التي يكون فيها "الطيف" حقيقيًا. هذا ليس هو الحال بشكل عام في نموذجنا. وأخيرًا ، يتدخل النموذج (1) كتخطيطي لبعض النماذج السكانية غير الخطية ، وخاصة النماذج البوانية (Bacaër، 2016).

2 معادلة معدل الانقراض

2.1 تفكيك الوقت للبيئة والمرور إلى الحد الأقصى

M^T هو تبديل مصفوفة M (أو ناقل). نختار خطوة زمنية صغيرة $\delta > 0$. المصفوفة

$$P = e^{Q^T \delta}$$

هي مصفوفة سلسلة ماركوف في وقت منفصل. نملك $P_{i,j} > 0 \forall i, \forall j$ لأن المصفوفة Q غير قابلة للاختزال. تظل البيئة مغلقة في الحالة i لخطوة زمنية δ . ثم تقفز البيئة إلى الحالة j ، مع احتمال $P_{i,j}$. في الفاصل الزمني الطويل δ ، يتبع السكان عملية خطية للولادة وموت المعلمات $n a_i$ و $n b_i$ إذا كانت البيئة في حالة i . وهكذا ، يولد الفرد في المتوسط

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

اشخاص. نملك $0 < m_i < +\infty$. لذلك نحن في سياق عملية متفرعة في بيئة ماركوف. بعض الرموز:

- $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ هو سلسلة من k اجتاز البيئات،

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha). \quad (8)$$

- $\mathbb{E}(\cdot)$ يدل على توقع رياضي
- Z_k هو حجم السكان في نهاية الخطوة الزمنية k ، بالطول δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$ المصفوفة التي قدمتها $\Sigma_{i,j}(\alpha) = P_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = P \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

• $\rho(\Sigma(\alpha))$: نصف القطر الطيفي للمصفوفة الموجبة $\Sigma(\alpha)$.

ذلك $\mathbb{P}(Z_k > 0)$ كذلك هو احتمال عدم انقراض السكان. تظهر النتيجة الطبيعية 1.8 (D'Souza and Hambly, 1997) ذلك

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

في حالتنا ، توقع $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ تحسب بشكل صريح:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

ويترتب على ذلك من (8) و (10) ذلك

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

وهي أيضًا وظيفة تحليلية لـ α لأن $\rho(\Sigma(\alpha))$ هو قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة الإيجابية $\Sigma(\alpha)$. وبالتالي فإن الحد (9) يساوي $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. وبالتالي فإن معدل الانقراض ω في الوقت المستمر هو

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

لنأخذ على وجه الخصوص $\delta = 1/h$ مع عدد صحيح $h \geq 1$. لدينا بعد ذلك $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$. لكن

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

من صيغة سوفوس لي. نصف القطر الطيفي هو وظيفة مستمرة ، لدينا

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

لأن $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ ، نستنتج أن

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

وأخيرًا ، يضمن الاقتراح 4.12 من (Collet et al., 2013) المساواة في معدلات الانقراض المحددة بـ (2) أو مع احتمال عدم الانقراض كما هو الحال في الجانب الأيسر من المعادلة (9). وهكذا وجدنا الصيغة لمعدل الانقراض في الوقت المستمر.

2.2 دراسة الوظيفة $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

نحدد

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

الاقتراح 1 .

- إذا كان $m \leq 0$ ، إذن $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا كان $m > 0$ و $\lambda_1'(1) \leq 0$ ، ثم لدينا أيضًا $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا كان $m > 0$ و $\lambda_1'(1) > 0$ ، ثم هناك فريد $\alpha^* \in]0, 1[$ مع $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

إثبات . إذا كانت $v = (v_i)$ هو ناقل ،

- $v_i \geq 0 \forall i$ إذا $v \geq 0$.
- $v > 0$ إذا $v \geq 0$ و $v \neq 0$.
- $v_i > 0 \forall i$ إذا $v \gg 0$.

نستخدم الرموز المتماثلة للمصفوفات.

دعونا نعود إلى منطق القسم 9 من (باقر ، 2016) ولكن مع $R_0 < 1$ في مكان $R_0 > 1$. المصفوفة $Q + \alpha D$ غير قابل للاختزال لجميع α لأن المصفوفة Q غير قابلة للاختزال والمصفوفة D قطرية. وبالتالي $\lambda_1(\alpha)$ هي قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة $Q + \alpha D$ ،

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^T, w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ يشير إلى المنتج القياسي المعتاد للمتجهات الحقيقية. $\lambda_1(\alpha)$ هو أيضاً قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة المنقولة $Q^T + \alpha D$

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^T + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

من نظرية اضطراب القيمة الذاتية البسيطة ، نعرف أن الوظيفة $\lambda_1(\alpha)$ قابل للتمييز و

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

خصوصاً $\alpha = 0$ ، نملك $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ ، $w_1(0) = u$ ، $v_1(0) = \mathbf{1}^T$ و

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^T, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

لان $R_0 < 1$.

إذا كان $m \leq 0$ ، الوظيفة $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ يتناقص بسبب $D \leq 0$. الآن النظر في الحالة حيث $m > 0$. نملك $\lambda_1'(0) < 0$. الوظيفة $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ هو محدب (كوهين ، 1981). وبالتالي $\lambda_1'(\alpha) \mapsto \alpha$ هي وظيفة متزايدة. علاوة على ذلك ، إذا $\alpha \rightarrow +\infty$ ، نملك $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$. الوظيفة $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ في هذه الحالة محدبة بصرامة لأنها ليست أفينية (Nussbaum، 1986). لذلك هناك فريد $\alpha^* > 0$ مع $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$.

لذلك هناك ثلاث حالات:

- إذا كان $m \leq 0$ ، إذن $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا كان $m > 0$ و $\lambda_1'(1) \leq 0$ ، ثم $\alpha^* \geq 1$ و $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ ينخفض خلال الفاصل الزمني $[0, 1]$ ، لذلك لا يزال لدينا $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا كان $m > 0$ و $\lambda_1'(1) > 0$ ، ثم $\alpha^* \in]0, 1[$ و $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

2.3 حالة بيتين

ومن المفترض $K = 2$. مع $Q_{i,i} = -q_i$ إذا $i = 1, 2$ ، نملك

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

المعادلة المميزة $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ هو مكتوب

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

هذه العلاقة بين ω و α يصف الغلو في الطائرة (ω, α) . كما يمكن كتابتها

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

علاوة على ذلك ، $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ في حد ذاته

$$2 \lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

و

$$2 \lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

إذا كانت $m \leq 0$ ، أو إذا كانت $m > 0$ و $\lambda'_1(1) \leq 0$ ، نملك $\Lambda = \lambda_1(1)$. إذا كان $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$ ، يجب أن نحصل $d_1 d_2 < 0$. لنفترض في هذه الحالة على سبيل المثال ذلك $d_2 < 0$ و $d_1 > 0$. بإلغاء التمييز (13) نجد بعد حساب صغير ذلك

$$\Lambda = -\frac{\left(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1}\right)^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

لاحظ أن $\Lambda = 0$ و $\alpha^* = 0$ إذا $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ ، أي إذا $R_0 = 1$.

3 المصفوفة المقطوعة

مع $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ المعادلة الرئيسية مكتوبة $\mathcal{M}p = \frac{dp}{dt}$ هي مصفوفة لا نهائية. دعونا قطع المصفوفة \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

مع $S = A + B$. نحدد $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$.

الافتراض 2. للجميع $N \geq 1$ ، نملك $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$ وبالتالي يكون له حد إذا $N \rightarrow +\infty$ ، الذي هو ω_1 .

إثبات. مصفوفة ميتز لر هي مصفوفة تكون فيها جميع المعاملات خارج القطر $0 \leq$. المصفوفة $\mathcal{U}^{(N)}$ مصفوفة ميتز لر غير قابلة للاختزال لأن Q غير قابلة للاختزال، $a_i > 0$ و $b_i > 0 \forall i$. لذلك يمكننا استخدام النتائج الطبيعية لنظرية بيرون وفروبينيوس فيما يتعلق بالحد الطيفي لمصفوفات ميتز لر؛ انظر على سبيل المثال (Nkague Nkamba, 2012, Theorem 30). مع $e = (1, \dots, 1)^T$ نملك

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

لان $e \gg 0$ ، نستنتج ذلك $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$. إذا لدينا

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

μ_N هو قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

المتجه $\mathcal{W}^{(N)}$ يتكون من كتل N بحجم K ، $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$. ضع في اعتبارك المتجه

$$\widetilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 هو أيضا من حجم K . لدينا بعد ذلك

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots \\ \hline \dots & 0 \\ & (N+1)B \\ & \hline & Q - (N+1)S \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ \hline NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

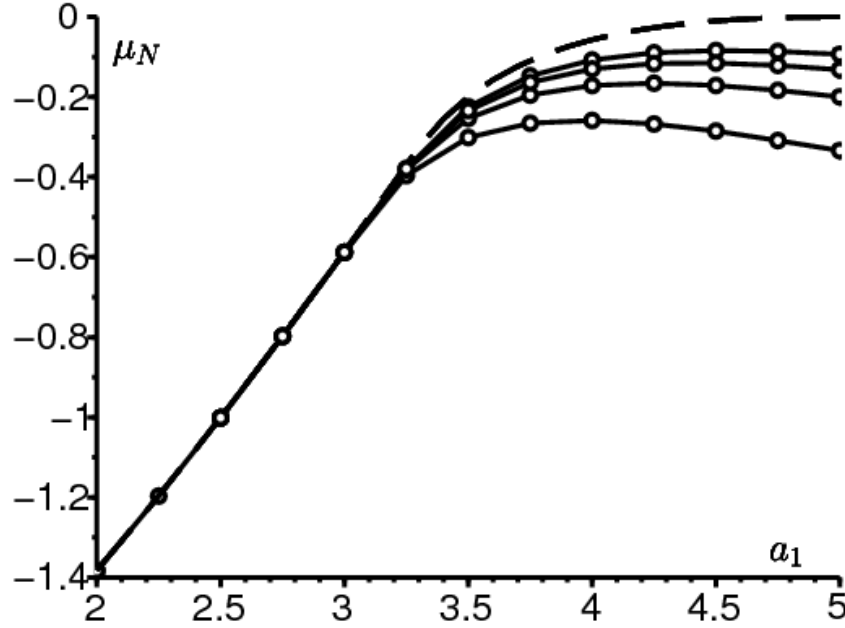
لان $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ ، نملك $\mu_N \widetilde{\mathcal{W}} > \mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}}$ لان $\widetilde{\mathcal{W}} > 0$ ، نستنتج ذلك $\mu_{N+1} > \mu_N$.

كقيم رقمية، لناخذ

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

لدينا بعد ذلك $u_1 = u_2 = 0,5$. المعلمة a_1 يختلف على سبيل المثال بين 2 و 5 ؛ هذا الحد الأعلى يتوافق مع $R_0 = 1$. للقيم الصغيرة من N ، عادة ما يصل إلى $N = 10^3$ ، بحسب برنامج مثل Scilab مجموعة كاملة من المصفوفة $U^{(N)}$ ، وإلا فإننا نحسب أصغر قيمة ذاتية $U^{(N)}$ - والمتجه الذاتي المقابل باستخدام طريقة تكرارية تطبق على المصفوفة العكسية. يستفيد المرء من بنية الكتلة الثلاثية للانقلاب عند كل تكرار (Artalejo et al., 2013). مع هذه الخوارزمية ، يمكننا الذهاب إلى أبعد الحدود $N = 10^6$ بدون مشاكل كثيرة.

يظهر الشكل 1 μ_N من ناحية a_1 ل N ثابتة ولكنها كبيرة. يتم إيقاف الخوارزمية التكرارية عند تقديرين متتاليين ل μ_N تختلف أقل من 10^{-4} . كما يظهر الشكل في الخطوط المنقطه وحسب a_1 الرقم Λ المعطى بالصيغة (3) ، وهو $\lambda_1(1)$ إذا $\lambda_1'(1) \leq 0$ والتي تعطى بالصيغة (14) متى $\lambda_1'(1) > 0$. نملك $\lambda_1'(1) < 0$ إذا $a_1 < a_1^*$ و $\lambda_1'(1) > 0$ إذا $a_1 > a_1^*$ مع $a_1^* \simeq 3,2829$. الاتفاق بين Λ وحد (μ_N) يبدو محتملاً. ومع ذلك ، فإن التقارب بطيء للغاية ، ربما لو غاريتمي ، متى R_0 يقترب من 1 ، خاصة عندما $a_1 > a_1^*$.



الشكل 1. الخط المنقط: Λ المعطى بواسطة الصيغة (3) كدالة a_1 . خطوط مستمرة ذات نقاط: μ_N إلى عن على $N = 10^3$ ، 10^4 ، 10^5 و 10^6 (من الاسفل الى الاعلى).

4 المتجهات الذاتية والقيم الذاتية الأخرى

نحن مهتمون الآن بهذا الحد $N \rightarrow \infty$ من eigenvector المرتبطة μ_N بالإضافة إلى القيم والمتجهات الذاتية الأخرى. في هذا الصدد ، سوف نحصل على نتائج جزئية فقط.

4.1 نظام فوشي

الافتراض 3. \mathbb{C} ، $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ، $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ هي مجموعة من الأرقام المعقدة و ' المشتق فيما يتعلق بالمتغير x .

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ و $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{N \times \mathbb{K}}$ ،
- إذا كان لسلسلة التوليد (6) نصف قطر تقارب $R \leq$ ،

$G_i(x)$ هو حل النظام (5) ل $x \in \mathbb{C}$ و $|x| < R$ و $1 \leq i \leq K$.

إثبات . نملك

$$G_i'(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

كما في الحالة الكلاسيكية مع بيئة ثابتة (Hillion ، 1986) ، نضرب (4) في x^n . الجمع على كل n يعطي

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G_i'(x) + b_i G_i'(x) - (a_i + b_i)x G_i'(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

وهذا يعادل (5).

ملاحظات.

- نلاحظ أن (5) مشكلة ذات قيمة ذاتية لنظام تفاضلي مفرد. هذا النظام من نوع فوكس إذا $a_i \neq b_i \forall i$ (ميثي ، 1959). النظام لديه تفرد في $x = 1$ و في $x = b_i/a_i$ إلى عن على $1 \leq i \leq K$. نملك $b_i/a_i < 1$ إذا $a_i > b_i$. يمكننا أيضًا كتابة النظام

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- ظهر مثال على المعادلة التفاضلية العددية من النوع Fuchs من الترتيب 2 في دراسة عمليات الولادة والوفاة التربيعية في بيئة ثابتة (Picard ، 1965).

4.2 القيم الذاتية عندما يكون نصف قطر التقارب $1 < I$

الافتراض 4 .

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ ، $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ و $\pi \neq 0$ ،
- إذا كان لسلسلة التوليد (6) نصف قطر تقارب أكبر من 1 ،

ثم هناك عدد صحيح $\nu \geq 0$ بحيث ω هو القيمة الذاتية للمصفوفة $Q + \nu D$.

إثبات . دعونا نتسبب بالعبث . افترض أنه بالنسبة لجميع ω ، $\nu \geq 0$ ليست قيمة ذاتية ذاتية $Q + \nu D$. وظائف $G_i(x)$ تحليلية في القرص $|x| < R$ مع $R > 1$. إذا كانت x متقاربة إلى 1 في (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

لكن ω ليست القيمة الذاتية لل Q . وبالتالي $G_i(1) = 0 \forall i$.

فليكن عددًا صحيحًا $\nu \geq 1$. بالحث ، افترض أننا أثبتنا $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$. نستمد المعادلة ν مضروبة (5) بالنسبة إلى x ونستخدم صيغة Leibniz لمنتج $(1-x)(a_i x - b_i)$ و $G_i'(x)$. نملك

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x).$$

$\binom{\nu}{k}$ يدل على معامل ذي الحدين . كثير الحدود $(1-x)(a_i x - b_i)$ هي من الدرجة 2 في x . فقط تعابير مع $0 \leq k \leq 2$ ليست صفرًا في المجموع على اليسار:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu [a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu (\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

نجعل x متقاربًا إلى 1 ونجد مع فرضية الاستقرار

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu (a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

ومع ذلك ω ليست قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \nu D$. وبالتالي $G_i^{(\nu)}(1) = 0 \forall i$.

لذا ، فقد أظهرنا ذلك $\forall i G_i^{(\nu)}(1) = 0$ ولأي عدد صحيح $\nu \geq 0$. لأن الوظيفة $G_i(x)$ تحليلي ، لدينا $G_i(x) = 0$ على مقربة من $x = 1$ ، وحتى $G_i(x) = 0$ في جميع أنحاء القرص $|x| < R$ وفق مبدأ التمديد التحليلي. إذا لدينا $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0 \forall n \geq 0$ و $1 \leq i \leq K$. هذا يتناقض مع الفرضية $\pi \neq 0$.

ملاحظات.

- القيم الذاتية للمصفوفات $Q + \nu D$ ليست بالضرورة كلها حقيقية ، بحيث لا يرتبط النظام (5) إما بنظرية Kodaira و Weyl ((Dieudonné ، 2003) ، أو بدراسة (Clayton ، 2010) حول بعض عمليات شبه الولادة والوفاة. ومع ذلك ، فإن هذه القيم الذاتية كلها حقيقية عندما تكون $K = 2$. لأن القيمة الذاتية $s(Q + \nu D)$ هو رقم حقيقي ، وقيمة eigenvalue الأخرى حقيقية أيضاً.
- في حي $x = 1$ ، يمكن كتابة النظام (16)

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

$G(x)$ هو المتجه $(G_i(x))$. النظام في النموذج

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

مع

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

و $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$. إذا كان نصف قطر التقارب في السلسلة $G_i(x)$ غير $l < 1$ ، ثم $G_i(x)$ تحليلي في حي $x = 1$. لذلك فإن النظام أعلاه لديه حل تحليلي في حي $s = 1$. وفقاً لـ (Gantmacher، 1966، p.155) ، يوجد عدد صحيح $\nu \geq 0$ التي ν قيمة ذاتية لها Ω_{-1} . لذلك هناك ناقل $w \neq 0$ مع

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

إذا لدينا

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

و ω قيمة ذاتية $Q + \nu D$. هذا ما تم إثباته بشكل أساسي في الاقتراح 4.

مثال. خذ القيم العددية (15) مع $a_1 = 2,5$. في هذه الحالة ، لدينا $m < 0$. إلى عن على $N = 1000$ ، أول عشرين قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathcal{M}^{(N)}$ يتم تقديمها تقريباً من خلال الجدول التالي:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

الآن قيم eigenvalues من Q هي 0 و -2 ، تلك $Q + D$ هم -1 و -3,5 ، تلك $Q + 2D$ هم -1,6972244 و -5,3027756 ، تلك $Q + 3D$ هم -2,2877855 و -7,2122145 ، تلك $Q + 4D$ هم -2,8377223 و -9,1622777 ، إلخ. تم العثور عليها في الجدول أعلاه. لذلك يبدو أن القيم الذاتية $\mathcal{M}^{(N)}$ تتلاقى عندما $N \rightarrow +\infty$ نحو القيم الذاتية للمصفوفات $Q + \nu D$ إلى عن على $\nu = 0, 1, 2, \dots$ و μ_N يتلاقى ل $s(Q + D)$. تذكر ذلك هناك $s(Q + D) = \Lambda$ لأن $m < 0$.

4.3 الحالة حيث $a_i < b_i \forall i$

ومن المفترض $m < 0$. دعونا نبحث رسمياً عن حل بالقرب من $s = 1$ من النظام (5) من النموذج

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \quad (17)$$

نملك

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

نملك $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ نحدد معاملات $(1-x)^n$. نحصل

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}, \quad \forall n \geq 0.$$

$c_{n-1,i}$ غائب إذا $n=0$. مع $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ ، (17) هو حل (5) إذا

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

يتم الحصول على النوع الأول من الحل عن طريق الاختيار ω من بين القيم الذاتية Q و c_0 المتجه الذاتي المقابل. تسمح العلاقة (18) بالحساب c_n إلى عن على $n \geq 1$ ، بشرط أن المصفوفة $Q + nD - \omega I$ هو دائماً قابل للعكس.

يتم الحصول على نوع ثان من الحل عن طريق الاختيار $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ مع ω قيمة ذاتية $Q + \nu D$ و c_{ν} متجه ذاتي المنشأ. ثم نحسب c_n إلى عن على $n \geq \nu + 1$ معادلة (18)، شريطة أن المصفوفة $Q + nD - \omega I$ هو دائماً قابل للعكس.

لنأخذ على وجه الخصوص $\omega = s(Q + \nu D)$ مع عدد صحيح $\nu \geq 0$. لأن $a_i < b_i \forall i$ ، نملك $D < 0$. علاوة على ذلك، $Q + \nu D$ غير قابل للاختزال. لذا بالنسبة لأي عدد صحيح $n > \nu$ ، لدينا

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

إذا لدينا $s(Q + nD - \omega I) < 0$. المصفوفة $Q + nD - \omega I$ هي مصفوفة مبيتزلر وعاكس $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$. نملك

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

مع $n \rightarrow +\infty$

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

و

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

سلسلة (17) متقاربة $|1-x| < | \frac{b_i}{a_i} - 1 |$. مسلسل (17) عن $1 \leq i \leq K$ كلها تتلاقى من أجلها $|1-x| < \min_i | \frac{b_i}{a_i} - 1 |$.

4.4 نصف قطر التقارب يساوي 1

ناقشنا في القسمين السابقين القيم الذاتية للمصفوفات $Q + \nu D$ لعدد صحيح $\nu \geq 0$. ومع ذلك (Bacaër and Ed-Darraz, 2014) قد سلطوا الضوء بالفعل على مثال حيث $R_0 < 1$ ولكن أين قيمة eigenvalue $s(Q + D)$ المصفوفة $Q + D$ أمر إيجابي تماماً: خذ فقط $a_1 = 2,7, q_1 = q_2 = 1, a_2 = 0,8, b_1 = b_2 = 2$ (وبالتالي $a_1 > b_1$). ومع ذلك، لا يمكن أن يكون لمشكلتنا الأولية قيمة ذاتية إيجابية. نستنتج على وجه الخصوص أن سلسلة التوليد $G_i(x)$ لا تملك دائماً نصف قطر تقارب > 1 . الاقتراح التالي يربط سلوك $G_i(x)$ قريب من $x = 1$ مع المعلمة α .

الاقتراح 5

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ ، $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ و $\pi \neq 0$
- إذا كان لسلسلة التوليد (6) نصف قطر تقارب يساوي 1،
- إذا كان هناك رقم حقيقي $\alpha > 0$ ، عدد صحيح $J \geq 0$ والوظائف التحليلية $g_{i,j}(x)$ في قرص متمركز في $x = 1$ مع

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

- على مدى فترة $(1-\varepsilon, 1)$ مع $\varepsilon > 0$
- إذا كان المتجه $(g_{i,J}(1))$ ليس صفراً،

ثم ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha D$.

$$G'_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x).$$

$G_i(x)$ هو حل المعادلة (5) ل $|x| < 1$. نقسم على $(1-x)^\alpha$. نمك

$$\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x).$$

مع $x \rightarrow 1$ ، نحصل

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

إذن ω هي قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha D$.

تعليق. شكل الوظيفة $G_i(x)$ في الاقتراح 5 ، الذي يجمع بين دالة القوة و متعددة الحدود اللوغاريتمية ، هو ما يمكن توقعه من حل لنظام Fuchs بالقرب من التفرد (Gantmacher، 1966، p. 159).

4.5 الحالة حيث $m > 0$ و $\lambda_1(1) > 0$

الاقتراح 6 . ومن المفترض : $m > 0$ و $\lambda_1(1) > 0$ في هذه الحالة ، $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ مع $\alpha^* \in]0, 1[$. نفترض : $\alpha > 0$ و $\omega = s(Q + \alpha D)$.

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ و $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- إذا كانت سلسلة التوليد المرتبطة بها $G_i(x)$ نصف قطر التقارب يساوي 1
- إذا $G_i(x)$ يمكن كتابتها على فاصل زمني $(1 - \varepsilon, 1)$ مع $\varepsilon > 0$ في النموذج

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

مع $J \geq 1$ وناقل $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ وهي ليست صفر ،

ثم $\alpha^* = \alpha$ و $\omega = A$

إثبات . في الواقع ،

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

نملك $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ لان $G_i(x)$ هو حل (5) يوم $|x| < 1$ ، نمك

$$\begin{aligned}
& \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\
& - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\
& + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\
& = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}.
\end{aligned}$$

التعبيرات باللغة $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ و $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ يجب على كل إلغاء:

$$\begin{aligned}
\omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\
\omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i)[Jg_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}.
\end{aligned}$$

نحدد $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ نملك

$$(Q + \alpha D - \omega I)\gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I)\gamma_{J-1} + JD\gamma_J = 0.$$

لان $\omega = s(Q + \alpha D)$ و $\gamma_J \neq 0$ المعادلة الأولى تبين ذلك هو المتجه الذاتي للمصفوفة $Q + \alpha D$ المرتبطة القيمة الذاتية $s(Q + \alpha D)$. مع ترميزات القسم 2.2 ، نستنتج أن هناك ثابت $\kappa \neq 0$ مع $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$. بالإضافة إلى ذلك ، نرى أن المعادلة الثانية تأخذ الشكل

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]\gamma_{J-1} + J\kappa Dw_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

المصفوفة $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$ نواة أحادية البعد ، بقيادة $w_1(\alpha)$. لا يزال مع تدوينات القسم 2.2 ، المصفوفة المنقولة $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$ نواة أحادية البعد ، بقيادة $v_1(\alpha)$. نأخذ منتج النقطة (19) مع $v_1(\alpha)$

$$\langle v_1(\alpha), Dw_1(\alpha) \rangle = 0.$$

وبحسب (12) فهذا يعادل $\lambda'_1(\alpha) = 0$ مع $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$ نملك $\alpha = \alpha^*$ اذا لدينا $\omega = \Lambda$.

5 السلوك المقارب للمتجهات الذاتية

5.1 الحالة حيث $m < 0$

دعونا الآن ندرس سلوك عدد كبير من المتجهات الذاتية $(\pi_{n,i})$ المرتبطة القيمة الذاتية ω_1 . لنجرب مباشرة حل (4) بـ

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

بالنسبة إلى n ، لدينا

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta} (1 + 1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} (1 - \delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

و

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

اذا لدينا

$$n \pi_{n,i} \simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

$$(n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} \simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

لن نرى أن التعابير في $\Pi^n/n^{\beta-1}$ في (4) يعطي

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

لقد فعلنا ذلك

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

مع $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ ، ياخذ $\Pi = a_1/b_1$ ، و $k_1 \neq 0$ و $k_i = 0$ إذا $i \neq 1$ مع $q_i = -Q_{i,i}$ ، التعابير في Π^n/n^β في (4) هي

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

لقد فعلنا ذلك

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

و

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

نستنتج

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

بدلاً من ذلك ، ندرس النظام (5) في محيط $x = b_1/a_1$. نملك

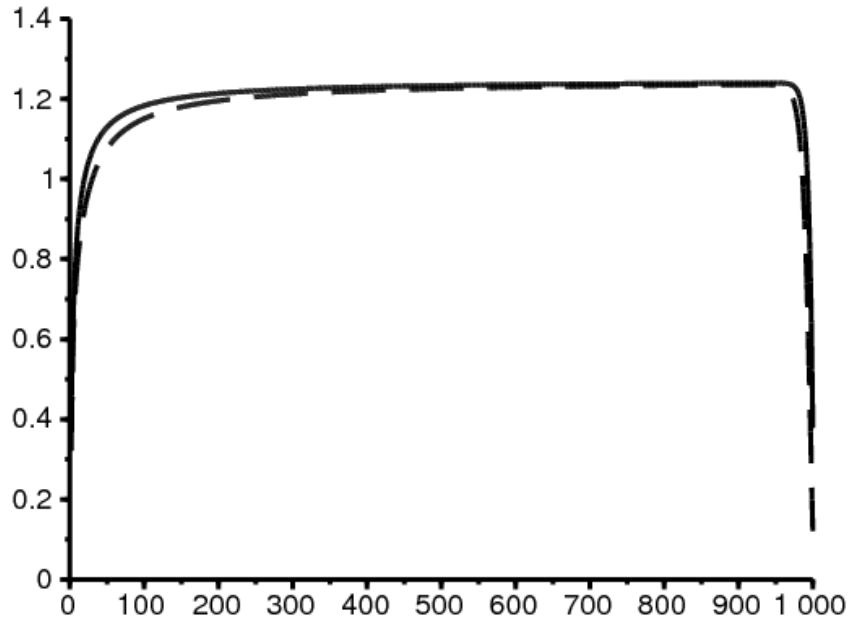
$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

للقيمة الذاتية ω_1 ، يمكننا اختيار المتجه الذاتي المرتبط بذلك $\pi_{n,i} > 0$ إلى عن على $n \geq 1$. لكامل السلسلة $G_i(x)$ ضع في اعتبارك النقطة المفردة الأقرب إلى 0 في المستوى المعقد. هذه النقطة موجودة على المحور $x > 0$ ، وفقاً لنظرية كتبها A. Pringsheim (Queffélec and Zuiily ، 2013 ، ص 54). وفقاً لـ (Flajolet and Sedgewick ، 2009) ، فقد قمنا بذلك

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1+(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

ضمن ثابت مضاعف. هذا ما وجدناه.

مثال رقمي. دعنا نرجع إلى مثالنا العددي (15) ، مع $a_1 = 2,5$. يوضح الشكل 2 السلوك المقارب للناقل الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية μ_N ، إلى عن على $N = 1000$. لدينا هنا $\Lambda = -1$. إذا لدينا $\beta = 1$ و $k_1/h_2 = 0,3$. يبدو أن الشكل يؤكد النتائج المقاربة التي تم الحصول عليها ، حيث يجب ألا يؤخذ تأثير الحافة القريب من $n = N$ في الاعتبار .



الشكل 2. الحالة $a_1 = 2,5$. $n^\beta (b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (خط صلب) و $n^{\beta+1} (b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (خط منقط) كدالة لـ n . نستخدم المصفوفة المقطوعة $\mathcal{M}^{(N)}$ مع $N = 1000$.

5.2 الحالات حيث $m > 0$

نحن نشتهبه $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ أو $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$ في كلتا الحالتين ، فإن التعابير السائدة في (4) تعطي

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

بعبارة أخرى، ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + (\beta - 1)D$ في الواقع ، إذا كنا نبحث عن حل للشكل $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ فنحن مثل (20) مع $\Pi = 1$. أما الحالة حيث

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

نملك

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n\pm 1,i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

مما يؤدي مرة أخرى إلى المعادلة (22). هذا يشير إلى أن $\beta = 1 + \alpha^*$ إذا $\lambda'_1(1) > 1$ و $\beta = 2$ إذا $\lambda'_1(1) \leq 0$. في كلتا الحالتين ، نصف قطر التقارب $G_i(x)$ يساوي 1.

6 العودة إلى حالة معينة حيث $K = 2$

يمكننا أن نعتبر المعادلة التفاضلية للأمر 2 راضية $G_1(x)$ بدلا من النظام التفاضلي من الدرجة الأولى لـ $G_1(x)$ و $G_2(x)$. نحصل

$$(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2)+(\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1=0.$$

القسمة على $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$ وبتحليل الكسر العقلاي إلى عناصر بسيطة ، نحصل عليه

$$0 = \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1-\frac{b_1}{a_1})(1-\frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})}.$$

افترض الأرقام b_1/a_1 ، b_2/a_2 و 1 كلها مميزة. ندرک معادلة تفاضلية للشکل

$$\frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1-k_0-k'_0}{x-x_0} + \frac{1-k_1-k'_1}{x-x_1} + \frac{1-k_2-k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} + \frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0,$$

أي معادلة ريمان التفاضلية (Roseau، 1997، p. 229) بثلاث نقاط منفردة $x_0 = 1$ ، $x_1 = b_1/a_1$ ، و $x_2 = b_2/a_2$. الأسات المميزة لهذه المعادلة هي على التوالي

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

مع α_+ و α_- حلول (13). وبالتالي يمكن كتابة مجموعة الحلول باستخدام تودين Riemann

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

بحسب (روسو ، 1997 ، ص 229) ، يمكن للمرء أن يكتب

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

نحدد

$$A = \alpha_+, \quad B = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad C = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

نعود إلى حالة المعادلة التفاضلية الهندسية

$$y = \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

وهو ما يترجم إلى المساواة $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ بين حاصرات غير متناسقة. لقد فعلنا ذلك

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \right. y \left. \right\}.$$

وظيفة الهندسة الفائقة هي

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

مع الترميز $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$. إذا كان x بالقرب من 1، يكون المتغير y على مقربة من 0. وفقاً لنظرية المعادلة التفاضلية الهندسية، هناك ثابت κ_1 و κ_2 مع

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

بشرط $\mathcal{C} \neq 1$ ، ذلك بالقول $\alpha_- \neq \alpha_+$. حلول مع عارض فوشسي α_+ في $s = 1$ تتوافق مع $\kappa_2 = 0$

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

القضية $m < 0$

نفترض على سبيل المثال $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$. باخذ $\alpha_+ = 1$ للوظيفة الذاتية المرتبطة $\omega_1 = s(Q + D)$. يتم تحديد κ_1 لكي $G_1(0) = 1$ لدينا بعد ذلك

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

من (13). نحدد

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

هي قيمة x التي $y = -1$. نملك $1 < \xi < b_1/a_1$. ينخفض المتغير y إذا كانت القيم $0 < \xi < x$

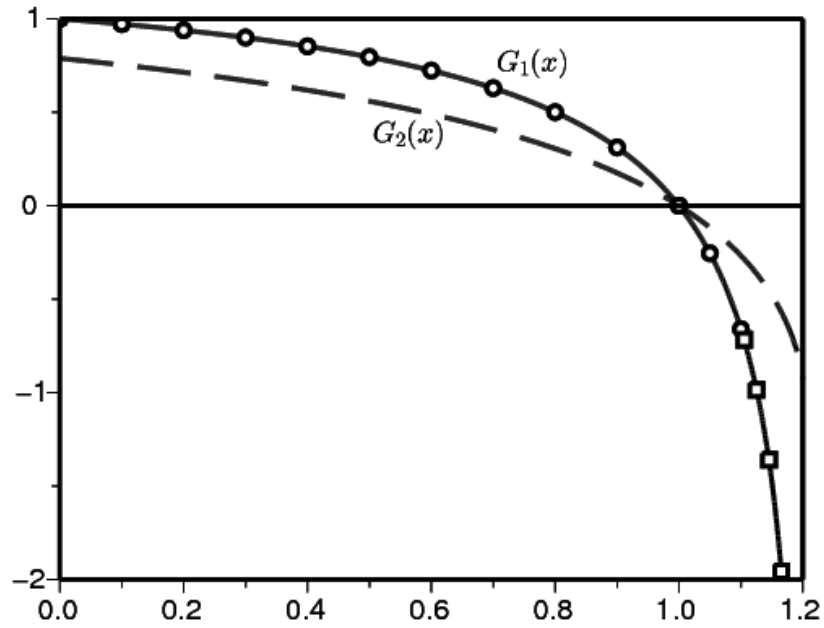
$$\frac{\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - 1} \in]0, 1[\quad \searrow \quad -1.$$

في الحالة $x < b_1/a_1 < \xi$ ، ينبغي استبدال التعبير (23)

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

وهو التعبير (18) من §182 من (ج. جوردن، 1896)، حيث كانت الحجة $\frac{y}{y-1}$ ينمو من 1/2 إلى 1.

دعنا نرجع إلى مثالنا العددي (15)، مع $a_1 = 2,5$. يوضح الشكل 3 وظائف التوليد $G_1(x)$ و $G_2(x)$ شيدت مع المتجه الذاتي المرتبط μ_N . هنا $N = 4000$ مع التقريب $G_1(0) = 1$. نستخدم طريقة هورنر لتقييم سلسلة التوليد. قارناها بالصيغ (23) و (24). لدينا هنا $\xi \simeq 1,105$. تم اختيار عامل الضرب للتطبيق بحيث تكون الوظائف التي تم الحصول عليها بالطريقتين قابلة للتطبيق.



الشكل 3. الحالة حيث $a_1 = 2,5$. نحن نتتبع وظائف التوليد $G_1(x)$ (خط صلب) و $G_2(x)$ (خط منقط) كدالة x . يستخدم المرء لحساب المصفوفة $\mathcal{M}^{(N)}$ مع $N = 4000$. الصيغ (23) و (24) لـ $G_1(x)$ يتم تمثيلها بدوائر ومربعات صغيرة.

القضية $m > 0$ و $\lambda'_1(1) \leq 0$

نفترض على سبيل المثال $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$. لدينا الآن

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

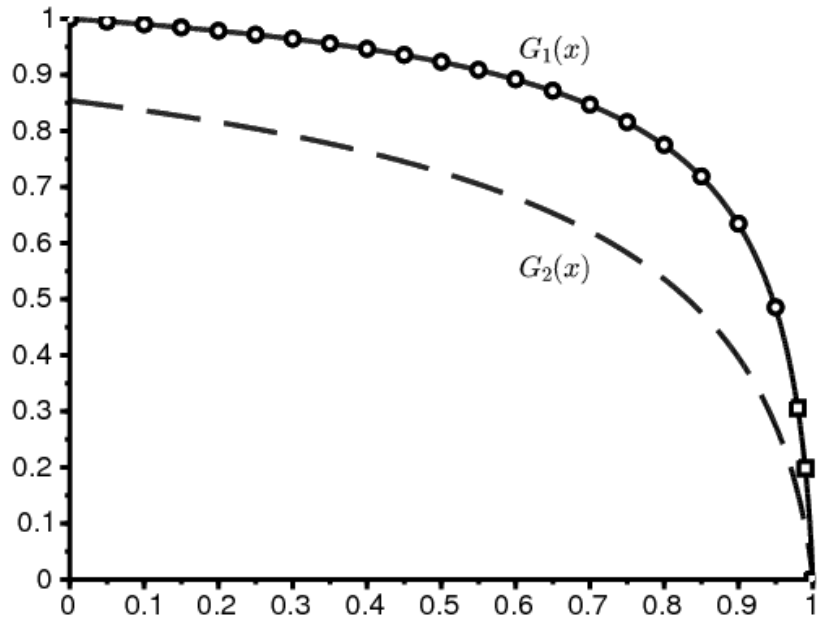
لم يعد التعبير (23) مناسباً لأن المتغير y يتباعد في $x = b_1/a_1 < 1$ مع $0 < x < \xi$ ، y^{-1} هي دالة متناقصة تختلف من رقم بين 0 و 1 إلى 1. نأخذ على هذا الفاصل التعبير (32) من (ج. الأردن، 1896، § 182)،

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-C; \mathcal{A}+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-C; \mathcal{A}+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

مع $\alpha_+ = 1$ ، $\omega_1 = s(Q+D)$ و κ_1 بحيث $G_1(0) = 1$. ومع ذلك، على مدى الفاصل الزمني $1 > x > \xi$ ، نأخذ التعبير (34) من (ج. الأردن، 1896، § 182)، التي فيها الحجة $(1-y)^{-1}$ يزيد من 1/2 إلى 1:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(\mathcal{A}, C-B; \mathcal{A}+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, C-B; \mathcal{A}+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

دعنا نرجع إلى مثالنا العددي (15)، مع $a_1 = 3,2$. يوضح الشكل 4 الصيغتين (25) و (26). تتوافق بشكل جيد مع وظيفة التوليد التي تم إنشاؤها باستخدام المتجه الذاتي. لدينا هنا $\xi \simeq 0,97$.



الشكل 4. الحالة حيث $a_1 = 3,2$. مقارنة الصيغ (25) [دوائر صغيرة] و (26) [مربعات صغيرة] لـ $G_1(x)$ مع الوظيفة المولدة للمتجه الذاتي المرتبط μ_N (خط صلب) ، مع $N = 10^4$.

القضية $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$

التعبيرات (25) و (26) ربما لم تعد صالحة ، حتى لو $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$. يجب استبدالها بتعبيرات تحتوي على مصطلح لوغاريتمي. مع $a_1 = 3,5$ ، نملك $\Lambda = -0,2$ و $\alpha^* = 0,6$ حسب الصيغ (14). لم نتمكن من الحصول على رسم بياني موحى في هذه الحالة.

7 شملت سلسلة ماركوف

لعملية التفرع دون الدرجة في بيئة عشوائية مع بيانات مستقلة موزعة متطابقة ، $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ ، نملك

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha). \quad (27)$$

$f(x)$ يدل على وظيفة التوليد (Dekking، 1988) ، μ ؛ Geiger et al.، 2003). يكون الحد الأدنى في الجانب الأيمن من (27). في حالة "ضعف الدرجة" حيث

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

نملك

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

لثابت $c > 0$ في حالة "دون الدرجة" حيث

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

نملك $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ و

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

لثابت $c > 0$. هذه العملية دون حرج إذا $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$.

دعونا نعود إلى عملية الولادة والموت. نحن نقصر أنفسنا على حالة معينة من بيئتين: $K = 2$. نحدد

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

مع $a_i \neq b_i$ ، هي الوظيفة المولدة لعدد الأفراد بعد وقت t بدءًا من الفرد في الوقت 0 في البيئة i (Hillion ، 1986). في جميع الحالات،

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

بعد قليل t_1 ، تتحول البيئة من الحالة 1 إلى الحالة 2. بعد مرور بعض الوقت t_2 ، تتحول البيئة إلى الحالة 1. كثافات الاحتمالية المرتبطة بها هي $q_1 e^{-q_1 t_1}$ و $q_2 e^{-q_2 t_2}$. ثم خذ بعين الاعتبار سلسلة ماركوف المضمنة التي تبحث فقط في التغيير بين الوقت 0 والوقت $t_1 + t_2$ ، دعونا نسميها جيل. $(Z_n)_{n=0,1,\dots}$ وظيفة المولد

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

بالخصوص، $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$ ، إن عملية التفرع هذه دون حرج. في الواقع ، لدينا

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

لان $R_0 < 1$. العملية هي دون حرج للغاية عندما

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

في هذه الحالة ، لدينا

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

لاحظ أنه إذا $d_1 < 0$ و $d_2 < 0$ ، ثم تكون العملية دون حرجة بشدة. في الحالة دون الحرجة الضعيفة لدينا

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

ويظهر القليل من الحساب

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2} \right)^2}.$$

لاحظ أن هذا الرقم < 1 إذا فقط إذا $R_0 < 1$.

بالنسبة لمثالنا العددي ، تظهر الصيغة (28) أن سلسلة ماركوف المضمنة هي دون حرج قوية عندما $a_1 < 3,4$. والغريب أن هذه العتبة تختلف عن تلك التي تفصل بين الحالات $\Lambda = s(Q + D)$ و $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ مع $0 < \alpha^* < 1$. العملية الخطية للولادة والموت. كانت هذه العتبة الأخيرة $\simeq 3,2829$ من القسم 3. ومع ذلك ، فإن المعدل الذي تتلاقى عنده سلسلة ماركوف المضمنة للانقراض ليس له علاقة تذكر بالمعدل الذي تفعله عملية الزمن المستمرة بنفس الطريقة.

8 الخلاصة

لا يزال يتعين توضيح العديد من النقاط فيما يتعلق بسلوك القيم الذاتية والمتجهات الذاتية. من بين التعميمات المحتملة ، يمكن للمرء أن يعتقد أنه إذا كانت المعاملات a_i ، b_i هي وظائف دورية للوقت r ، ثم ω_1 ستكون مساوية لـ $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. $f(\cdot)$ يعين الأس Flow المسيطر ويستبدل الحد الطيفي.

شكر

نشكر فنسنت بانساي ، أن دو فال وبرونو سيريكولا على تعليقاتهم واقتراحاتهم.

- Artalejo JR, Economou A, Lopez–Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi–stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed–Darraz A (2014) On linear birth– and– death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi–birth– and– death processes and matrix– valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi–stationary distributions. Springer, Berlin
- D’Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Prob* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) *Éléments d’analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous–critiques en environnement aléatoire *Ann I H Poincaré–Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d’analyse de l’École polytechnique*, tome 3. Gauthier–Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuiily C (2013) *Analyse pour l’agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) *Équations différentielles*. In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris