

# 关于随机环境下出生与死亡的亚临界线性过程

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Les Cordeliers, 法国巴黎  
nicolas.bacaer@ird.fr

## 总结

我们获得了在随机环境中线性亚临界生灭过程的灭绝速率的明确公式。通过数值计算主方程的截断矩阵的最大实部的特征值来说明该公式。相关特征向量的生成函数检查Fuchs型微分方程的奇异系统。特别注意两个环境的情况，这导致了黎曼微分方程。

## 1引言

假设环境在有限数量的状态 $K$ 之间振荡 ( $K \geq 2$ ) 遵循齐次连续时间马尔可夫链。  $Q = (Q_{i,j})$  是矩阵，其转置为该链的无穷小生成器：

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

我们假设矩阵 $Q$ 是不可约的。有一个向量  $u = (u_i)$  与

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013年, 第152页)。

在这种随机环境中进化的个体数量为 $n$ 。在环境中我 ( $1 \leq i \leq K$ ) , 假设我们具有参数的出生和死亡的线性过程

- $n a_i$  出生
- $n b_i$  为了死人

与  $a_i > 0$  和  $b_i > 0$ 。换句话说，在无穷小的时间间隔 $dt$ 内，

- 很有可能  $a_i dt$ , 每个人都会生出一个新的人,
- 每个人死亡的可能性  $b_i dt$ 。

假设在时间 $t = 0$ 处有  $n_0$  个人 ( $n_0 \geq 1$ ) , 环境是  $i_0$ 。在时间 $t$ , 在环境 $i$ 中有  $n$  个个体的概率为  $p_{n,i}(t)$ 。所以我们有  $p_{n,i}(0) = 1$  如果  $(n, i) = (n_0, i_0)$  和  $p_{n,i}(0) = 0$  否则。主要的等式是

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

为  $n \geq 0$  和  $1 \leq i \leq K$ 。但是  $p_{n-1,i}$  缺席  $n = 0$ 。像 (洛特卡, 1939年) 一样，让我们定义

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

我们将始终假设  $R_0 < 1$  : 人口几乎肯定会外流 (Cogburn和Torrez, 1981 ; Bacaër和Ed-Darraz, 2014) 。这是次临界状态。如果  $t \rightarrow +\infty$ , 我们有

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

灭绝速率存在并且不依赖于 $n \geq 1$ 或 $i$

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet等人, 2013年, 第4.5节)。它也不取决于初始条件  $(n_0, i_0)$ 。问题是要明确确定该速率。

我们使用一些符号：

- $\Re(\cdot)$  是复数的实部
- $\sigma(M)$  是矩阵的光谱中号。
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$  是光谱范围
- $A$  是对角矩阵  $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$ 。

当矩阵  $M$  的对角线以外的系数为正或为零时（在下面总是如此），它根据 Perron 和 Frobenius 定理得出： $s(M)$  也是一个特征值中号。

在第2节中，我们使用 (D'Souza and Hambly, 1997) 关于随机环境中分支过程的结果来表明，

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

我们还研究了功能的变化  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  和衍生物  $\lambda_1'(\alpha)$ ，这导致区分三种情况：

- 那一个  $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$ ；
- 那一个  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) \leq 0$ ；
- 那一个  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) > 0$ 。

在前两种情况下，间隔  $[0,1]$  中的最小值  $\Lambda$  达到  $\alpha = 1$ ，因此  $\omega_1 = s(Q + D)$ 。

在第3节中，我们观察到光谱界  $\mu_N$  主方程的截断矩阵的“ $\alpha$ ”形成一个递增的序列。然后我们进行数值计算  $\mu_N$  在一系列示例中。我们特别注意到缓慢，毫无疑问是对数的  $\mu_N$  收敛到  $\omega_1$  在上述第三种情况下。

从第4节开始，我们对其他特征值和关联的特征向量很感兴趣，为此，我们仅获得了非常部分的结果。我们首先变换特征值问题

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

变成 Fuchs 型的奇异微分系统 (Methée, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

用于发电机功能

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

如果特征向量  $(\pi_{n,i})$  相对于  $n$  呈几何减小，则特征值  $\omega$  必然等于矩阵的特征值  $Q + \nu D$  整数  $\nu \geq 0$ 。如果  $m < 0$  和  $\omega = s(Q + \nu D)$ ，实际上我们在  $x = 1$  的附近构造了系统 (5) 的解析解。Fuchsian 系统的特征方程为

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

换句话说， $\omega$  是矩阵的特征值  $Q + \alpha D$ 。通过寻找表现为  $(1-x)^\alpha$  在附近  $x = 1$ 。

让我们研究第三种情况：函数  $\lambda_1(\alpha)$  达到内部的最小值  $]0, 1[$ 。如果

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- 的发展  $G_i(x)$  在  $x = 1$  附近包含对数项，

所以  $\alpha = \alpha^*$  并且  $\omega = \Lambda$ 。此外，在 Fuchs 理论中，当特征方程 (7) 具有双根，尤其是分支时，出现对数项  $\omega = s(Q + \alpha D)$ 。由于功能的凸性  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ ，这仅在  $\omega = \Lambda$ ，时发生。

在第5节中，我们直接研究极限特征向量的渐近行为  $\pi = (\pi_{n,i})$  与...相关  $\omega_1$ 。当  $K = 2$  时，第6节使用黎曼微分方程进行链接。在第7节中，我们对包括的马尔可夫链感兴趣，后者在 (Dekking, 1988) 和 (Geiger等人, 2003) 的工作框架内。我们注意到，弱和强亚临界政权之间的门槛与  $\Lambda \neq s(Q + D)$ 。

为了更好地解决与其他作品有关的问题，我们注意到系统 (1) 是“准生与死的非均匀过程”；参见，例如 (Sericola, 2013 年, 第350页) 或 (Latouche和Ramaswami, 1999年, 第12章)，其中讨论了平稳分布，但没有讨论收敛于其的速率。此外，在恒定的环境中

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

我们有  $D = (a - b)I$ ，在哪里  $I$  是单位矩阵。所以  $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$  而公式 (3) 给出  $\omega_1 = a - b$ 。通过直接计算 (Hillion, 1986, 第五章)，或者作为Karlin和McGregor关于出生和死亡过程的结果的特例 (Collet等人, 2013, 第5.9.2节)，这是众所周知的。后者对“准生死过程”的概括 (Clayton, 2010) 仅涉及“频谱”是真实的情况。在我们的模型中通常不是这种情况。最后，模型 (1) 作为某些非线性人口模型特别是流行病模型的线性化干预 (Bacaer, 2016)。

## 2消光率的公式

### 2.1时间离散化环境并达到极限

$M^T$  是矩阵  $M$  (或向量) 的转置。我们选择一小段时间  $\delta > 0$ 。矩阵

$$\mathcal{P} = e^{Q^T \delta}$$

是离散时间中马尔可夫链的矩阵。我们有  $\mathcal{P}_{i,j} > 0$  为了一切  $i$  和  $j$ ，因为矩阵  $Q$  是不可约的。环境在状态  $i$  中保持阻塞状态达时间步长  $\delta$ 。然后环境以概率跳到状态  $j$   $\mathcal{P}_{i,j}$ 。在长度时间间隔  $\delta$  中，总体遵循参数的出生和死亡的线性过程  $na_i$  和  $nb_i$  如果环境处于状态  $i$ 。因此，一个人平均产生

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

个人。我们有  $0 < m_i < +\infty$ 。因此，我们处于马尔可夫环境中的分支过程中。一些符号：

- 如果  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$  是  $k$  个遍历环境的序列，

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- 对于  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

哪里  $\mathbb{E}(\cdot)$  表示数学期望

- $Z_k$  是  $k$  大小时间步长  $\delta$  结束时的总体大小
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$  给出的矩阵  $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$ ：正矩阵的光谱半径  $\Sigma(\alpha)$ 。

所以  $\mathbb{P}(Z_k > 0)$  是人口不会灭绝的概率。(D'Souza and Hambly, 1997) 的推论1.8表明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

在我们的情况下，对  $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$  明确计算：

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^T. \quad (10)$$

从 (8) 和 (10) 可知

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

它也是 $\alpha$ 的解析函数，因为 $\rho(\Sigma(\alpha))$ 是正矩阵的简单特征值 $\Sigma(\alpha)$ 。因此，极限(9)等于 $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ 。因此，连续时间内的消光率 $\omega$ 为

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

让我们特别考虑 $\delta = 1/h$ 用整数 $h \geq 1$ 。所以 $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$ 。但是

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[ e^{Q^T/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^T + \alpha D}$$

来自Sophus Lie的公式。光谱半径是一个连续函数，我们有

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^T + \alpha D}) = e^{s(Q^T + \alpha D)}.$$

因为 $s(Q^T + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ ，我们得出的结论是

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

最后，(Collet et al., 2013)的命题4.12确保等式(9)左侧的灭绝速率等于(2)或不灭绝的概率。因此，我们找到了连续时间内灭绝速率的公式。

## 2.2 功能研究 $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

我们定义

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

主张1。

- 如果  $m \leq 0$ ，然后  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- 如果  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) \leq 0$ ，那么我 // 也有  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- 如果  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) > 0$ ，那么有一个独特的  $\alpha^* \in ]0, 1[$  与  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ 。

证明。如果  $v = (v_i)$  是向量

- $v \geq 0$  如果  $v_i \geq 0$  为了一切  $i$
- $v > 0$  如果  $v \geq 0$  和  $v \neq 0$
- $v \gg 0$  如果  $v_i > 0$  为了一切  $i$ 。

我们对矩阵使用相同的符号。

让我们再次采用 (Bacaër, 2016) 第9节的推理  $R_0 < 1$  而不是  $R_0 > 1$ 。矩阵  $Q + \alpha D$  因为矩阵  $Q$  是不可约的并且矩阵  $D$  是对角的，所以对于所有  $\alpha$  都是不可约的。所以  $\lambda_1(\alpha)$  是矩阵的一个简单特征值  $Q + \alpha D$ ,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^T, w_1(\alpha) \rangle = 1,$$

哪里  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  和  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示实向量的通常标量积。  $\lambda_1(\alpha)$  也是转置矩阵的简单特征值  $Q^T + \alpha D$ ,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^T + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

从简单的特征值摄动定理，我们知道  $\lambda_1(\alpha)$  是可区分的

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

特别是对于  $\alpha = 0$ ，我们有  $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ ，  $w_1(0) = u$ ，  $v_1(0) = \mathbf{1}^T$  和

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^T, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

因为  $R_0 < 1$ 。

如果  $m \leq 0$ , 功能  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  正在减少, 因为  $D \leq 0$ 。现在考虑这种情况  $m > 0$ 。请记住  $\lambda_1'(0) < 0$ 。功能  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  是凸的 (Cohen, 1981)。所以  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  是增加的功能。此外, 如果  $\alpha \rightarrow +\infty$ , 我们有  $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$ 。功能  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  在这种情况下, 由于它不是仿射的, 所以是严格凸的 (Nussbaum, 1986)。所以有一个独特的  $\alpha^* > 0$  与  $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$ 。

因此, 有以下三种情况:

- 如果  $m \leq 0$ , 然后  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- 如果  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , 然后  $\alpha^* \geq 1$  和  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  在间隔内减少  $[0, 1]$ , 所以我们还有  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- 如果  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) > 0$ , 然后  $\alpha^* \in ]0, 1[$  和  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ 。

## 2.3 两种环境的情况

我们假设  $K = 2$ 。如果  $Q_{i,i} = -q_i$  为  $i = 1, 2$ , 然后

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

特征方程  $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$  被写

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

之间的这种关系  $\omega$  和  $\alpha$  描述飞机上的双曲线  $(\omega, \alpha)$ 。也可以写成

$$\alpha^2 - \alpha \left( \frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

另外,  $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  就是这样

$$2\lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

和

$$2\lambda_1'(\alpha) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

如果  $m \leq 0$ , 或者  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , 我们有  $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。如果  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) > 0$ , 我们必须有  $d_1 d_2 < 0$ 。假设在这种情况下  $d_1 > 0$  和  $d_2 < 0$ 。通过消除 (13) 的判别式, 经过一小段计算, 我们发现

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

注意  $\Lambda = 0$  和  $\alpha^* = 0$  如果  $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ , 即  $R_0 = 1$ 。

## 3 截断的矩阵

如果  $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ , 然后写出主要方程式  $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$ , 在哪里  $\mathcal{M}$  是一个无限矩阵。让我们切矩阵  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

与  $S = A + B$ 。我们定义  $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$ 。

**命题2。** 对于所有  $N \geq 1$ , 我们有  $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$ 。延续  $(\mu_N)$  因此有一个限制, 如果  $N \rightarrow +\infty$ , 即  $\omega_1$ 。

证明。梅茨勒矩阵是对角线之外所有系数都 $\geq 0$ 的矩阵。 $\mathcal{U}^{(N)}$ 是一个不可约的Metzler矩阵，因为 $Q$ 是不可约的， $a_i > 0$ 和 $b_i > 0$ 为了一切 $i$ 。因此，我们可以使用Perron和Frobenius定理关于Metzler矩阵谱界的推论；参见例如（Nkague Nkamba, 2012, 定理30）。如果 $e = (1, \dots, 1)^T$  所以

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

因为 $e \gg 0$ ，我们推断 $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$ 。所以

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

$\mu_N$  是矩阵的特征值  $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

向量  $\mathcal{W}^{(N)}$  由 $N$ 个大小为 $K$ 的块组成， $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$ 。考虑向量

$$\tilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0这是大小也 $k$ 。所以

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \tilde{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots & \\ \dots & 0 & \\ \dots & NA & Q - (N+1)S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

因为 $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ ，我们有 $\mathcal{U}^{(N+1)} \tilde{\mathcal{W}} > \mu_N \tilde{\mathcal{W}}$ 。因为 $\tilde{\mathcal{W}} > 0$ ，我们推断 $\mu_{N+1} > \mu_N$ 。

作为数值，让我们来

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

所以 $u_1 = u_2 = 0.5$ 。参数 $a_1$ 例如在2到5之间变化；该上限对应于 $R_0 = 1$ 。对于较小的 $N$ ，通常高达 $N = 10^3$ ，像Scilab这样的软件可以计算矩阵的整个光谱 $\mathcal{U}^{(N)}$ 。否则，我们将计算出的最小特征值 $-\mathcal{U}^{(N)}$ 通过迭代方法将对应的特征向量应用于逆矩阵。人们利用三对角块结构在每次迭代中进行反演（Artalejo等，2013）。有了这个算法，我们可以走得更远 $N = 10^6$ 没有太多问题。

图1显示 $\mu_N$ 取决于 $a_1$ 对于 $N$ 固定但较大。当两个连续的估计时停止迭代算法 $\mu_N$ 相差小于 $10^{-4}$ 。该图还以虚线显示，并根据 $a_1$ 公式(3)给出的数字 $\Lambda$ 是 $\lambda_1'(1)$ 如果 $\lambda_1'(1) \leq 0$ 并且由公式(14)给出 $\lambda_1'(1) > 0$ 。我们有 $\lambda_1'(1) < 0$ 如果 $a_1 < a_1^*$ 和 $\lambda_1'(1) > 0$ 如果 $a_1 > a_1^*$ ，带有 $a_1^* \simeq 3,2829$ 。 $\Lambda$ 与的极限之间的一致( $\mu_N$ )似乎有可能。但是，当 $R_0$ 接近1，尤其是当 $a_1 > a_1^*$

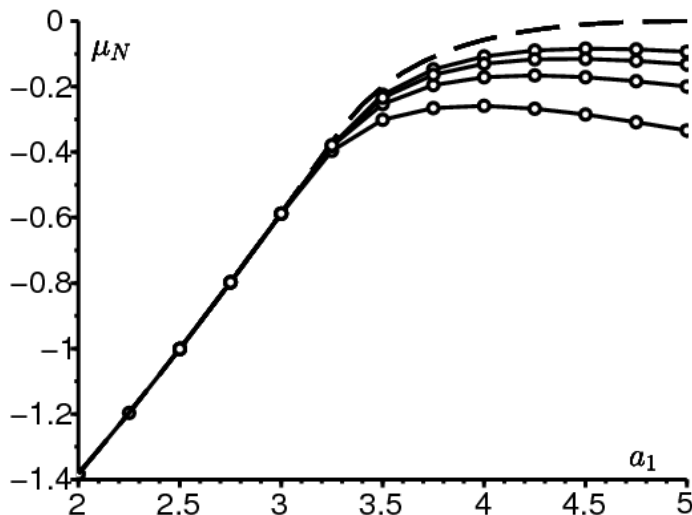


图1.虚线： $\Lambda$  公式 (3) 给出的函数为  $a_1$ 。带点的连续线： $\mu_N$  为  $N = 10^3, 10^4, 10^5$  和  $10^6$ （从下到上）。

## 4个特征向量和其他特征值

我们现在对限制感兴趣  $N \rightarrow \infty$  与相关的特征向量  $\mu_N$  以及其他特征值和向量。在这方面，我们只会得到非常部分的结果。

### 4.1 Fuchsian系统

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{C}$  是复数的集合, 并且 ' 关于变量的导数  $x$ 。

命题3。

- 如果我们方程 (4), 则  $\omega \in \mathbb{C}$  和  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ ,
- 如果生成级数 (6) 的收敛半径  $\geq R$ ,

所以  $G_i(x)$  是系统 (5) 的解决方案  $x \in \mathbb{C}$ ,  $|x| < R$  和  $1 \leq i \leq K$ 。

证明。我们有

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

就像在具有恒定环境的经典案例中一样 (Hillion, 1986), 我们将 (4) 乘以  $x^n$ 。所有  $n \geq 0$  的总和为

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i)x G'_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

相当于 (5)。

注意事项

- 我们注意到 (5) 是奇异微分系统的特征值问题。该系统为Fuchs类型, 如果  $a_i \neq b_i$  为了一切  $i$  (Methée, 1959年)。该系统在  $x = 1$  和在  $x = b_i/a_i$  为  $1 \leq i \leq K$ 。我们有  $b_i/a_i < 1$  如果  $a_i > b_i$ 。我们也可以写系统

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- 一个Fuchs 2型标量微分方程的例子出现在恒定环境下二次生灭过程的研究中 (Picard, 1965年)。

### 4.2收敛半径 > 1 时的特征值

主张4。

- 如果我们方程 (4), 则  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  和  $\pi \neq 0$ ,
- 如果生成级数 (6) 的收敛半径严格大于1,

然后有一个整数  $\nu \geq 0$  使得  $\omega$  是矩阵的特征值  $Q + \nu D$ 。

证明。让我们以荒谬为理由。假设一切  $\nu \geq 0$ ,  $\omega$  不是的特征值  $Q + \nu D$ 。功能  $G_i(x)$  在光盘中进行分析  $|x| < R$  与  $R > 1$ 。如果  $x$  收敛至 (5) 中的1:

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

但是,  $\omega$  不是的特征值  $Q$ 。所以  $G_i(1) = 0$  为了一切  $i$ 。

设为整数  $\nu \geq 1$ 。通过归纳, 假设我们已经证明了  $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$ 。我们针对  $x$  推导了  $\nu$  倍等式 (5), 并且将Leibniz公式用于  $(1-x)(a_i x - b_i)$  和  $G'_i(x)$ 。我们有

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

哪里  $\binom{\nu}{k}$  表示二项式的系数。多项式  $(1-x)(a_i x - b_i)$  在  $x$  中的度数为2。仅带有  $0 \leq k \leq 2$  左边的总和不为零:

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i^{(\nu+1)}(x) + \nu[a_i(1-2x) + b_i]G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1)G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x).$$

我们使 $x$ 收敛到1, 并找到归纳假设

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i)G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

但是 $\omega$ 不是矩阵的特征值  $Q + \nu D$ 。所以  $G_i^{(\nu)}(1) = 0$  为了一切  $i$ 。

所以, 我们已经证明  $G_i^{(\nu)}(1) = 0$  为了一切  $i$  并为所有人  $\nu \geq 0$ 。自功能  $G_i(x)$  是分析性的, 我们有  $G_i(x) = 0$  在附近  $x = 1$  甚至  $G_i(x) = 0$  整个光盘  $|x| < R$  根据解析扩展的原理。所以  $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$  为了一切  $n \geq 0$  和  $1 \leq i \leq K$ 。这与假设相矛盾  $\pi \neq 0$ 。

注意事项

- 矩阵  $Q + \nu D$  的特征值不一定是实数, 因此系统 (5) 既不是Weyl和Kodaira的理论 (Dieudonné, 2003), 也不是 (Clayton, 2010) 的研究。) 在某些生与死的准过程中。但是, 当  $K = 2$  时, 这些特征值都是真实的。因为特征值  $s(Q + \nu D)$  非常真实 其他特征值也是真实的。
- 在附近  $x = 1$ , 系统 (16) 可以写成

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

如果  $G(x)$  是向量  $(G_i(x))$ , 系统形式为

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

与

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

和  $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$ 。如果级数的收敛半径  $G_i(x)$  是  $> 1$ , 则  $G_i(x)$  在..附近分析  $x = 1$ 。因此上述系统在附近有一个解析解  $x = 1$ 。根据 (Gantmacher, 1966, p.155), 存在一个整数  $\nu \geq 0$  是一个特征值  $\Omega_{-1}$ 。所以有一个向量  $w \neq 0$  与

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

所以

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

$\omega$  是一个特征值  $Q + \nu D$ 。这是在提案4中基本演示的内容。

例子 取数值 (15) 为  $a_1 = 2,5$ 。在这种情况下, 我们有  $m < 0$ 。对于  $N = 1000$ , 矩阵的前20个特征值  $\mathcal{M}^{(N)}$  大致由下表给出:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

现在的特征值  $Q$  是0并且  $-2$ , 那些  $Q + D$  是  $-1$  和  $-3,5$ , 那些  $Q + 2D$  是  $-1,6972244$  和  $-5,3027756$ , 那些  $Q + 3D$  是  $-2,2877855$  和  $-7,2122145$ , 那些  $Q + 4D$  是  $-2,8377223$  和  $-9,1622777$  等在上表中可以找到它们。总而言之, 似乎  $\mathcal{M}^{(N)}$  何时收敛  $N \rightarrow +\infty$  朝向矩阵的特征值  $Q + \nu D$  为  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  和  $\mu_N$  收敛到  $s(Q + D)$ 。记住这里  $s(Q + D) = \Lambda$  因为  $m < 0$ 。

#### 4.3情况 $a_i < b_i$ 为了一切 $i$

我们假设  $m < 0$ 。让我们在以下形式的系统 (5) 的  $x = 1$  附近正式寻求解决方案



$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n. \quad (17)$$

我们有

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

我们有  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ 。我们确定  $(1-x)^n$ 。我们得到

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

为了一切  $n \geq 0$ 。  $c_{n-1,i}$  如果不存在  $n=0$ 。用  $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ , (17) 是 (5) 的解

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

第一种解决方案是通过选择  $\omega$  的特征值之中  $Q$  和  $c_0$  对应的特征向量 关系式 (18) 允许计算  $c_n$  为  $n \geq 1$ , 前提是矩阵  $Q + nD - \omega I$  总是可逆的。

通过选择第二种解决方案  $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$  与  $\nu \geq 1$ ,  $\omega$  的特征值  $Q + \nu D$  和  $c_\nu$  相关的特征向量。然后我们计算  $c_n$  为  $n \geq \nu + 1$  与等式 (18), 假设矩阵  $Q + nD - \omega I$  总是可逆的。

让我们特别考虑  $\omega = s(Q + \nu D)$  用整数  $\nu \geq 0$ 。因为  $a_i < b_i$  为了一切  $i$ , 我们有  $D < 0$ 。另外,  $Q + \nu D$  是不可约的。所以 对于任何整数  $n > \nu$ , 我们有

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

所以  $s(Q + nD - \omega I) < 0$ 。矩阵  $Q + nD - \omega I$  是一个可逆的 Metzler 矩阵,  $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$ 。我们有

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$$

为了一切  $n \geq 1$ 。如果  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

所以

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

系列 (17) 收敛于  $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ 。该系列 (17) 为  $1 \leq i \leq K$  都在汇合  $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ 。

#### 4.4 会聚半径等于1

在前面的两个部分中, 我们讨论了整数  $\geq 0$  的矩阵  $Q + \nu D$  的特征值。但是, (Bacaer 和 Ed-Darraz, 2014年) 已经强调了一个例子,  $R_0 < 1$  但是特征值在哪里  $s(Q + D)$  矩阵的  $Q + D$  是严格肯定的: 只需  $q_1 = q_2 = 1$ ,  $a_1 = 2, 7$ ,  $a_2 = 0, 8$ ,  $b_1 = b_2 = 2$  (因此  $a_1 > b_1$ )。我们最初的问题不能具有正特征值。我们特别得出结论, 生成系列  $G_i(x)$  并不总是有收敛半径  $> 1$ 。以下命题链接了以下行为  $G_i(x)$  接近  $x = 1$  与参数  $\alpha$ 。

**主张5.**

- 如果我们有方程式 (4), 则  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  和  $\pi \neq 0$ ,
- 如果生成级数 (6) 的收敛半径等于1,
- 如果有实数  $\alpha > 0$ , 一个整数  $J \geq 0$  和分析功能  $g_{i,j}(x)$  在以  $x = 1$  与

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

在一段时间内  $(1-\varepsilon, 1)$  与  $\varepsilon > 0$ ,

- 如果向量  $(g_{i,J}(1))$  不为零

所以  $\omega$  是矩阵的特征值  $Q + \alpha D$ 。

证明。我们有

$$G'_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x).$$

$G_i(x)$  是方程式 (5) 的解  $|x| < 1$ 。我们除以  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ 。我们有

$$\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x).$$

用  $x \rightarrow 1$ , 我们得到

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

所以  $\omega$  是矩阵的特征值  $Q + \alpha D$ 。

注意 功能形式  $G_i(x)$  命题5中结合了幂函数和对数多项式的“奇异性”附近的Fuchs系统的解是可以预期的 (Gantmacher, 1966, 第159页)。

#### 4.5情况 $m > 0$ 和 $\lambda'_1(1) > 0$

**主张6.** 我们假设:  $m > 0$  和  $\lambda'_1(1) > 0$ 。在这种情况下,  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$  与  $\alpha^* \in ]0, 1[$ 。我们假设:  $\alpha > 0$  并且  $\omega = s(Q + \alpha D)$ 。

- 如果我们方程 (4), 则  $\omega \in \mathbb{C}$  和  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- 如果相关的生成系列  $G_i(x)$  收敛半径等于 1
- 如果  $G_i(x)$  可以每隔一定时间写  $(1-\varepsilon, 1)$  与  $\varepsilon > 0$  形式

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

与  $J \geq 1$  和一个向量  $(g_{i,j,0})_{1 \leq j \leq K}$  不为零

所以  $\alpha = \alpha^*$  和  $\omega = \Lambda$ 。

证明。的确

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

我们有  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ 。因为  $G_i(x)$  是 (5) 的解  $|x| < 1$ , 我们有

$$\omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}.$$

中的表达式  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$  和在  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$  必须各自取消:

$$\begin{aligned}\omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\ \omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i)[Jg_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}.\end{aligned}$$

我们定义  $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ 。我们有

$$(Q + \alpha D - \omega I)\gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I)\gamma_{J-1} + JD\gamma_J = 0.$$

因为  $\omega = s(Q + \alpha D)$  和  $\gamma_J \neq 0$ ，第一个等式表明  $\gamma_J$  是矩阵的特征向量  $Q + \alpha D$  与特征值相关  $s(Q + \alpha D)$ 。利用第2.2节的符号，我们推导出存在一个常数  $\kappa \neq 0$  与  $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$ 。此外，我们看到第二个方程采用以下形式

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]\gamma_{J-1} + J\kappa Dw_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

矩阵  $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$  有一个一维核，由  $w_1(\alpha)$ 。仍然使用第2.2节的符号，转置矩阵  $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$  有一个一维核，由  $v_1(\alpha)$ 。(19) 的点积与  $v_1(\alpha)$  给予

$$\langle v_1(\alpha), Dw_1(\alpha) \rangle = 0.$$

根据 (12)，这等价于  $\lambda_1'(\alpha) = 0$ 。用  $m > 0$  和  $\lambda_1'(1) > 0$ ，这意味着  $\alpha = \alpha^*$ 。所以  $\omega = \Lambda$ 。

## 5 特征向量的渐近行为

### 5.1 情况 $m < 0$

现在让我们研究  $n$  个大特征向量的行为  $(\pi_{n,i})$  与特征值相关  $\omega_1$ 。让我们直接尝试 (4) 的解

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

对于  $n$  大，我们有

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta}(1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta}(1-\delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

和

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

所以

$$\begin{aligned}n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),\end{aligned}$$

为  $n$  大。我们看到其中的表达式  $\Pi^n/n^{\beta-1}$  在 (4) 中给

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

所以

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

如果  $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ ，我们  $\Pi = a_1/b_1$ ， $k_1 \neq 0$  和  $k_i = 0$  如果  $i \neq 1$ 。用  $q_i = -Q_{i,i}$ ，中的表达式  $\Pi^n/n^\beta$  在 (4) 中

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

所以

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

和

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1} k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

我们推论

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_i \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

或者，我们研究附近的系统 (5)  $x = b_1/a_1$ 。我们有

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

对于特征值  $\omega_1$ ，我们可以选择相关的特征向量  $\pi_{n,i} > 0$  为  $n \geq 1$ 。对于整个系列  $G_i(x)$ ，考虑复平面中最接近0的奇异点。根据A. Pringsheim的一个定理，该点在轴  $x > 0$  上 (Queffelec和Zuily, 2013年, 第54页)。根据 (Flajolet和Sedgewick, 2009年),

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1 + (\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$$

为  $n \rightarrow +\infty$ ，在一个乘法常数内。这就是我们发现的。

数值示例。再次以数值示例 (15) 为例： $a_1 = 2,5$ 。图2显示了与特征值相关的特征向量的渐近行为  $\mu_N$ ，对于  $N = 1000$ 。这边有  $\Lambda = -1$ 。所以我们有  $\beta = 1$  和  $k_1/h_2 = 0,3$ 。该图似乎证实了所获得的渐近结果，因为不应考虑  $n = N$  附近的边缘效应。

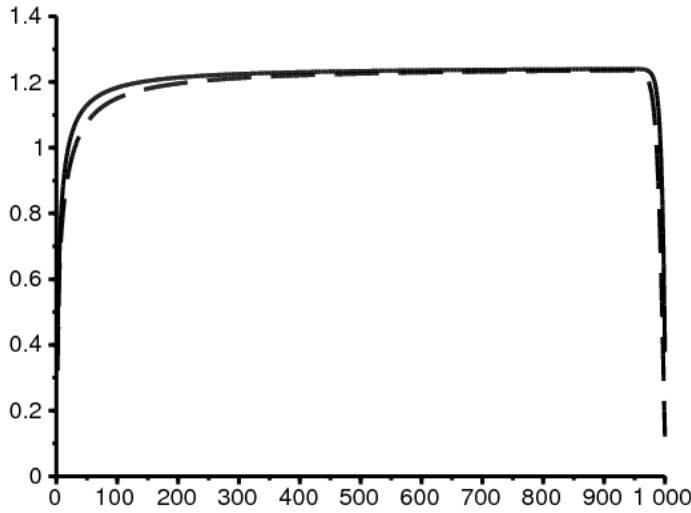


图2. 案例  $a_1 = 2,5$ 。我们追踪  $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$  (实线) 和  $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$  (虚线) 取决于  $n$ 。我们使用截断的矩阵  $\mathcal{M}^{(N)}$  与  $N = 1000$ 。

## 5.2情况 $m > 0$

我们怀疑  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$  哪里  $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$ 。在这两种情况下，(4) 中的主导表达式都给出

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

换句话说， $\omega$  是矩阵的特征值  $Q + (\beta - 1)D$ 。确实，如果我们正在寻找以下形式的解决方案  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ ，我们就像 (20) 中的  $\Pi = 1$ 。至于情况

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

我们有

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n \pm 1,i} &\simeq \left( \log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[ \frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

再次导致方程 (22) 。这表明  $\beta = 1 + \alpha^*$  如果  $\lambda'_1(1) > 1$  和  $\beta = 2$  如果  $\lambda'_1(1) \leq 0$ 。在这两种情况下,  $G_i(x)$  等于1。

## 6回到特殊情况 $K = 2$

我们可以考虑2阶满足的微分方程  $G_1(x)$  而不是一阶微分系统  $G_1(x)$  和  $G_2(x)$ 。我们得到

$$(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2)+(\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1=0.$$

除以  $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$  通过将有理分数分解为简单元素, 我们得到

$$0=\frac{d^2G_1}{dx^2}+\left[\frac{1-\frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}-\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1}+\frac{1+\frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x-\frac{b_1}{a_1}}+\frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-\frac{b_2}{a_2}}\right]\frac{dG_1}{dx} +\left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)}\frac{(1-\frac{b_1}{a_1})(1-\frac{b_2}{a_2})}{x-1}\right]\frac{G_1}{(x-1)(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})}.$$

假设数字  $b_1/a_1$ ,  $b_2/a_2$  和1完全不同。我们认识到形式的微分方程

$$\frac{d^2G_1}{dx^2}+\left[\frac{1-k_0-k'_0}{x-x_0}+\frac{1-k_1-k'_1}{x-x_1}+\frac{1-k_2-k'_2}{x-x_2}\right]\frac{dG_1}{dx} +\left[\frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0}+\frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} +\frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2}\right]\frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}=0,$$

也就是说具有三个奇异点的黎曼微分方程 (Roseau, 1997, p.229)  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = b_1/a_1$  和  $x_2 = b_2/a_2$ 。特色参展商分别是

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

与  $\alpha_+$  和  $\alpha_-$  (13) 的解。因此, 解决方案集可以用黎曼符号来表示

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

根据 (Roseau, 1997, p.229) , 一个人可以写

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}}\right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

我们定义

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

我们回到微分超几何方程的情况

$$y = \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

转化为平等  $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$  非谐关系之间。所以

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}}\right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

超几何函数是

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

带有符号  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$ 。如果  $x$  在 1 附近, 则变量  $y$  在 0 附近。根据微分超几何方程的理论, 存在常数  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  与

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[ \kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

规定  $\mathcal{C} \neq 1$ , 也就是说  $\alpha_- \neq \alpha_+$ 。福克斯展商的解决方案  $\alpha_+$  在  $x = 1$  对应于  $\kappa_2 = 0$  :

$$G_1(x) = \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

**案子**  $m < 0$

我们假设例如  $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$ 。我们采取  $\alpha_+ = 1$  与相关的本征函数  $\omega_1 = s(Q + D)$ 。我们选择  $\kappa_1$  这样  $G_1(0) = 1$ 。所以

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

来自 (13)。我们定义

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

这是的值  $x$  为其中  $y = -1$ 。我们有  $1 < \xi < b_1/a_1$ 。如果  $0 < x < \xi$  的变量  $y$  减小

$$\left( \frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) / \left( \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) \in ]0, 1[$$

最高-1。如果  $\xi < x < b_1/a_1$ , 应替换表达式 (23)

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

(C. Jordan, 1896) §182的表达式 (18), 其中  $\frac{y}{y-1}$  从 1/2 增长到 1。

再次以数值示例 (15) 为例:  $a_1 = 2, 5$ 。图3显示了生成函数  $G_1(x)$  和  $G_2(x)$  用与  $\mu_N$ 。在这里  $N = 4000$  标准化  $G_1(0) = 1$ 。我们使用霍纳方法评估生成序列。我们将它们与公式 (23) 和 (24) 进行比较。这边有  $\xi \simeq 1, 105$ 。选择归一化的乘法因子, 以便通过两种方法获得的函数是可叠加的。

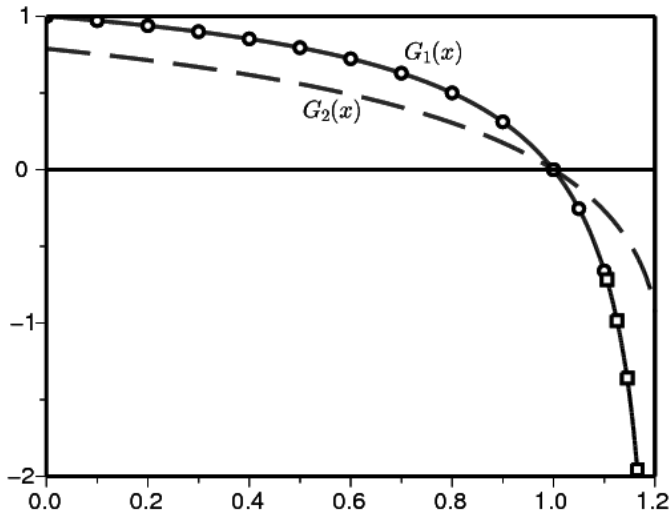


图3. 案例  $a_1 = 2.5$ 。我们追踪生成函数  $G_1(x)$  (实线) 和  $G_2(x)$  (虚线) 作为  $x$  的函数。一个用于矩阵计算  $\mathcal{M}^{(N)}$  与  $N = 4000$ 。公式 (23) 和 (24)  $G_1(x)$  用小圆圈和正方形表示。

### 案子 $m > 0$ 和 $\lambda'_1(1) \leq 0$

我们假设例如  $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$ 。现在有

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

表达式 (23) 不再适用, 因为该变量  $y$  分歧于  $x = b_1/a_1 < 1$ 。对于  $0 < x < \xi$ ,  $y^{-1}$  减少 0 到 1 到 -1 之间的数字。我们以这个间隔为 (C. Jordan, 1896, §182) 的表达式 (32),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

与  $\alpha_+ = 1$ ,  $\omega_1 = s(Q+D)$  和  $\kappa_1$  这样  $G_1(0) = 1$ 。但是, 在这段时间里  $\xi < x < 1$ , 我们采用 (C. Jordan, 1896, §182) 的表达式 (34), 其中  $(1-y)^{-1}$  从 1/2 增加到 1:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

再次以数值示例 (15) 为例:  $a_1 = 3.2$ 。图4示出了公式 (25) 和 (26)。它们与用特征向量构造的生成函数很好地吻合。这边有  $\xi \simeq 0.97$ 。

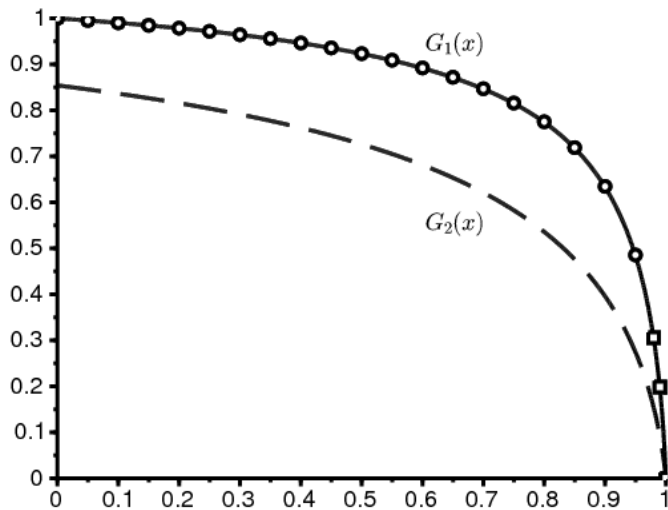


图4.情况  $a_1 = 3,2$ 。公式 (25) [小圆圈]和 (26) [小方块]的比较  $G_1(x)$  与特征向量相关的生成函数  $\mu_N$  (实线),  $N = 10^4$ 。

### 案子 $m > 0$ 和 $\lambda'_1(1) > 0$

表达式 (25) 和 (26) 可能不再有效, 即使  $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$ 。必须将它们替换为包含对数项的表达式。如果  $a_1 = 3,5$ , 我们有  $\Lambda = -0,2$  和  $\alpha^* = 0,6$  根据公式 (14)。在这种情况下, 我们无法获得提示性图表。

## 7包括马尔可夫链

对于次临界连接过程  $Z_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 在具有相同分布的独立环境的随机环境中,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \quad (27)$$

哪里  $f(x)$  表示生成函数 (Dekking, 1988 ; Geiger等, 2003)。令  $\mu$  为 (27) 右侧的最小值。在“弱亚临界”情况下,

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

我们有

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

保持恒定  $c > 0$ 。在“高度次临界”情况下,

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

我们有  $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$  和

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

保持恒定  $c > 0$ 。该过程是次临界的, 如果  $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$ 。

让我们回到我们的生死过程。我们将自己限制在以下两种情况下:  $K = 2$ 。我们定义

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

如果  $a_i \neq b_i$ , 它是一段长时间后个体数量的生成函数  $t$  从环境中时间0的个人开始  $i$  (Hillion, 1986)。无论如何

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

过了一会儿  $t_1$ , 环境从状态1切换到状态2。  $t_2$ , 环境切换回状态1。相关的概率密度为  $q_1 e^{-q_1 t_1}$  和  $q_2 e^{-q_2 t_2}$ 。然后考虑包含的马尔可夫链  $Z_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 仅查看时间0和时间之间的变化  $t_1 + t_2$ 。我们称它为一代。生成函数是



$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

特别是  $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$ 。该分支过程是次临界的。确实，我们有

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

因为  $R_0 < 1$ 。在以下情况下，连接过程是非常次关键的

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[ \frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

在这种情况下，我们有

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

请注意，如果  $d_1 < 0$  和  $d_2 < 0$ ，那么该过程非常次临界。在弱亚临界情况下，我们有

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

一些计算显示

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2}\right)^2}.$$

请注意，这个数字是  $< 1$  当且仅当  $R_0 < 1$ 。

对于我们的数值示例，公式 (28) 显示，当  $a_1 < 3.4$ 。奇怪的是，此阈值与区分案例的阈值不同  $\Lambda = s(Q + D)$  和  $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$  与  $0 < \alpha^* < 1$  用于生与死的线性过程。最后一个阈值是  $\simeq 3,2829$  从第3节开始。但是，包含的马尔可夫链收敛到灭绝的速率与连续时间过程执行的速率几乎没有关系。

## 8 结论

关于特征值和特征向量的行为，还有许多要澄清的地方。在可能的概括中，人们可以认为，如果系数  $a_i$ ,  $b_i$  和  $Q_{i,j}$  是功能  $T$ -时间周期  $t$ ，然后  $\omega_1$  将等于  $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ ，在哪里  $f(\cdot)$  指定主要的Floquet指数并替换频谱范围。

## 致谢

我们感谢 Vincent Bansaye, Anne Duval 和 Bruno Sericola 的意见和建议。

## 参考文献

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. J Math Biol 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. J Math Biol 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. J Math Biol 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. SIAM J Matrix Anal Appl 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J Appl Probab 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. Proc Amer Math Soc 81 : 657–658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D'Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. Adv Appl Prob 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. Stoch Proc Appl 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) Éléments d'analyse, tome 8. Jacques Gabay, Paris

- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) Analytic combinatorics. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) Théorie des matrices, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003)  
Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire.  
Ann I H Poincaré–Pr 39 : 593–620
- Hillion A (1986) Les théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) Cours d'analyse de l'École polytechnique, tome 3. Gauthier–Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling.  
SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions.  
Comment Math Helv 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012)  
Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle.  
Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. Linear Algebra Appl 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. Ann I H Poincaré B 2 : 151–172
- Queffélec H, Zuily C (2013) Analyse pour l'agrégation, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie.  
Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications. Lavoisier, Paris