

Sobre os processos lineares subcríticos de nascimento e morte em um ambiente aleatório

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers, Paris, França
nicolas.bacaer@ird.fr

Sumário

Obtemos uma fórmula explícita para a taxa de extinção dos processos lineares subcríticos de nascimento e morte em um ambiente aleatório. Essa fórmula é ilustrada calculando numericamente o valor próprio da maior parte real da matriz truncada da equação mestre. A função geradora do vetor próprio associado verifica um sistema singular de equações diferenciais do tipo Fuchs. É dada especial atenção ao caso de dois ambientes, o que leva a uma equação diferencial de Riemann.

1 Introdução

Suponha que o ambiente oscile entre um número finito K de estados ($K \geq 2$) após uma cadeia de Markov homogênea em tempo contínuo. $Q = (Q_{i,j})$ é a matriz cuja transposição é o gerador infinitesimal desta cadeia:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

Assumimos que a matriz Q é irredutível. Existe um único vetor $u = (u_i)$ com

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013, p. 152).

O número de indivíduos que evoluem nesse ambiente aleatório é n . No ambiente i ($1 \leq i \leq K$), suponha que tenhamos um processo linear de nascimento e morte de parâmetros

- $n a_i$ para nascimentos
- $n b_i$ para os mortos

com $a_i > 0$ e $b_i > 0$. Em outras palavras, durante um intervalo de tempo infinitesimal dt ,

- com uma probabilidade $a_i dt$, cada indivíduo dá à luz um novo indivíduo,
- cada indivíduo morre com uma probabilidade $b_i dt$.

Suponha que no momento $t = 0$ exista n_0 indivíduos ($n_0 \geq 1$) e o ambiente é i_0 . A probabilidade de ter n indivíduos no ambiente i no momento t é $p_{n,i}(t)$. Então nós temos $p_{n,i}(0) = 1$ se $(n, i) = (n_0, i_0)$ e $p_{n,i}(0) = 0$ caso contrário. A equação principal é

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

para $n \geq 0$ e $1 \leq i \leq K$. Mas $p_{n-1,i}$ está ausente por $n = 0$. Como (Lotka, 1939), vamos definir

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

Sempre assumiremos que $R_0 < 1$: a população está quase certamente saindo (Cogburn e Torrez, 1981; Bacaër e Ed-Darraz, 2014). É o regime subcrítico. Se $t \rightarrow +\infty$ nós temos

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

A taxa de extinção existe e não depende de $n \geq 1$ ou i

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet et al., 2013, seção 4.5). Também não depende da condição inicial (n_0, i_0) . O problema é determinar explicitamente essa taxa.

Usamos algumas notações:

- $\Re(\cdot)$ é a parte real de um número complexo
- $\sigma(M)$ representa o espectro de uma matriz M .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ é o limite espectral
- A é a matriz diagonal $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$.

Quando a matriz M possui coeficientes fora da diagonal positivos ou nulos, o que sempre será o caso abaixo, segue-se do teorema de Perron e Frobenius que $s(M)$ é também um valor próprio de M .

Na seção 2, usamos um resultado de (D'Souza e Hambly, 1997) sobre processos de ramificação em um ambiente aleatório para mostrar que

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

Também estudamos as variações da função $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ e o derivado $\lambda_1'(\alpha)$, o que leva a distinguir três casos:

- aquele onde $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$;
- aquele onde $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$;
- aquele onde $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$.

Nos dois primeiros casos, o mínimo Λ no intervalo $[0, 1]$ é atingido em $\alpha = 1$, de modo que $\omega_1 = s(Q + D)$.

Na seção 3, observamos que o limite espectral μ_N da matriz truncada da equação principal forma uma sequência crescente. Então calculamos numericamente μ_N em uma série de exemplos. Notamos em particular a lentidão, sem dúvida logarítmica, com a qual μ_N converge para ω_1 no terceiro caso mencionado acima.

Na seção 4, estamos interessados nos outros autovalores e nos autovetores associados, para os quais obtemos apenas resultados muito parciais. Primeiro, transformamos o problema de autovalor

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

em um sistema diferencial singular do tipo Fuchs (Methée, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

para a função de gerador

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

Se o vetor próprio $(\pi_{n,i})$ diminui geometricamente em relação a n , então o valor próprio ω é necessariamente igual ao valor próprio de uma matriz $Q + \nu D$ com inteiro $\nu \geq 0$. Se $m < 0$ e $\omega = s(Q + \nu D)$, na verdade construímos soluções analíticas do sistema (5) na vizinhança de $x = 1$. A equação característica do sistema fuchsiano é

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

em outras palavras, ω é um autovalor da matriz $Q + \alpha D$. Esta equação característica é obtida buscando soluções que se comportam como $(1-x)^\alpha$ nas proximidades de $x = 1$.

Vamos estudar o terceiro caso: a função $\lambda_1(\alpha)$ atinge seu mínimo dentro $]0, 1[$. Se

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- o desenvolvimento de $G_i(x)$ na vizinhança de $x = 1$ contém um termo logarítmico,

tão $\alpha = \alpha^*$ e $\omega = \Lambda$. Além disso, na teoria de Fuchs, os termos logarítmicos aparecem quando a equação característica (7) tem uma raiz dupla, em particular o ramo $\omega = s(Q + \alpha D)$. Por causa da convexidade da função $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$, isso acontece apenas para $\omega = \Lambda$.

Na seção 5, estudamos diretamente o comportamento assintótico do vetor próprio limite $\pi = (\pi_{n,i})$ associado a ω_1 . A Seção 6 faz o link quando $K = 2$ com uma equação diferencial de Riemann. Na seção 7, estamos interessados na cadeia de Markov incluída, a última abrangendo a estrutura do trabalho de (Dekking, 1988) e (Geiger et al., 2003). Observamos que o limiar entre os regimes fracamente e fortemente sub-crítico não é o mesmo que aquele onde $\Lambda \neq s(Q + D)$.

Para melhor situar nosso problema em relação a outros trabalhos, notamos que o sistema (1) é um "processo não homogêneo de quase nascimento e morte"; ver, por exemplo (Sericola, 2013, p. 350) ou (Latouche e Ramaswami, 1999, capítulo 12), que discutem a distribuição estacionária, mas não a taxa de convergência em relação a ela. Além disso, em um ambiente constante com

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

nós temos $D = (a - b)I$ onde I é a matriz de identidade. Então $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ e a fórmula (3) fornece $\omega_1 = a - b$. Isso é bem conhecido pelo cálculo direto (Hillion, 1986, capítulo V) ou como um caso especial dos resultados de Karlin e McGregor nos processos de nascimento e morte (Collet et al., 2013, seção 5.9.2). As generalizações desses últimos resultados para os "quase processos de nascimento e morte" (Clayton, 2010) dizem respeito apenas aos casos em que o "espectro" é real. Este não é geralmente o caso em nosso modelo. Finalmente, o modelo (1) intervém como linearização de certos modelos populacionais não lineares e, em particular, modelos epidêmicos (Bacaër, 2016).

2 A fórmula para a taxa de extinção

2.1 Discretização temporal do meio ambiente e passagem ao limite

M^T é a transposição de uma matriz M (ou de um vetor). Escolhemos um pequeno passo no tempo $\delta > 0$. A matriz

$$P = e^{Q^T \delta}$$

é a matriz de uma cadeia de Markov em tempo discreto. Nós temos $P_{i,j} > 0$ por tudo i e j , uma vez que a matriz Q é irredutível. O ambiente permanece bloqueado no estado i por um intervalo de tempo δ . Então o ambiente pula para o estado j , com uma probabilidade $P_{i,j}$. No intervalo de tempo δ , a população segue um processo linear de nascimento e morte de parâmetros $n a_i$ e $n b_i$ se o ambiente estiver no estado i . Assim, um indivíduo gera em média

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

indivíduos. Nós temos $0 < m_i < +\infty$. Estamos, portanto, no contexto de um processo de ramificação em um ambiente Markov. Algumas anotações:

- Se $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ é uma sequência de k ambientes atravessados,

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- Para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

onde $\mathbb{E}(\cdot)$ denota expectativa matemática

- Z_k é o tamanho da população no final do passo k de tamanho de tempo δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$

- $\Sigma(\alpha)$ a matriz dada por $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$: o raio espectral da matriz positiva $\Sigma(\alpha)$.

Então $\mathbb{P}(Z_k > 0)$ é a probabilidade de a população não ser extinta. O corolário 1.8 de (D'Souza e Hambly, 1997) mostra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

No nosso caso, a expectativa de $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ é calculado explicitamente:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{\xi_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

Segue-se de (8) e (10) que

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

É também uma função analítica de α porque $\rho(\Sigma(\alpha))$ é um autovalor simples da matriz positiva $\Sigma(\alpha)$. O limite (9) é, portanto, igual a $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. A taxa de extinção ω em tempo contínuo é, portanto,

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

Vamos dar em particular $\delta = 1/h$ com um inteiro $h \geq 1$. Então $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$. Mas

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

da fórmula de Sophus Lie. Sendo o raio espectral uma função contínua, temos

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho\left(e^{Q^\top + \alpha D}\right) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Porque $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$, concluímos que

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Por fim, a proposição 4.12 de (Collet et al., 2013) garante a igualdade das taxas de extinção definidas em (2) ou com a probabilidade de não extinção como no lado esquerdo da equação (9). Assim, encontramos a fórmula para a taxa de extinção em tempo contínuo.

2.2 Estudo da função $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

Nós definimos

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

Proposição 1.

- Se $m \leq 0$ então $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$, então nós também temos $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$, então há um único $\alpha^* \in]0, 1[$ com $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

Prova. Se $v = (v_i)$ é um vetor,

- $v \geq 0$ se $v_i \geq 0$ por tudo i
- $v > 0$ se $v \geq 0$ e $v \neq 0$
- $v \gg 0$ se $v_i > 0$ por tudo i .

Usamos notações idênticas para as matrizes.

Vamos retomar o raciocínio da seção 9 de (Bacaër, 2016), mas com $R_0 < 1$ e não $R_0 > 1$. A matriz $Q + \alpha D$ é irredutível para todos os α porque a matriz Q é irredutível e a matriz D é diagonal. Então $\lambda_1(\alpha)$ é um autovalor simples da matriz $Q + \alpha D$,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1,$$

onde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar usual de vetores reais. $\lambda_1(\alpha)$ também é um autovalor simples da matriz transposta $Q^\top + \alpha D$,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^\top + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

A partir do teorema da perturbação de autovalores simples, sabemos que a função $\lambda_1(\alpha)$ é diferenciável e

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

Especialmente para $\alpha = 0$ nós temos $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$, $w_1(0) = u$, $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$ e

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

porque $R_0 < 1$.

Se $m \leq 0$, a função $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ está diminuindo porque $D \leq 0$. Agora considere o caso em que $m > 0$. Lembre-se disso $\lambda_1'(0) < 0$. A função $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ é convexa (Cohen, 1981). Então $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$ é uma função crescente. Além disso, se $\alpha \rightarrow +\infty$ nós temos $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$. A função $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ é, nesse caso, estritamente convexa, pois não é afim (Nussbaum, 1986). Portanto, há um único $\alpha^* > 0$ com $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$.

Portanto, existem três casos:

- Se $m \leq 0$ então $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$ então $\alpha^* \geq 1$ e $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ diminui ao longo do intervalo $[0, 1]$, ainda temos $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$ então $\alpha^* \in]0, 1[$ e $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

2.3 O caso de dois ambientes

Assumimos $K = 2$. Se $Q_{i,i} = -q_i$ para $i = 1, 2$ então

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

A equação característica $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ está escrito

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Essa relação entre ω e α descreve uma hipérbole no avião (ω, α) . Também pode ser escrito

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

Além disso, $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ é tal que

$$2\lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

e

$$2\lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Se $m \leq 0$ ou se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) \leq 0$ nós temos $\Lambda = \lambda_1(1)$. Se $m > 0$ e $\lambda_1'(1) > 0$, devemos ter $d_1 d_2 < 0$. Suponha que, neste caso, por exemplo, $d_1 > 0$ e $d_2 < 0$. Ao cancelar o discriminante de (13), descobrimos, após um pequeno cálculo, que

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Observe que $\Lambda = 0$ e $\alpha^* = 0$ se $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$, ou seja, se $R_0 = 1$.

3 A matriz truncada

Se $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$, então a equação principal é escrita $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$ onde \mathcal{M} é uma matriz infinita. Vamos cortar a matriz \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

com $S = A + B$. Nós definimos $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$.

Proposição 2. Para todos $N \geq 1$ nós temos $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$. A continuação (μ_N) portanto, tem um limite se $N \rightarrow +\infty$, nomeadamente ω_1 .

Prova. Uma matriz Metzler é uma matriz na qual todos os coeficientes fora da diagonal são ≥ 0 . A matriz $\mathcal{U}^{(N)}$ é uma matriz irreduzível de Metzler porque Q é irreduzível, $a_i > 0$ e $b_i > 0$ por tudo i . Podemos, portanto, usar os corolários do teorema de Perron e Frobenius em relação ao limite espectral das matrizes de Metzler; veja por exemplo (Nkague Nkamba, 2012, Teorema 30). Se $e = (1, \dots, 1)^T$ tão

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Porque $e \gg 0$, deduzimos que $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$. Então

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

μ_N é um autovalor da matriz $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

Vetor $\mathcal{W}^{(N)}$ é composto por N blocos de tamanho K , $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$. Considere o vetor

$$\widetilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 que é também de tamanho K . Então

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots \\ \dots & 0 \\ \dots & NA & Q - (N+1)S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ \dots \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Porque $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ nós temos $\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} > \mu_N \widetilde{\mathcal{W}}$. Porque $\widetilde{\mathcal{W}} > 0$, deduzimos que $\mu_{N+1} > \mu_N$.

Como valores numéricos, vamos dar

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

Então $u_1 = u_2 = 0,5$. O parâmetro a_1 varia, por exemplo, entre 2 e 5; esse limite superior corresponde a $R_0 = 1$. Para valores pequenos de N , geralmente até $N = 10^3$, software como o Scilab calcula todo o espectro da matriz $\mathcal{U}^{(N)}$. Caso contrário, calculamos o menor autovalor de $-\mathcal{U}^{(N)}$ e o vetor próprio correspondente por um método iterativo aplicado à matriz inversa. É possível tirar proveito da estrutura do bloco tridiagonal para a inversão a cada iteração (Artalejo et al., 2013). Com este algoritmo, podemos ir tão longe $N = 10^6$ sem muitos problemas.

A figura 1 mostra μ_N dependendo de a_1 para N fixo, mas grande. O algoritmo iterativo é interrompido quando duas estimativas consecutivas de μ_N diferem menos de 10^{-4} . A figura também mostra em linhas pontilhadas e de acordo com a_1 o número Λ dado pela fórmula (3), que é $\lambda_1(1)$ se $\lambda_1'(1) \leq 0$ e que é dado pela fórmula (14) quando $\lambda_1'(1) > 0$. Nós temos $\lambda_1'(1) < 0$ se $a_1 < a_1^*$ e $\lambda_1'(1) > 0$ se $a_1 > a_1^*$ com $a_1^* \simeq 3,2829$. O acordo entre Λ e o limite de (μ_N) parece provável. Entretanto, a convergência é extremamente lenta, talvez logarítmica, quando R_0 chega perto de 1, especialmente quando $a_1 > a_1^*$.

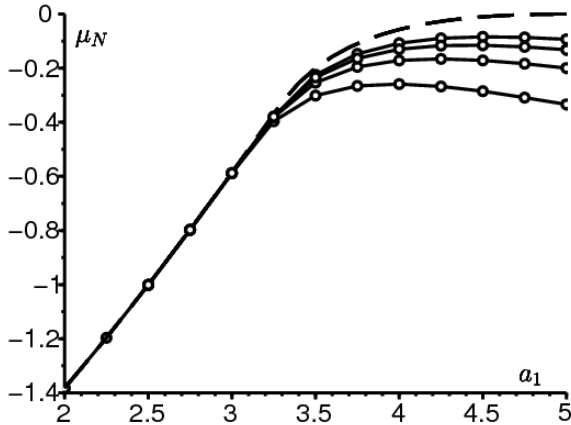


Figura 1. Linha pontilhada: Λ dada pela fórmula (3) em função de a_1 . Linhas contínuas com pontos: μ_N para $N = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 (de baixo para cima).

4 Autovetores e outros autovalores

Agora estamos interessados no limite $N \rightarrow \infty$ do vetor próprio associado a μ_N bem como para os outros autovalores e vetores. Nesse sentido, obteremos apenas resultados muito parciais.

4.1 Um sistema fuchsiano

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{C} é o conjunto de números complexos e $'$ o derivado em relação à variável x .

Proposição 3.

- Se temos a equação (4), com $\omega \in \mathbb{C}$ e $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$,
- se a série geradora (6) tiver um raio de convergência $\geq R$,

tão $G_i(x)$ é a solução do sistema (5) para $x \in \mathbb{C}$, $|x| < R$ e $1 \leq i \leq K$.

Prova. Nós temos

$$G_i'(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

Como no caso clássico com ambiente constante (Hillion, 1986), multiplicamos (4) por x^n . A soma de todos os $n \geq 0$ dá

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G_i'(x) + b_i G_i'(x) - (a_i + b_i)x G_i'(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Isso é equivalente a (5).

Notas.

- Observamos que (5) é um problema de autovalor para um sistema diferencial singular. Este sistema é do tipo Fuchs se $a_i \neq b_i$ por tudo i (Methée, 1959). O sistema tem uma singularidade em $x = 1$ e em $x = b_i/a_i$ para $1 \leq i \leq K$. Nós temos $b_i/a_i < 1$ se $a_i > b_i$. Nós também podemos escrever o sistema

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Um exemplo de uma equação diferencial escalar do tipo Fuchs da ordem 2 apareceu no estudo dos processos quadráticos de nascimento e morte em um ambiente constante (Picard, 1965).

4.2 Autovalores quando o raio de convergência é > 1

Proposição 4.

- Se temos a equação (4), com $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ e $\pi \neq 0$,
- se a série geradora (6) tiver um raio de convergência estritamente maior que 1,

então há um número inteiro $\nu \geq 0$ de tal modo que ω é um valor próprio da matriz $Q + D \nu$.

Prova. Vamos raciocinar pelo absurdo. Suponha que para tudo $\nu \geq 0$, ω não é um autovalor de $Q + \nu D$. As funções $G_i(x)$ são analíticas em um disco $|x| < R$ com $R > 1$. Se x convergir para 1 in (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Mas ω não é um autovalor de Q . Então $G_i(1) = 0$ por tudo i .

Let Ser um número inteiro $\nu \geq 1$. Por indução, suponha que tenhamos demonstrado $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$. Derivamos ν vezes a equação (5) em relação a x e usamos a fórmula de Leibniz para o produto de $(1-x)(a_i x - b_i)$ e $G_i^{(\nu)}(x)$. Nós temos

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

onde $\binom{\nu}{k}$ denota o coeficiente do binômio. O polinômio $(1-x)(a_i x - b_i)$ é de grau 2 em x . Somente expressões com $0 \leq k \leq 2$ são diferentes de zero na soma à esquerda:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

Fazemos x convergir para 1 e encontramos com a hipótese de indução

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

No entanto, ω não é um autovalor da matriz $Q + \nu D$. Então $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ por tudo i .

Então, mostramos que $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ por tudo i e para todos $\nu \geq 0$. Desde a função $G_i(x)$ é analítico, temos $G_i(x) = 0$ nas proximidades de $x = 1$ e até $G_i(x) = 0$ em todo o disco $|x| < R$ de acordo com o princípio da extensão analítica. Então $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$ por tudo $n \geq 0$ e $1 \leq i \leq K$. Isso contradiz a hipótese $\pi \neq 0$.

Notas.

- Os autovalores das matrizes $Q + \nu D$ não são necessariamente todos reais, de modo que o sistema (5) não é nem a teoria de Weyl e Kodaira (Dieudonné, 2003), nem o estudo de (Clayton, 2010) em certos quase-processos de nascimento e morte. Esses autovalores são, no entanto, todos reais quando $K = 2$. Porque o autovalores($Q + \nu D$) é muito real; o outro valor próprio também é real.
- Nas proximidades de $x = 1$, o sistema (16) pode ser gravado

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

Se $G(x)$ é o vetor $(G_i(x))$, o sistema tem a forma

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

com

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

e $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$. Se o raio de convergência da série $G_i(x)$ é > 1 , então $G_i(x)$ é analítico em um bairro de $x = 1$. Portanto, o sistema acima tem uma solução analítica em uma vizinhança de $x = 1$. De acordo com (Gantmacher, 1966, p. 155), existe um número inteiro $\nu \geq 0$ para o qual ν é um autovalor de Ω_{-1} . Então existe um vetor $w \neq 0$ com

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

Então

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

e ω é um autovalor de $Q + \nu D$. Foi isso que foi demonstrado elementarmente na Proposição 4.

Exemplo Tome os valores numéricos (15) com $a_1 = 2,5$. Nesse caso, temos $m < 0$. Para $N = 1000$, os primeiros vinte autovalores da matriz $\mathcal{M}^{(N)}$ são dados aproximadamente pela tabela a seguir:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

Agora, os autovalores de Q são 0 e -2, aqueles de $Q + D$ são -1 e -3,5, aqueles de $Q + 2D$ são -1,6972244 e -5,3027756, aqueles de $Q + 3D$ são -2,2877855 e -7,2122145, aqueles de $Q + 4D$ são -2,8377223 e -9,1622777 etc. Eles são encontrados bem na tabela acima. Em suma, parece que os autovalores de $\mathcal{M}^{(N)}$ convergir quando $N \rightarrow +\infty$ para os autovalores de matrizes $Q + \nu D$ para $\nu = 0, 1, 2, \dots$ e μ_N converge para $s(Q + D)$. Lembre-se que aqui $s(Q + D) = \Delta$ porque $m < 0$.

4.3 O caso em que $a_i < b_i$ por tudo i

Assumimos $m < 0$. Vamos procurar formalmente uma solução nas proximidades de $x = 1$ do sistema (5) da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \tag{17}$$

Nós temos

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

Nós temos $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Identificamos os coeficientes de $(1-x)^n$. Nós temos

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

por tudo $n \geq 0$. $c_{n-1,i}$ está ausente se $n = 0$. Com $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$, (17) é uma solução de (5) se

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Um primeiro tipo de solução é obtido escolhendo ω entre os autovalores de Q e c_0 um vetor próprio correspondente. A relação (18) permite calcular c_n para $n \geq 1$, desde que a matriz $Q + nD - \omega I$ é sempre invertível.

Um segundo tipo de solução é obtido escolhendo $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ com $\nu \geq 1$, ω um autovalor de $Q + \nu D$ e c_ν um vetor próprio associado. Então calculamos c_n para $n \geq \nu + 1$ com a equação (18), desde que a matriz $Q + nD - \omega I$ é sempre invertível.

Vamos dar em particular $\omega = s(Q + \nu D)$ com um inteiro $\nu \geq 0$. Porque $a_i < b_i$ por tudo i nós temos $D < 0$. Além disso, $Q + \nu D$ é irredutível. Portanto, para qualquer número inteiro $n > \nu$ nós temos

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

Então $s(Q + nD - \omega I) < 0$. A matriz $Q + nD - \omega I$ é uma matriz Metzler invertível e $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$. Nós temos

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$$

por tudo $n \geq 1$. Se $n \rightarrow +\infty$,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

tão

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

A série (17) é convergente para $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$. A série (17) para $1 \leq i \leq K$ estão todos convergindo para $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$.

4.4 Um raio de convergência igual a 1

Nas duas seções anteriores, discutimos os autovalores das matrizes $Q + \nu D$ para um número inteiro $\nu \geq 0$. No entanto (Bacaër e Ed-Darraz, 2014) já destacaram um exemplo em que $R_0 < 1$ mas onde o autovalor $s(Q + D)$ da matriz $Q + D$ é estritamente positivo: apenas tome $q_1 = q_2 = 1$, $a_1 = 2, 7$, $a_2 = 0, 8$, $b_1 = b_2 = 2$ (portanto $a_1 > b_1$) Nosso problema inicial não pode ter um autovalor positivo. Concluímos em particular que a série geradora $G_i(x)$ nem sempre têm um raio de convergência > 1 . A proposição a seguir vincula o comportamento de $G_i(x)$ perto de $x = 1$ com o parâmetro α .

Proposição 5.

- Se temos a equação (4), com $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ e $\pi \neq 0$,
- se a série geradora (6) tiver um raio de convergência igual a 1,
- se houver um número real $\alpha > 0$, um número inteiro $J \geq 0$ e funções analíticas $g_{i,j}(x)$ em um disco centrado em $x = 1$ com

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

- durante um intervalo $(1-\varepsilon, 1)$ com $\varepsilon > 0$,
- se o vetor $(g_{i,J}(1))$ não é zero

tão ω é um autovalor da matriz $Q + \alpha D$.

Prova. Nós temos

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ &\quad + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

$G_i(x)$ é a solução da equação (5) para $|x| < 1$. Dividimos por $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$. Nós temos

$$\begin{aligned} &\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ &\quad + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ &= \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x). \end{aligned}$$

Com $x \rightarrow 1$, nós obtemos

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

Então ω é um autovalor da matriz $Q + \alpha D$.

Nota A forma da função $G_i(x)$ na Proposição 5, que combina uma função de potência e um polinômio logarítmico, é o que se pode esperar de uma solução de um sistema de Fuchs nas proximidades de uma singularidade (Gantmacher, 1966, p. 159).

4.5 O caso em que $m > 0$ e $\lambda'_1(1) > 0$

Proposição 6. Assumimos: $m > 0$ e $\lambda'_1(1) > 0$. Nesse caso, $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ com $\alpha^* \in]0, 1[$. Assumimos: $\alpha > 0$ e $\omega = s(Q + \alpha D)$.

- Se temos a equação (4), com $\omega \in \mathbb{C}$ e $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- se a série geradora associada $G_i(x)$ tem um raio de convergência igual a 1
- se o $G_i(x)$ pode ser escrito em um intervalo $(1 - \varepsilon, 1)$ com $\varepsilon > 0$ no formulário

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

com $J \geq 1$ e um vetor $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ que não é zero,

tão $\alpha = \alpha^*$ e $\omega = \Lambda$.

Prova. De fato,

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

Nós temos $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Porque $G_i(x)$ é uma solução de (5) em $|x| < 1$ nós temos

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

Expressões em $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ e em $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ cada um deve cancelar:

$$\begin{aligned} \omega g_{i,j,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,j,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,j,0}, \\ \omega g_{i,j-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,j,0} + \alpha g_{i,j-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,j-1,0}. \end{aligned}$$

Nós definimos $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$. Nós temos

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

Porque $\omega = s(Q + \alpha D)$ e $\gamma_J \neq 0$, a primeira equação mostra que γ_J é um autovetor da matriz $Q + \alpha D$ associado ao autovalor $s(Q + \alpha D)$. Com as anotações da seção 2.2, deduzimos que há uma constante $\kappa \neq 0$ com $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$. Além disso, vemos que a segunda equação assume a forma

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

A matriz $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ tem um núcleo unidimensional, liderado por $w_1(\alpha)$. Ainda com as anotações da seção 2.2, a matriz transposta $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ tem um núcleo unidimensional, liderado por $v_1(\alpha)$. O produto escalar de (19) com $v_1(\alpha)$ dar

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

De acordo com (12), isso é equivalente a $\lambda'_1(\alpha) = 0$. Com $m > 0$ e $\lambda'_1(1) > 0$, isso implica que $\alpha = \alpha^*$. Então $\omega = \Lambda$.

5 Comportamento assintótico de vetores próprios

5.1 O caso em que $m < 0$

Vamos agora estudar o comportamento de n grande de um vetor próprio $(\pi_{n,i})$ associado ao autovalor ω_1 . Vamos tentar diretamente uma solução de (4) com

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Para n grandes, temos

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta} (1 + 1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} (1 - \delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

e

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

Então

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

para n grande. Vemos que as expressões em $\Pi^n/n^{\beta-1}$ em (4) dar

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

Então

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

Se $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ tomamos $\Pi = a_1/b_1$, $k_1 \neq 0$ e $k_i = 0$ se $i \neq 1$. Com $q_i = -Q_{i,i}$ expressões em Π^n/n^β em (4) são

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

Então

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

e

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

Deduzimos

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

Alternativamente, estudamos o sistema (5) nas proximidades de $x = b_1/a_1$. Nós temos

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

Para o autovalor ω_1 , podemos escolher o vetor próprio associado para que $\pi_{n,i} > 0$ para $n \geq 1$. Para toda a série $G_i(x)$, considere o ponto singular mais próximo de 0 no plano complexo. Esse ponto está no eixo $x > \theta$, de acordo com um teorema de A. Pringsheim (Queffélec e Zuily, 2013, p. 54). Segundo (Flajolet e Sedgewick, 2009), temos então

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1 + (\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$$

para $n \rightarrow +\infty$, para dentro de uma constante multiplicativa. Foi isso que descobrimos.

Exemplo numérico Veja o nosso exemplo numérico (15) novamente, com $a_1 = 2,5$. A Figura 2 mostra o comportamento assintótico do vetor próprio associado ao valor próprio μ_N para $N = 1000$. Aqui temos $\Lambda = -1$. Então nós temos $\beta = 1$ e $k_1/h_2 = 0,3$. A figura parece confirmar os resultados assintóticos obtidos, uma vez que o efeito de borda próximo a $n = N$ não deve ser levado em consideração.

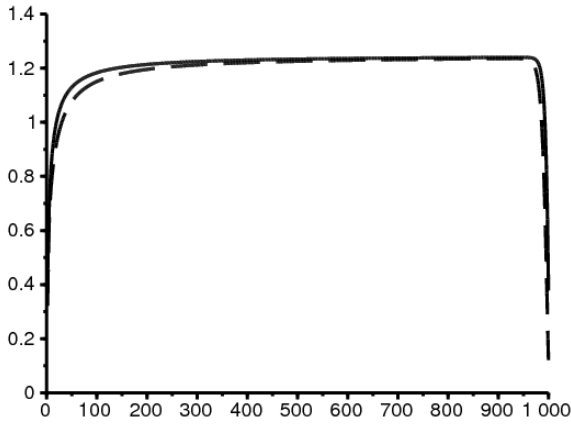


Figura 2. O caso $a_1 = 2,5$. Nós rastreamos $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (linha sólida) e $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (linha pontilhada) dependendo da n . Usamos a matriz truncada $\mathcal{M}^{(N)}$ com $N = 1000$.

5.2 Casos em que $m > 0$

Nós suspeitamos $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ onde $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$. Nos dois casos, as expressões dominantes em (4) dão

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (22)$$

Em outras palavras, ω é um autovalor da matriz $Q + (\beta - 1)D$. De fato, se estamos procurando uma solução da forma $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$, somos como em (20) com $\Pi = 1$. Quanto ao caso em que

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

nós temos

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n \pm 1, i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

o que novamente leva à equação (22). Isso sugere que $\beta = 1 + \alpha^*$ se $\lambda_1'(1) > 1$ e $\beta = 2$ se $\lambda_1'(1) \leq 0$. Nos dois casos, o raio de convergência de $G_i(x)$ seria igual a 1.

6 Volte ao caso particular em que $K = 2$

Podemos considerar a equação diferencial da ordem 2 satisfeita por $G_1(x)$ em vez do sistema diferencial de primeira ordem para $G_1(x)$ e $G_2(x)$. Nós temos

$$(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2) + (\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1 = 0.$$

Dividindo por $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$ decompondo a fração racional em elementos simples, obtemos

$$0 = \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1-\frac{b_1}{a_1})(1-\frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})}.$$

Suponha que os números $b_1/a_1, b_2/a_2$ e 1 são todos distintos. Reconhecemos uma equação diferencial da forma

$$\frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1-k_0-k'_0}{x-x_0} + \frac{1-k_1-k'_1}{x-x_1} + \frac{1-k_2-k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} + \frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0,$$

isto é, uma equação diferencial de Riemann (Roseau, 1997, p. 229) com três pontos singulares $x_0 = 1, x_1 = b_1/a_1$ e $x_2 = b_2/a_2$. Os expoentes característicos são respectivamente

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

com α_+ e α_- soluções de (13). O conjunto de soluções pode, portanto, ser escrito com a notação Riemann

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Segundo (Roseau, 1997, p. 229), pode-se escrever

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Nós definimos

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

Voltamos ao caso da equação diferencial hipergeométrica

$$y = \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

que se traduz em igualdade $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ entre relações anarmônicas. Então

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1-\mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

A função hipergeométrica é

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

com a notação $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$. Se x está na vizinhança de 1, a variável y está na vizinhança de 0. De acordo com a teoria da equação hipergeométrica diferencial, existem constantes κ_1 e κ_2 com

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A}-\mathcal{C}+1, \mathcal{B}-\mathcal{C}+1; 2-\mathcal{C}; y) \right],$$

desde que $\mathcal{C} \neq 1$, isto é, $\alpha_- \neq \alpha_+$. Soluções com um expositor fuchsiano α_+ em $x = 1$ corresponde a $\kappa_2 = 0$:

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

O caso $m < 0$

Assumimos, por exemplo, $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$. Tomamos $\alpha_+ = 1$ para a função própria associada a $\omega_1 = s(Q + D)$. Nós escolhemos κ_1 para que $G_1(0) = 1$. Então

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

de (13). Nós definimos

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

É o valor de x para o qual $y = -1$. Nós temos $1 < \xi < b_1/a_1$. A variável y diminui se $0 < x < \xi$ de

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) / \left(\frac{b_2}{a_2} - 1 \right) \in]0, 1[$$

até -1. Se $\xi < x < b_1/a_1$, a expressão (23) deve ser substituída

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

que é a expressão (18) do §182 de (C. Jordan, 1896), na qual o argumento $\frac{y}{y-1}$ cresce de 1/2 a 1.

Veja o nosso exemplo numérico (15) novamente, com $a_1 = 2,5$. A Figura 3 mostra as funções de geração $G_1(x)$ e $G_2(x)$ construído com o vetor próprio associado a μ_N . Aqui $N = 4000$ com padronização $G_1(0) = 1$. Usamos o método Horner para avaliar as séries geradoras. Nós os comparamos com as fórmulas (23) e (24). Aqui temos $\xi \approx 1,105$. O fator multiplicativo de normalização foi escolhido para que as funções obtidas pelos dois métodos sejam sobrepostas.

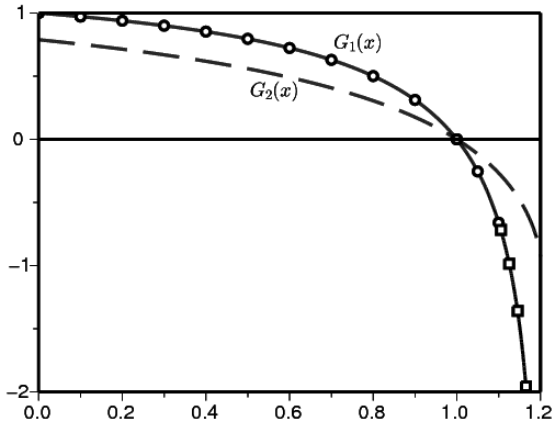


Figura 3. O caso $a_1 = 2,5$. Nós rastreamos as funções geradoras $G_1(x)$ (linha sólida) e $G_2(x)$ (linha pontilhada) em função de x . Utiliza-se para o cálculo a matriz $\mathcal{M}^{(N)}$ com $N = 4000$. As fórmulas (23) e (24) para $G_1(x)$ são representados por pequenos círculos e quadrados.

O caso $m > 0$ e $\lambda'_1(1) \leq 0$

Assumimos, por exemplo, $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$. Nós temos agora

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

A expressão (23) não é mais adequada porque a variável y diverge em $x = b_1/a_1 < 1$. Para $0 < x < \xi$, y^{-1} diminui em um número entre 0 e 1 a -1. Assumimos neste intervalo a expressão (32) de (C. Jordan, 1896, §182),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-\mathcal{A}} F(\mathcal{A}, \mathcal{A} + 1 - \mathcal{C}; \mathcal{A} + 1 - \mathcal{B}; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A} + 1 - \mathcal{C}; \mathcal{A} + 1 - \mathcal{B}; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

com $\alpha_+ = 1$, $\omega_1 = s(Q + D)$ e κ_1 para que $G_1(0) = 1$. No entanto, durante o intervalo $\xi < x < 1$, tomamos a expressão (34) de (C. Jordan, 1896, §182), na qual o argumento $(1-y)^{-1}$ aumenta de 1/2 para 1:

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\
&= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}).
\end{aligned} \tag{26}$$

Veja o nosso exemplo numérico (15) novamente, com $a_1 = 3,2$. A Figura 4 mostra as fórmulas (25) e (26). Eles coincidem bem com a função geradora construída com o vetor próprio. Aqui temos $\xi \simeq 0,97$.

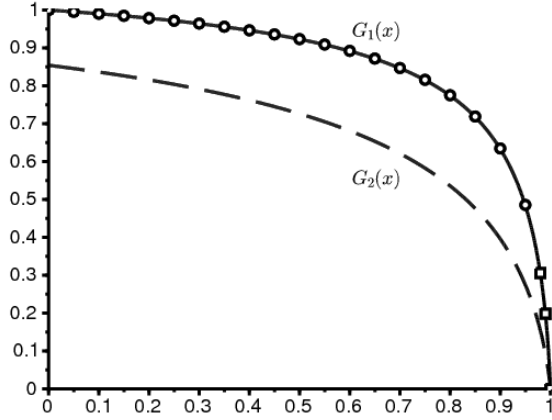


Figura 4. O caso em que $a_1 = 3,2$. Comparação das fórmulas (25) [círculos pequenos] e (26) [quadrados pequenos] para $G_1(x)$ com a função geradora do vetor próprio associado a μ_N (linha sólida), com $N = 10^4$.

O caso $m > 0$ e $\lambda'_1(1) > 0$

As expressões (25) e (26) provavelmente não são mais válidas, mesmo que $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$. Eles devem ser substituídos por expressões que contenham um termo logarítmico. Se $a_1 = 3,5$ nós temos $\Lambda = -0,2$ e $\alpha^* = 0,6$ de acordo com as fórmulas (14). Não foi possível obter um gráfico sugestivo neste caso.

7 A cadeia de Markov incluída

Para um processo de conexão subcrítica Z_n ($n = 0, 1, \dots$) em um ambiente aleatório com ambientes independentes distribuídos de forma idêntica, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \tag{27}$$

onde $f(x)$ denota a função geradora (Dekking, 1988; Geiger et al., 2003). Seja μ o mínimo no lado direito de (27). No caso "fracamente subcrítico", em que

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

nós temos

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

por uma constante $c > 0$. No caso "altamente subcrítico", em que

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

nós temos $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ e

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

por uma constante $c > 0$. O processo é subcrítico se $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$.

Vamos voltar ao nosso processo de nascimento e morte. Nos limitamos ao caso particular de dois ambientes: $K = 2$. Nós definimos

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

Se $a_i \neq b_i$, é a função geradora do número de indivíduos após um tempo t a partir de um indivíduo no tempo 0 no ambiente i (Hillion, 1986). De qualquer forma,

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

Depois de um tempo t_1 , o ambiente muda do estado 1 para o estado 2. Depois de um tempo t_2 , o ambiente volta ao estado 1. As densidades de probabilidade associadas são $q_1 e^{-q_1 t_1}$ e $q_2 e^{-q_2 t_2}$. Considere então a cadeia Markov incluída Z_n ($n = 0, 1, \dots$) olhando apenas para a mudança entre o tempo 0 e o tempo $t_1 + t_2$. Vamos chamar de geração. A função geradora é

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

Em particular, $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$. Esse processo de ramificação é subcrítico. De fato, temos

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

porque $R_0 < 1$. O processo de conexão é altamente subcrítico quando

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Nesse caso, temos

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Observe que se $d_1 < 0$ e $d_2 < 0$, o processo é fortemente subcrítico. No caso fracamente subcrítico, temos

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

e um pouco de cálculo mostra

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2}\right)^2}.$$

Observe que esse número é < 1 se e somente se $R_0 < 1$.

Para nosso exemplo numérico, a fórmula (28) mostra que a cadeia de Markov incluída é fortemente subcrítica quando $a_1 < 3,4$. Curiosamente, esse limiar difere daquele que separa os casos $\Lambda = s(Q + D)$ e $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ com $0 < \alpha^* < 1$ para o processo linear de nascimento e morte. Esse último limite foi $\simeq 3,2829$ da Seção 3. No entanto, a taxa na qual a cadeia de Markov incluída converge para a extinção tem pouco a ver com a taxa na qual o processo contínuo de tempo faz o mesmo.

8 Conclusão

Muitos pontos ainda precisam ser esclarecidos sobre o comportamento dos valores próprios e dos vetores próprios. Entre as possíveis generalizações, pode-se pensar que se os coeficientes a_i , b_i e $Q_{i,j}$ são funções T -periódico de tempo t então ω_1 será igual a $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ onde $f(\cdot)$ designa o expoente Floquet dominante e substitui o limite espectral.

Agradecimentos

Agradecemos a Vincent Bansaye, Anne Duval e Bruno Sericola por seus comentários e sugestões.

Referências

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D'Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Probab* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) Éléments d'analyse, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) Analytic combinatorics. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) Théorie des matrices, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire. *Ann I H Poincaré-Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) Les théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) Cours d'analyse de l'École polytechnique, tome 3. Gauthier-Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuily C (2013) Analyse pour l'agrégation, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications. Lavoisier, Paris