

Over de subkritische lineaire processen van geboorte en dood in een willekeurige omgeving

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk
nicolas.bacaer@ird.fr

Overzicht

We verkrijgen een expliciete formule voor het uitsterven van lineaire subkritische geboorte- en doodprocessen in een willekeurige omgeving. Deze formule wordt geïllustreerd door de eigenwaarde van het grootste reële deel numeriek te berekenen voor de afgeknotte matrix van de hoofdvergelijking. De genererende functie van de bijbehorende eigenvector controleert een enkelvoudig systeem van Fuchs-type differentiaalvergelijkingen. Bijzondere aandacht wordt besteed aan het geval van twee omgevingen, wat leidt tot een Riemann-differentiaalvergelijking.

1 Inleiding

Stel dat de omgeving oscilleert tussen een eindig aantal K staten ($K \geq 2$) na een homogene continue Markov-keten. $Q = (Q_{i,j})$ is de matrix waarvan de transponering de oneindig kleine generator van deze ketting is:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

We nemen aan dat de matrix Q onherleidbaar is. Er is een enkele vector $u = (u_i)$ met

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013, p.152).

Het aantal individuen dat evolueert in deze willekeurige omgeving is n . In de omgeving ik ($1 \leq i \leq K$), stel dat we een lineair proces van geboorte en dood van parameters hebben

- $n a_i$ voor geboorten
- $n b_i$ voor de doden,

met $a_i > 0$ en $b_i > 0$. Met andere woorden, gedurende een oneindig klein tijdsinterval dt ,

- met een waarschijnlijkheid $a_i dt$, elk individu baart een nieuw individu,
- elk individu sterft met een waarschijnlijkheid $b_i dt$.

Stel dat er op het moment $t = 0$ is n_0 individuen ($n_0 \geq 1$) en het milieu is i_0 . De kans om n individuen in omgeving i te hebben op tijdstip t is $p_{n,i}(t)$. Dus we hebben $p_{n,i}(0) = 1$ als $(n, i) = (n_0, i_0)$ en $p_{n,i}(0) = 0$ anders. De belangrijkste vergelijking is

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

voor $n \geq 0$ en $1 \leq i \leq K$. Maar $p_{n-1,i}$ is afwezig voor $n = 0$. Zoals (Lotka, 1939), laten we definiëren

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

Dat zullen we altijd aannemen $R_0 < 1$: de bevolking gaat vrijwel zeker uit (Cogburn en Torrez, 1981; Bacaër en Ed-Darraz, 2014). Het is het subkritische regime. Als $t \rightarrow +\infty$, men heeft

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

Het uitstervingspercentage bestaat en is niet afhankelijk van $n \geq 1$ of i

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet et al., 2013, paragraaf 4.5). Het hangt ook niet af van de oorspronkelijke toestand (n_0, i_0) . Het probleem is om dit tarief expliciet te bepalen.

We gebruiken enkele notaties:

- $\Re(\cdot)$ is het echte deel van een complex getal
- $\sigma(M)$ is het spectrum van een matrix M .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ is de spectrale grens
- A is de diagonale matrix $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$.

Wanneer de matrix M coëfficiënten heeft buiten de diagonaal die positief of nul zijn, wat altijd het geval zal zijn hieronder, volgt uit de stelling van Perron en Frobenius dat $s(M)$ Ook een eigenwaarde van M .

In sectie 2 gebruiken we een resultaat van (D'Souza en Hambly, 1997) over vertakkingsprocessen in een willekeurige omgeving om aan te tonen dat

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

We bestuderen ook de variaties van de functie $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ en de afgeleide $\lambda_1'(\alpha)$, wat leidt tot het onderscheiden van drie gevallen:

- degene waar $m = \max_i (a_i - b_i) \leq 0$;
- degene waar $m > 0$ en $\lambda_1'(1) \leq 0$;
- degene waar $m > 0$ en $\lambda_1'(1) > 0$.

In de eerste twee gevallen wordt het minimum Λ in het interval $[0,1]$ bereikt op $\alpha = 1$, zodat $\omega_1 = s(Q + D)$.

In sectie 3 zien we dat de spectrale grens μ_N van de afgeknotte matrix van de hoofdvergelijking vormt een toenemende volgorde. Vervolgens rekenen we numeriek μ_N in een reeks voorbeelden. We merken met name de traagheid op, ongetwijfeld logaritmisch, waarmee μ_N convergeert naar ω_1 in het derde hierboven genoemde geval.

Vanaf paragraaf 4 zijn we geïnteresseerd in de andere eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren, waarvoor we slechts zeer gedeeltelijke resultaten behalen. We transformeren eerst het eigenwaardeprobleem

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

in een enkelvoudig differentieel systeem van het Fuchs-type (Methée, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

voor de generatorfunctie

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

Als de eigenvector $(\pi_{n,i})$ daalt geometrisch ten opzichte van n , dan is de eigenwaarde ω noodzakelijkerwijs gelijk aan de eigenwaarde van een matrix $Q + \nu D$ met geheel getal $\nu \geq 0$. Als $m < 0$ en $\omega = s(Q + \nu D)$, bouwen we eigenlijk analytische oplossingen van het systeem (5) in de buurt van $x = 1$. De karakteristieke vergelijking van het Fuchsiaanse systeem is

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

met andere woorden, ω is een eigenwaarde van de matrix $Q + \alpha D$. Deze karakteristieke vergelijking wordt verkregen door oplossingen te zoeken die zich gedragen als $(1-x)^\alpha$ in de buurt van $x = 1$.

Laten we het derde geval bestuderen: de functie $\lambda_1(\alpha)$ bereikt zijn minimum binnenin $]0, 1[$. Als

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- de ontwikkeling van $G_i(x)$ in de buurt van $x = 1$ bevat een logaritmische term,

dus $\alpha = \alpha^*$ en $\omega = \Lambda$. Bovendien verschijnen in de Fuchs-theorie de logaritmische termen wanneer de karakteristieke vergelijking (7) een dubbele wortel heeft, in het bijzonder de tak $\omega = s(Q + \alpha D)$. Vanwege de convexiteit van de functie $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$, dit gebeurt alleen voor $\omega = \Lambda$.

In paragraaf 5 bestuderen we direct het asymptotische gedrag van de limiet eigenvector $\pi = (\pi_{n,i})$ geassocieerd met ω_1 . Sectie 6 legt de link wanneer $K = 2$ met een Riemann differentiaalvergelijking. In paragraaf 7 zijn we geïnteresseerd in de Markov-keten, deze laatste valt in het kader van het werk van (Dekking, 1988) en (Geiger et al., 2003). We merken op dat de drempel tussen de zwak en sterk subkritische regimes niet dezelfde is als die waar $\Lambda \neq s(Q + D)$.

Om ons probleem beter te situeren in relatie tot sommige andere werken, merken we op dat het systeem (1) een "niet-homogeen proces van quasi geboorte en dood" is; zie bijvoorbeeld (Sericola, 2013, p. 350) of (Latouche en Ramaswami, 1999, hoofdstuk 12), die de stationaire distributie bespreken, maar niet de mate van convergentie ernaar. Verder in een constante omgeving met

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

men heeft $D = (a - b)I$, waar I is de identiteitsmatrix. Dus $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ en formule (3) geeft $\omega_1 = a - b$. Dit is bekend ofwel door directe berekening (Hillion, 1986, hoofdstuk V), of als een speciaal geval van de resultaten van Karlin en McGregor op de geboorte- en doodprocessen (Collet et al., 2013, sectie 5.9.2). De generalisaties van deze laatste resultaten naar de 'quasi-processen van geboorte en dood' (Clayton, 2010) hebben alleen betrekking op gevallen waarin het 'spectrum' echt is. Dit is over het algemeen niet het geval in ons model. Ten slotte grijpt model (1) in als linearisatie van bepaalde niet-lineaire populatiemodellen, en met name epidemische modellen (Bacaër, 2016).

2 De formule voor het uitstervingspercentage

2.1 Tijdsdiscretie van de omgeving en doorgang tot het uiterste

M^T is de transpositie van een matrix M (of van een vector). We kiezen een kleine stap in de tijd $\delta > 0$. De matrix

$$P = e^{Q^T \delta}$$

is de matrix van een Markov-keten in discrete tijd. Men heeft $P_{i,j} > 0$ voor alles i en j aangezien de matrix Q onherleidbaar is. De omgeving blijft gedurende een tijdsstap δ geblokkeerd in toestand i . Dan springt de omgeving met een waarschijnlijkheid naar staat j $P_{i,j}$. In het tijdsinterval δ volgt de populatie een lineair proces van geboorte en dood van parameters $n a_i$ en $n b_i$ als de omgeving zich in staat i bevindt. Een individu genereert dus gemiddeld

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

individuen. Men heeft $0 < m_i < +\infty$. We zitten dus in het kader van een vertakkingsproces in een Markov-omgeving. Enkele notaties:

- Als $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ is een opeenvolging van k doorkruiste omgevingen,

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- Voor $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

waar $\mathbb{E}(\cdot)$ geeft wiskundige verwachting aan

- Z_k is de grootte van de populatie aan het einde van k - groottestap δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$ de matrix gegeven door $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \operatorname{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$: de spectrale straal van de positieve matrix $\Sigma(\alpha)$.

Dus $\mathbb{P}(Z_k > 0)$ is de kans dat de populatie niet zal uitsterven. Corollary 1.8 van (D'Souza en Hambly, 1997) laat dat zien

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

In ons geval de verwachting van $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ wordt expliciet berekend:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

Uit (8) en (10) volgt dat

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

Het is ook een analytische functie van α omdat $\rho(\Sigma(\alpha))$ is een simpele eigenwaarde van de positieve matrix $\Sigma(\alpha)$. De limiet (9) is daarom gelijk aan $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Het uitstervingspercentage ω in continue tijd is daarom

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

Laten we in het bijzonder nemen $\delta = 1/h$ met een geheel getal $h \geq 1$. Dus $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$. Maar

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

van de formule van Sophus Lie. De spectrale straal is een continue functie, we hebben

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Omdat $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$, concluderen we dat

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Ten slotte verzekert Propositie 4.12 van (Collet et al., 2013) de gelijkheid van uitstervingspercentages gedefinieerd met (2) of met de kans op niet-uitsterven zoals in de linkerkant van vergelijking (9). We vonden dus de formule voor de snelheid van uitsterven in continue tijd.

2.2 Studie van de functie $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

We definiëren

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

Stelling 1 .

- Als $m \leq 0$, dus $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Als $m > 0$ en $\lambda_1'(1) \leq 0$, dan hebben we ook $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Als $m > 0$ en $\lambda_1'(1) > 0$, dan is er een uniek $\alpha^* \in]0, 1[$ met $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

Bewijs . Als $v = (v_i)$ is een vector,

- $v \geq 0$ als $v_i \geq 0$ voor alles i
- $v > 0$ als $v \geq 0$ en $v \neq 0$
- $v \gg 0$ als $v_i > 0$ voor alles i .

We gebruiken identieke notaties voor de matrices.

Laten we terugkeren naar de redenering van sectie 9 van (Bacaër, 2016) maar met $R_0 < 1$ en niet $R_0 > 1$. De matrix $Q + \alpha D$ is onherleidbaar voor alle α omdat de matrix Q onherleidbaar is en de matrix D diagonaal. Dus $\lambda_1(\alpha)$ is een simpele eigenwaarde van de matrix $Q + \alpha D$,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1,$$

waar $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ duidt het gebruikelijke scalaire product van echte vectoren aan. $\lambda_1(\alpha)$ is ook een simpele eigenwaarde van de getransponeerde matrix $Q^\top + \alpha D$,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^\top + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

Uit de eenvoudige eigenwaarde verstoringsstelling, weten we dat de functie $\lambda_1(\alpha)$ is differentieerbaar en

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

Speciaal voor $\alpha = 0$, men heeft $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$, $w_1(0) = u$, $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$ en

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, Du \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i)u_i < 0$$

omdat $R_0 < 1$.

Als $m \leq 0$, de functie $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ neemt af omdat $D \leq 0$. Overweeg nu het geval waar $m > 0$. Onthoud dat $\lambda_1'(0) < 0$. De functie $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ is convex (Cohen, 1981). Dus $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$ is een toenemende functie. Bovendien, als $\alpha \rightarrow +\infty$, men heeft $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$. De functie $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ is in dit geval strikt convex omdat het niet affiniteit heeft (Nussbaum, 1986). Er is dus een uniek $\alpha^* > 0$ met $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$.

Er zijn dus drie gevallen:

- Als $m \leq 0$, dus $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Als $m > 0$ en $\lambda_1'(1) \leq 0$, dus $\alpha^* \geq 1$ en $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ afneemt over het interval $[0, 1]$, dus we hebben nog steeds $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Als $m > 0$ en $\lambda_1'(1) > 0$, dus $\alpha^* \in]0, 1[$ en $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

2.3 Het geval van twee omgevingen

We nemen aan $K = 2$. Als $Q_{i,i} = -q_i$ voor $i = 1, 2$, dus

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

De karakteristieke vergelijking $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ is geschreven

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Deze relatie tussen ω en α beschrijft een hyperbool in het vliegtuig (ω, α) . Het kan ook worden geschreven

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

Bovendien $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ is dat

$$2 \lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

en

$$2 \lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Als $m \leq 0$, of als $m > 0$ en $\lambda_1'(1) \leq 0$, men heeft $\Lambda = \lambda_1(1)$. Als $m > 0$ en $\lambda_1'(1) > 0$, we moeten hebben $d_1 d_2 < 0$. Stel in dit geval bijvoorbeeld dat $d_1 > 0$ en $d_2 < 0$. Door de discriminant van (13) te schrappen, vinden we na een kleine berekening dat

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Merk dat op $\Lambda = 0$ en $\alpha^* = 0$ als $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$, d.w.z. als $R_0 = 1$.

3 De afgeknotte matrix

Als $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^\top$, dan wordt de hoofdvergelijking geschreven $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$, waar \mathcal{M} is een oneindige matrix. Laten we de matrix knippen \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

met $S = A + B$. We definiëren $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$.

Stelling 2. Voor iedereen $N \geq 1$, men heeft $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$. Het vervolg (μ_N) heeft daarom een limiet als $N \rightarrow +\infty$ namelijk ω_1 .

Bewijs. Een Metzler-matrix is een matrix waarin alle coëfficiënten buiten de diagonaal ≥ 0 zijn. De matrix $\mathcal{U}^{(N)}$ is een onherleidbare Metzler-matrix omdat Q onherleidbaar is, $a_i > 0$ en $b_i > 0$ voor alles i . We kunnen daarom de consequenties gebruiken van de stelling van Perron en Frobenius met betrekking tot de spectrale grens van Metzler-matrices; zie bijvoorbeeld (Nkague Nkamba, 2012, Stelling 30). Alsoe $e = (1, \dots, 1)^\top$ dus

$$(\mathcal{U}^{(N)})^\top e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Omdat $e \gg 0$, leiden we dat af $s((\mathcal{U}^{(N)})^\top) < 0$. Dus

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^\top) < 0.$$

μ_N is een eigenwaarde van de matrix $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

Vector $\mathcal{W}^{(N)}$ is samengesteld uit N blokken van maat K , $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$. Overweeg de vector

$$\widetilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 die ook de grootte K . Dus

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{U}^{(N)} & \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \dots & \begin{array}{c} NA \\ Q - (N+1)S \end{array} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

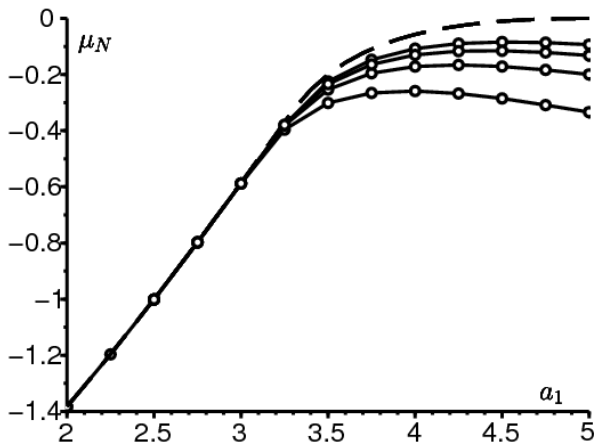
Omdat $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$, men heeft $\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} > \mu_N \widetilde{\mathcal{W}}$. Omdat $\widetilde{\mathcal{W}} > 0$, leiden we dat af $\mu_{N+1} > \mu_N$.

Laten we als numerieke waarden nemen

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

Dus $u_1 = u_2 = 0,5$. De parameter a_1 varieert bijvoorbeeld tussen 2 en 5; deze bovengrens komt overeen met $R_0 = 1$. Voor kleine waarden van N , meestal tot $N = 10^3$, software zoals Scilab berekent het volledige spectrum van de matrix $\mathcal{U}^{(N)}$. Anders berekenen we de kleinste eigenwaarde van $-\mathcal{U}^{(N)}$ en de bijbehorende eigenvector door een iteratieve methode toegepast op de inverse matrix. Men profiteert van de tridiagonale blokstructuur voor de inversie bij elke iteratie (Artalejo et al., 2013). Met dit algoritme kunnen we zo ver gaan $N = 10^6$ zonder al te veel problemen.

Figuur 1 laat zien μ_N afhankelijk van a_1 voor N vast maar groot. Het iteratieve algoritme wordt gestopt wanneer twee opeenvolgende schattingen van μ_N verschillen minder dan 10^{-4} . De figuur is ook weergegeven in stippellijnen en volgens a_1 het getal Λ gegeven door formule (3), dat is $\lambda_1(1)$ als $\lambda'_1(1) \leq 0$ en die wordt gegeven door formule (14) wanneer $\lambda'_1(1) > 0$. Men heeft $\lambda'_1(1) < 0$ als $a_1 < a_1^*$ en $\lambda'_1(1) > 0$ als $a_1 > a_1^*$, met $a_1^* \simeq 3,2829$. De overeenkomst tussen Λ en de limiet van (μ_N) lijkt waarschijnlijk. Convergentie is echter extreem traag, misschien logaritmisch, wanneer R_0 komt dicht bij 1, vooral wanneer $a_1 > a_1^*$.



Figuur 1. Gestippelde lijn: Λ gegeven door formule (3) als functie van a_1 . Doorlopende lijnen met stippen: μ_N voor $N = 10^3, 10^4, 10^5$ en 10^6 (van onder naar boven).

4 Eigenvectoren en andere eigenwaarden

We zijn nu geïnteresseerd in de limiet $N \rightarrow \infty$ van de eigenvector geassocieerd met μ_N evenals naar de andere eigenwaarden en vectoren. In dit opzicht zullen we slechts zeer gedeeltelijke resultaten behalen.

4.1 Een Fuchsiaans systeem

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{C} is de verzameling van complexe getallen en ' de afgeleide met betrekking tot de variabele x .

Stelling 3.

- Als we vergelijking (4) hebben, met $\omega \in \mathbb{C}$ en $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$,
- als de genererende serie (6) een convergentiestraal $\geq R$ heeft,

dus $G_i(x)$ is oplossing van het systeem (5) voor $x \in \mathbb{C}$, $|x| < R$ en $1 \leq i \leq K$.

Bewijs. Men heeft

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

Net als in het klassieke geval met constante omgeving (Hillion, 1986), vermenigvuldigen we (4) met x^n . De som van alle $n \geq 0$ geeft

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i)x G'_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Dit komt overeen met (5).

Opmerkingen.

- We merken op dat (5) een probleem is van de eigenwaarde voor een enkelvoudig differentieel systeem. Dit systeem is van het type Fuchs als $a_i \neq b_i$ voor alles i (Methé, 1959). Het systeem heeft een bijzonderheid in $x = 1$ en in $x = b_i/a_i$ voor $1 \leq i \leq K$. Men heeft $b_i/a_i < 1$ als $a_i > b_i$. We kunnen ook het systeem schrijven

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Een voorbeeld van een Fuchs-type scalaire differentiaalvergelijking van orde 2 verscheen in de studie van kwadratische geboorte- en doodsprocessen in een constante omgeving (Picard, 1965).

4.2 Eigenwaarden wanneer de convergentiestraal > 1 is

Stelling 4 .

- Als we vergelijking (4) hebben, met $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ en $\pi \neq 0$,
- als de genererende series (6) een convergentiestraal hebben die strikt groter is dan 1,

dan is er een geheel getal $\nu \geq 0$ zodat ω een eigenwaarde van de matrix $Q + \nu D$.

Bewijs . Laten we redeneren door het absurde. Stel dat voor alles $\nu \geq 0$, ω is geen eigenwaarde van $Q + \nu D$. De functies $G_i(x)$ zijn analytisch op een schijf $|x| < R$ met $R > 1$. Als x convergeert naar 1 in (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Maar ω is geen eigenwaarde van Q . Dus $G_i(1) = 0$ voor alles i .

Laat een geheel getal zijn $\nu \geq 1$. Stel dat we door inductie hebben aangetoond $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$. We leiden ν keer vergelijking (5) af met betrekking tot x en we gebruiken de formule van Leibniz voor het product van $(1-x)(a_i x - b_i)$ en $G_i^{(\nu)}(x)$. Men heeft

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

waar $\binom{\nu}{k}$ geeft de coëfficiënt van de binominale aan. De polynoom $(1-x)(a_i x - b_i)$ is van graad 2 in x . Alleen uitdrukkingen met $0 \leq k \leq 2$ zijn niet nul in de som aan de linkerkant:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu [a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu (\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

We laten x convergeren naar 1 en vinden we met de inductiehypothese

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

Echter ω geen eigenwaarde van de matrix $Q + \nu D$. Dus $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ voor alles i .

Dat hebben we dus laten zien $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ voor alles i en voor iedereen $\nu \geq 0$. Aangezien de functie $G_i(x)$ is analytisch, we hebben $G_i(x) = 0$ in de buurt van $x = 1$, en zelfs $G_i(x) = 0$ over de hele schijf $|x| < R$ volgens het principe van analytische extensie. Dus $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$ voor alles $n \geq 0$ en $1 \leq i \leq K$. Dit is in tegenspraak met de hypothese $\pi \neq 0$.

Opmerkingen.

- De eigenwaarden van de matrices $Q + \nu D$ zijn niet noodzakelijkerwijs allemaal reëel, zodat het systeem (5) niet onder de theorie van Weyl en Kodaira valt (Dieudonné, 2003) of de studie van (Clayton, 2010) over bepaalde quasi-processen van geboorte en dood. Deze eigenwaarden zijn echter allemaal reëel wanneer $K = 2$. Omdat de eigenwaardes $(Q + \nu D)$ is heel echt; de andere eigenwaarde is ook echt.
- In de omgeving van $x = 1$ kan het systeem (16) worden geschreven

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

Als $G(x)$ is de vector $(G_i(x))$, het systeem is van het formulier

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

met

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

en $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$. Als de convergentie straal van de serie $G_i(x)$ is > 1 , dan is $G_i(x)$ is analytisch in een wijk van $x = 1$. Bovenstaand systeem heeft dus een analytische oplossing in een buurt van $x = 1$. Volgens (Gantmacher, 1966, p. 155) bestaat er een geheel getal $\nu \geq 0$ waarvoor ν een eigenwaarde is van Ω_{-1} . Er is dus een vector $w \neq 0$ met

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

Dus

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

en ω is een eigenwaarde van $Q + \nu D$. Dit is elementair aangetoond in Propositie 4.

Voorbeeld. Neem de numerieke waarden (15) mee $a_1 = 2,5$. In dit geval hebben we $m < 0$. Voor $N = 1000$, de eerste twintig eigenwaarden van de matrix $\mathcal{M}^{(N)}$ worden ruwweg gegeven door de volgende tabel:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

Nu de eigenwaarden van Q zijn 0 en -2 , die van $Q + D$ zijn -1 en $-3,5$, die van $Q + 2D$ zijn $-1,6972244$ en $-5,3027756$, die van $Q + 3D$ zijn $-2,2877855$ en $-7,2122145$, die van $Q + 4D$ zijn $-2,8377223$ en $-9,1622777$, enz. Ze zijn goed te vinden in de bovenstaande tabel. Kortom, het lijkt erop dat de eigenwaarden van $\mathcal{M}^{(N)}$ convergeren wanneer $N \rightarrow +\infty$ naar de eigenwaarden van matrices $Q + \nu D$ voor $\nu = 0, 1, 2, \dots$ en μ_N convergeert naar $s(Q + D)$. Onthoud dat hier $s(Q + D) = \Lambda$ omdat $m < 0$.

4.3 Het geval waar $a_i < b_i$ voor alles i

We nemen aan $m < 0$. Laten we formeel een oplossing zoeken in de buurt van $x = 1$ van het systeem (5) van het formulier

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \quad (17)$$

Men heeft

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i} (1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} (1-x)^n.$$

Men heeft $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. We identificeren de coëfficiënten van $(1-x)^n$. We krijgen

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

voor alles $n \geq 0$. $c_{n-1,i}$ is afwezig als $n = 0$. Met $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$, (17) is een oplossing van (5) als

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Door te kiezen wordt een eerste type oplossing verkregen ω tussen de eigenwaarden van Q en c_0 een bijbehorende eigenvector. De relatie (18) maakt het mogelijk om te berekenen c_n voor $n \geq 1$, op voorwaarde dat de matrix $Q + nD - \omega I$ is altijd omkeerbaar.

Door te kiezen wordt een tweede type oplossing verkregen $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ met $\nu \geq 1$, ω een eigenwaarde van $Q + \nu D$ en c_ν een bijbehorende eigenvector. Vervolgens berekenen we c_n voor $n \geq \nu + 1$ met vergelijking (18), op voorwaarde dat de matrix $Q + nD - \omega I$ is altijd omkeerbaar.

Laten we in het bijzonder nemen $\omega = s(Q + \nu D)$ met een geheel getal $\nu \geq 0$. Omdat $a_i < b_i$ voor alles i , men heeft $D < 0$. Bovendien $Q + \nu D$ is onherleidbaar. Dus voor een heel getal $n > \nu$, men heeft

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

Dus $s(Q + nD - \omega I) < 0$. De matrix $Q + nD - \omega I$ is een inverteerbare Metzler-matrix en $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$. Men heeft

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$$

voor alles $n \geq 1$. Als $n \rightarrow +\infty$,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

dus

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

De serie (17) komt overeen met $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$. De serie (17) voor $1 \leq i \leq K$ komen allemaal samen voor $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$.

4.4 Een convergentieradius gelijk aan 1

In de twee vorige secties hebben we de eigenwaarden van de matrices $Q + \nu D$ besproken voor een geheel getal $\nu \geq 0$. Echter (Bacaër en Ed-Darraz, 2014) hebben al een voorbeeld belicht waar $R_0 < 1$ maar waar de eigenwaarde $s(Q + D)$ van de matrix $Q + D$ is strikt positief: neem gewoon $q_1 = q_2 = 1$, $a_1 = 2,7$, $a_2 = 0,8$, $b_1 = b_2 = 2$ (dus $a_1 > b_1$). Ons aanvankelijke probleem kan geen positieve eigenwaarde hebben. We concluderen in het bijzonder dat de genererende serie $G_i(x)$ hebben niet altijd een convergentie straal > 1 . De volgende propositie verbindt het gedrag van $G_i(x)$ dichtbij $x = 1$ met de parameter α .

Stelling 5 .

- Als we vergelijking (4) hebben, met $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ en $\pi \neq 0$,
- als de genererende serie (6) een convergentieradius heeft gelijk aan 1,
- als er een echt nummer is $\alpha > 0$, een geheel getal $J \geq 0$ en analytische functies $g_{i,j}(x)$ in een schijf gecentreerd in $x = 1$ met

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

- over een interval $(1-\varepsilon, 1)$ met $\varepsilon > 0$,
- als de vector $(g_{i,j}(1))$ is niet nul,

dus ω is een eigenwaarde van de matrix $Q + \alpha D$.

Bewijs . Men heeft

$$G'_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x).$$

$G_i(x)$ is oplossing van vergelijking (5) voor $|x| < 1$. We delen door $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$. Men heeft

$$\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x).$$

Met $x \rightarrow 1$, krijgen we

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j} g_{j,J}(1).$$

Dus ω is een eigenwaarde van de matrix $Q + \alpha D$.

Opmerking. De vorm van de functie $G_i(x)$ in Propositie 5, die een powerfunctie combineert met een logaritmische polynoom, is wat kan worden verwacht van een oplossing van een Fuchs-systeem in de buurt van een singulariteit (Gantmacher, 1966, p. 159).

4.5 Het geval waar $m > 0$ en $\lambda'_1(1) > 0$

Stelling 6 . We gaan ervan uit: $m > 0$ en $\lambda'_1(1) > 0$. In dit geval $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ met $\alpha^* \in]0, 1[$. We nemen aan: $\alpha > 0$ en $\omega = s(Q + \alpha D)$.

- Als we vergelijking (4) hebben, met $\omega \in \mathbb{C}$ en $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- als de bijbehorende genererende serie $G_i(x)$ hebben een convergentiestraal gelijk aan 1
- als de $G_i(x)$ kan met een interval worden geschreven $(1 - \varepsilon, 1)$ met $\varepsilon > 0$ in de vorm

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

met $J \geq 1$ en een vector $(g_{i,j,0})_{1 \leq j \leq K}$ wat niet nul is,

dus $\alpha = \alpha^*$ en $\omega = \Lambda$.

Bewijs . Inderdaad

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

Men heeft $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Omdat $G_i(x)$ is een oplossing van (5) op $|x| < 1$, men heeft

$$\omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}.$$

Uitdrukkingen in $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ en in $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ moet elk annuleren:

$$\omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J,0} = \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\ \omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] = \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}.$$

We definiëren $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq j \leq K}$. Men heeft

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

Omdat $\omega = s(Q + \alpha D)$ en $\gamma_J \neq 0$, de eerste vergelijking laat dat zien γ_J is een eigenvector van de matrix $Q + \alpha D$ geassocieerd met eigenwaarde $s(Q + \alpha D)$. Met de notaties van paragraaf 2.2 leiden we af dat er een constante is $\kappa \neq 0$ met $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$. Bovendien zien we dat de tweede vergelijking de vorm aanneemt

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

De matrix $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$ heeft een 1-dimensionale kern, geleid door $w_1(\alpha)$. Nog steeds met de notaties van paragraaf 2.2, de getransponeerde matrix $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha)I]$ heeft een 1-dimensionale kern, geleid door $v_1(\alpha)$. Het puntproduct van (19) met $v_1(\alpha)$ geeft

$$\langle v_1(\alpha), Dw_1(\alpha) \rangle = 0.$$

Volgens (12) komt dit overeen met $\lambda_1'(\alpha) = 0$. Met $m > 0$ en $\lambda_1'(1) > 0$, dit impliceert dat $\alpha = \alpha^*$. Dus $\omega = \Lambda$.

5 Asymptotisch gedrag van eigenvectoren

5.1 Het geval waar $m < 0$

Beschouw nu het gedrag van n grote van een eigenvector $(\pi_{n,i})$ geassocieerd met eigenwaarde ω_1 . Laten we direct een oplossing van (4) proberen met

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Voor n groot hebben we

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta}(1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta}(1-\delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

en

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

Dus

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

voor n groot. We zien dat de uitdrukkingen in $\Pi^n/n^{\beta-1}$ in (4) geven

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

Dus

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

Als $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$, nemen we $\Pi = a_1/b_1$, $k_1 \neq 0$ en $k_i = 0$ als $i \neq 1$. Met $q_i = -Q_{i,i}$, uitdrukkingen in Π^n/n^β in (4) zijn

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

Dus

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

en

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1} k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

We leiden af

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

Als alternatief bestuderen we het systeem (5) in de buurt van $x = b_1/a_1$. Men heeft

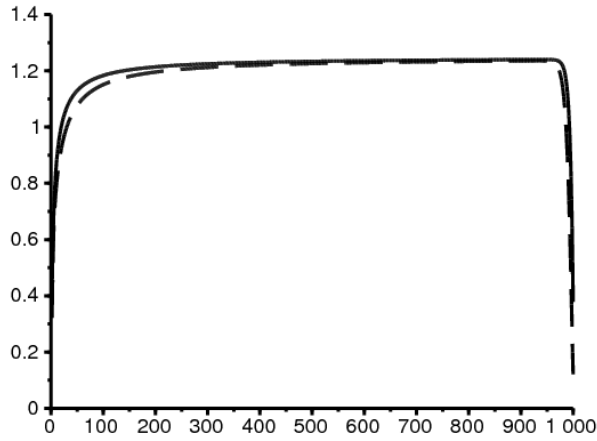
$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

Voor de eigenwaarde ω_1 kunnen we de bijbehorende eigenvector zo kiezen $\pi_{n,i} > 0$ voor $n \geq 1$. Voor de hele serie $G_i(x)$, overweeg het singuliere punt dat het dichtst bij 0 in het complexe vlak ligt. Dit punt ligt op de as $x > 0$, volgens een stelling van A. Pringsheim (Queffelec en Zuily, 2013, p. 54). Volgens (Flajolet en Sedgewick, 2009) hebben we dat dan

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1+(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$$

voor $n \rightarrow +\infty$, binnen een multiplicatieve constante. Dit is wat we hebben gevonden.

Numeriek voorbeeld. Neem opnieuw ons numeriek voorbeeld (15), met $a_1 = 2,5$. Figuur 2 toont het asymptotische gedrag van de eigenvector geassocieerd met de eigenwaarde μ_N , voor $N = 1000$. Hier hebben we $\Lambda = -1$. Dus we hebben $\beta = 1$ en $k_1/h_2 = 0,3$. De figuur lijkt de asymptotische resultaten te bevestigen, gezien het feit dat we geen rekening moeten houden met de rand effect rond $n = N$.



Figuur 2. De zaak $a_1 = 2,5$. We traceren $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (ononderbroken lijn) en $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (stippelijijn) afhankelijk van n . We gebruiken de ingekorte matrix $\mathcal{M}^{(N)}$ met $N = 1000$.

5.2 Gevallen waarin $m > 0$

We vermoeden $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ waar $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$. In beide gevallen geven de dominante uitdrukkingen in (4)

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

Met andere woorden ω is een eigenwaarde van de matrix $Q + (\beta - 1)D$. Inderdaad, als we op zoek zijn naar een oplossing van het formulier $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$, we zijn zoals in (20) met $\Pi = 1$. Wat betreft het geval waar

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

men heeft

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n\pm 1,i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

wat weer leidt tot vergelijking (22). Dit suggereert dat $\beta = 1 + \alpha^*$ als $\lambda'_1(1) > 1$ en $\beta = 2$ als $\lambda'_1(1) \leq 0$. In beide gevallen is de convergentie straal van $G_i(x)$ zou gelijk zijn aan 1.

6 Keer terug naar het specifieke geval waar $K = 2$

We kunnen de differentiaalvergelijking van orde 2 beschouwen als voldaan door $G_1(x)$ in plaats van het eerste-orde differentieel systeem voor $G_1(x)$ en $G_2(x)$. We krijgen

$$\begin{aligned} &(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2) \frac{d^2 G_1}{dx^2} \\ &+ (1-x) \left\{ [\omega + q_1 + a_1(1-2x) + b_1](a_2x-b_2) + (\omega + q_2)(a_1x-b_1) \right\} \frac{dG_1}{dx} \\ &+ [(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1q_2] G_1 = 0. \end{aligned}$$

Delen door $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$ en door de rationale breuk in eenvoudige elementen te ontleden, verkrijgen we

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} + \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\omega+q_2}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ &+ \left[\frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x - \frac{b_1}{a_1})(x - \frac{b_2}{a_2})}. \end{aligned}$$

Stel dat de cijfers $b_1/a_1, b_2/a_2$ en 1 zijn allemaal verschillend. We herkennen een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - k_0 - k'_0}{x-x_0} + \frac{1 - k_1 - k'_1}{x-x_1} + \frac{1 - k_2 - k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ &+ \left[\frac{k_0 k'_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1 k'_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_0)}{x-x_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2 k'_2 (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0, \end{aligned}$$

dat wil zeggen een Riemann-differentiaalvergelijking (Roseau, 1997, p. 229) met drie singuliere punten $x_0 = 1, x_1 = b_1/a_1$ en $x_2 = b_2/a_2$. De karakteristieke exposanten zijn respectievelijk

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega + q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega + q_2}{d_2}\right),$$

met α_+ en α_- oplossingen van (13). De reeks oplossingen kan daarom worden geschreven met de Riemann-notatie

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega + q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega + q_2}{d_2} \end{array} \right. x \left. \right\}.$$

Volgens (Roseau, 1997, p. 229) kan men schrijven

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega + q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega + q_2}{d_2} \end{array} \right. x \left. \right\}.$$

We definiëren

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega + q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

We komen terug op het geval van de differentieële hypergeometrische vergelijking

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

wat zich vertaalt naar gelijkheid $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ tussen anharmonische relaties. Dus

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \right. y \left. \right\}.$$

De hypergeometrische functie is

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

met de notatie $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$. Als x in de buurt van 1 ligt, is de variabele y in de buurt van 0. Volgens de theorie van de differentieële hypergeometrische vergelijking zijn er constanten κ_1 en κ_2 met

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

op voorwaarde dat $\mathcal{C} \neq 1$, dat wil zeggen $\alpha_- \neq \alpha_+$. Oplossingen met een Fuchsiaanse exposant α_+ in $x = 1$ komen overeen met $\kappa_2 = 0$:

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

De zaak $m < 0$

We nemen bijvoorbeeld aan $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$. We nemen $\alpha_+ = 1$ voor de eigenfunctie geassocieerd met $\omega_1 = s(Q + D)$. We kiezen κ_1 dus dat $G_1(0) = 1$. Dus

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

vanaf (13). We definiëren

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

Het is de waarde van x waarvoor $y = -1$. Men heeft $1 < \xi < b_1/a_1$. De variabele y neemt af als $\theta < x < \xi$ van

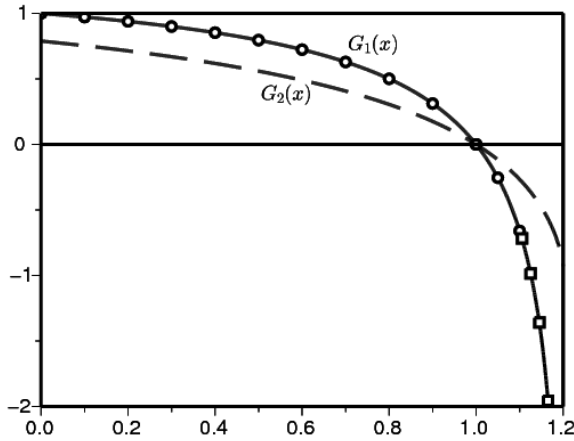
$$\left(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) / \left(\frac{b_2}{a_2} - 1 \right) \in]0, 1[$$

tot -1. Als $\xi < x < b_1/a_1$, expressie (23) moet worden vervangen

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

dat is de uitdrukking (18) van §182 van (C. Jordan, 1896), waarin het argument $\frac{y}{y-1}$ groeit van 1/2 naar 1.

Neem opnieuw ons numeriek voorbeeld (15), met $a_1 = 2,5$. Figuur 3 toont de genererende functies $G_1(x)$ en $G_2(x)$ geconstrueerd met de eigenvector geassocieerd met μ_N . Hier $N = 4000$ met standaardisatie $G_1(0) = 1$. We gebruiken de Horner-methode om de genererende serie te evalueren. We vergelijken ze met formules (23) en (24). Hier hebben we $\xi \simeq 1,105$. De vermenigvuldigingsfactor voor normalisatie is zo gekozen dat de functies die door de twee methoden worden verkregen, over elkaar heen kunnen worden gelegd.



Figuur 3. De zaak $a_1 = 2,5$. We traceren de genererende functies $G_1(x)$ (ononderbroken lijn) en $G_2(x)$ (stippellijn) als functie van x . Men gebruikt voor de berekening de matrix $\mathcal{M}^{(N)}$ met $N = 4000$. De formules (23) en (24) voor $G_1(x)$ worden weergegeven door kleine cirkels en vierkanten.

De zaak $m > 0$ en $\lambda'_1(1) \leq 0$

We nemen bijvoorbeeld aan $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$. We hebben nu

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

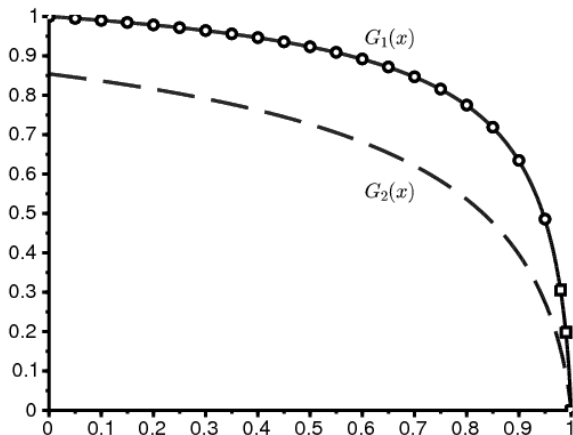
Expression (23) is niet langer geschikt omdat de variabele y divergeert in $x = b_1/a_1 < 1$. Voor $0 < x < \xi$, y^{-1} neemt af met een getal tussen 0 en 1 tot -1. We nemen op dit interval de uitdrukking (32) van (C. Jordan, 1896, §182),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-\mathcal{C}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-\mathcal{C}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

met $\alpha_+ = 1$, $\omega_1 = s(Q+D)$ en κ_1 dus dat $G_1(0) = 1$. Echter, over het interval $\xi < x < 1$ nemen we de uitdrukking (34) van (C. Jordan, 1896, §182), waarin het argument $(1-y)^{-1}$ neemt toe van 1/2 tot 1:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(\mathcal{A}, \mathcal{C}-\mathcal{B}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{C}-\mathcal{B}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Neem opnieuw ons numeriek voorbeeld (15), met $a_1 = 3,2$. Figuur 4 toont formules (25) en (26). Ze vallen goed samen met de genererende functie geconstrueerd met de eigenvector. Hier hebben we $\xi \simeq 0,97$.



Figuur 4. Het geval waar $a_1 = 3,2$. Vergelijking van formules (25) [kleine cirkels] en (26) [kleine vierkantjes] voor $G_1(x)$ met de genererende functie van de eigenvector geassocieerd met μ_N (ononderbroken lijn), met $N = 10^4$.

De zaak $m > 0$ en $\lambda'_1(1) > 0$

Expressies (25) en (26) zijn waarschijnlijk niet langer geldig, zelfs als $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$. Ze moeten worden vervangen door uitdrukkingen die een logaritmische term bevatten. Als $a_1 = 3,5$, men heeft $\Lambda = -0,2$ en $\alpha^* = 0,6$ volgens de formules (14). In dit geval konden we geen suggestieve grafiek krijgen.

7 De Markov-ketting inbegrepen

Voor een subkritisch verbindingsproces Z_n ($n = 0, 1, \dots$) in een willekeurige omgeving met identiek verdeelde onafhankelijke omgevingen hebben we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \quad (27)$$

waar $f(x)$ duidt de genererende functie aan (Dekking, 1988; Geiger et al., 2003). Laat μ het minimum zijn aan de rechterkant van (27). Waar in het "zwak subkritische" geval

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

men heeft

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

voor een constante $c > 0$. In het "zeer subkritische" geval waar

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

men heeft $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ en

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

voor een constante $c > 0$. Het proces is subkritisch als $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$.

Laten we teruggaan naar ons geboorte- en doodproces. We beperken ons tot het specifieke geval van twee omgevingen: $K = 2$. We definiëren

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

Als $a_i \neq b_i$, het is de genererende functie van het aantal individuen na een tijdje t uitgaande van een individu op tijdstip 0 in de omgeving i (Hillion, 1986). In ieder geval

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

Na een tijdje t_1 schakelt de omgeving na een tijdje over van toestand 1 naar toestand 2. t_2 schakelt de omgeving terug naar toestand 1. De bijbehorende waarschijnlijkheidsdichtheden zijn $q_1 e^{-q_1 t_1}$ en $q_2 e^{-q_2 t_2}$. Overweeg dan de meegeleverde Markov-ketting Z_n ($n = 0, 1, \dots$) alleen kijken naar de verandering tussen tijd 0 en tijd $t_1 + t_2$. Laten we het een generatie noemen. De genererende functie is

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

In het bijzonder $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$. Dit vertakkingsproces is subkritisch. Inderdaad, we hebben

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

omdat $R_0 < 1$. Het verbindingsproces is zeer subkritisch wanneer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

In dit geval hebben we

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Merk op dat als $d_1 < 0$ en $d_2 < 0$, dan is het proces sterk subkritisch. In het zwak subkritische geval hebben we

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

en een kleine berekening laat zien

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2} \right)^2}.$$

Merk op dat dit nummer is < 1 als en alleen als $R_0 < 1$.

Voor ons numerieke voorbeeld laat formule (28) zien dat de opgenomen Markov-keten sterk subkritisch is wanneer $a_1 < 3,4$. Vreemd genoeg verschilt deze drempel van die tussen de gevallen $\Lambda = s(Q + D)$ en $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ met $0 < \alpha^* < 1$ voor het lineaire proces van geboorte en dood. Deze laatste drempel was $\simeq 3,2829$ uit paragraaf 3. De snelheid waarmee de opgenomen Markov-keten met uitsterven convergeert, heeft echter weinig te maken met de snelheid waarmee het continue tijdproces hetzelfde doet.

8 Conclusie

Over het gedrag van de eigenwaarden en eigenvectoren moet nog veel worden opgehelderd. Onder de mogelijke generalisaties kan men denken dat als de coëfficiënten a_i , b_i en $Q_{i,j}$ zijn functies T -periode van tijd t , dus ω_1 zal gelijk zijn aan $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$, waar $f(\cdot)$ duidt de dominante Floquet-exponent aan en vervangt de spectrale grens.

Dankwoord

We danken Vincent Bansaye, Anne Duval en Bruno Sericola voor hun opmerkingen en suggesties.

Referenties

- Artalejo JR, Economou A, Lopez–Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi–stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed–Darras A (2014) On linear birth–and–death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi–birth–and–death processes and matrix–valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi–stationary distributions. Springer, Berlin
- D’Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Probab* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) *Éléments d’analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous–critiques en environnement aléatoire. *Ann I H Poincaré–Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d’analyse de l’École polytechnique*, tome 3. Gauthier–Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffélec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l’agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris