

ランダムな環境における誕生と死の亜臨界線形過程について

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers、パリ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

まとめ

ランダムな環境での線形亜臨界出生および死亡プロセスの消滅率の明示的な式を取得します。この式は、マスター方程式の打ち切り行列の最大実部の固有値を数値計算することによって示されています。関連する固有ベクトルの生成関数は、フックス型微分方程式の特異系をチェックします。リーマン微分方程式を導く2つの環境の場合に特に注意が払われます。

1はじめに

環境が有限数 K の状態間で振動すると仮定します ($K \geq 2$) 均一な連続時間マルコフ連鎖に従います。 $Q = (Q_{i,j})$ 転置がこのチェーンの極小ジェネレーターである行列です：

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

行列 Q は既約であると仮定します。単一のベクトルがあります $u = (u_i)$ と

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(セリコラ、2013、p。152)。

このランダムな環境で進化する個体の数は n です。環境 i ($1 \leq i \leq K$)、パラメータの誕生と死の線形プロセスがあると仮定します

- $n a_i$ 出産のために
- $n b_i$ 死者のために

と $a_i > 0$ と $b_i > 0$ 。言い換えれば、微小な時間間隔 dt の間、

- 確率で $a_i dt$ 、各個人が新しい個人を出産し、
- 一人一人が確率で死ぬ $b_i dt$ 。

時間 $t = 0$ で、 n_0 個人 ($n_0 \geq 1$) そして環境は i_0 。時間 t で環境 i に n 人の個人が存在する確率は $p_{n,i}(t)$ 。だから私たちは $p_{n,i}(0) = 1$ もし $(n, i) = (n_0, i_0)$ と $p_{n,i}(0) = 0$ そうでなければ。主な方程式は

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

のために $n \geq 0$ と $1 \leq i \leq K$ 。でも $p_{n-1,i}$ 欠席している $n = 0$ 。(ロトカ、1939) のように、定義しましょう

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

私たちは常にそれを仮定します $R_0 < 1$ ：人口はほぼ確実に減少している (Cogburn and Torrez、1981; Bacaër and Ed-Darraz、2014)。それは亜臨界体制です。もし $t \rightarrow +\infty$ 、私たちは持っています

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

絶滅率が存在し、 $n \geq l$ または i に依存しない

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(コレットら、2013、セクション4.5)。また、初期状態には依存しません (n_0, i_0)。問題は、このレートを明示的に決定することです。

いくつかの表記法を使用します。

- $\Re(\cdot)$ 複素数の実部です
- $\sigma(M)$ マトリックスのスペクトルで M は。
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ スペクトル範囲です
- A は対角行列 $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$ 。

行列 M が正またはゼロである対角線の外側の係数を持っている場合、これは常に以下の場合に当てはまりますが、ペロンとフロベニウスの定理から次のようになります。 $s(M)$ また、の固有値である M 。

セクション2では、ランダム環境での分岐プロセスに関する (D'Souza and Hambly、1997) の結果を使用して、

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

機能のバリエーションも調べます $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ とその派生物 $\lambda_1'(\alpha)$ 、これは3つのケースを区別することになります。

- どこに $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$;
- どこに $m > 0$ と $\lambda_1'(1) \leq 0$;
- どこに $m > 0$ と $\lambda_1'(1) > 0$ 。

最初の2つのケースでは、区間 $[0,1]$ の最小 α が $\alpha=1$ で到達するため、次のようになります。 $\omega_1 = s(Q + D)$ 。

セクション3では、スペクトル境界が μ_N マスター方程式の打ち切られた行列の増加シーケンスを形成します。次に、数値で計算します μ_N 一連の例で。私たちは特に遅いこと、間違いなく対数、 μ_N に収束する ω_1 上記の3番目のケース。

セクション4から、非常に部分的な結果しか得られない他の固有値と関連する固有ベクトルに関心があります。最初に固有値問題を変換します

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n \pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} \pi_{n,j}, \quad (4)$$

フックス型の特異微分システム (Methée、1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \quad (5)$$

ジェネレーター機能用

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

固有ベクトルの場合 ($\pi_{n,i}$) n に関して幾何学的に減少する場合、固有値 ω は必然的に行列の固有値に等しくなります $Q + \nu D$ 整数 $\nu \geq 0$ 。もし $m < 0$ と $\omega = s(Q + \nu D)$ 、 $x = 1$ の近傍で実際にシステム (5) の解析解を構築します。フクシアシステムの特異方程式は次のとおりです。

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

つまり、 ω 行列の固有値です $Q + \alpha D$ 。この特性方程式は、次のように動作する解を探すことによって得られます。 $(1-x)^\alpha$ の近くで $x = 1$ 。

3番目のケースを調べましょう：関数 $\lambda_1(\alpha)$ 内部で最小に達する $]0, 1[$ 。もし

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- の開発 $G_i(x)_{x=1}$ の近傍には対数項が含まれ、

そう $\alpha = \alpha^*$ として、 $\omega = \Lambda$ 。さらに、フックス理論では、特性方程式 (7) が二重根、特に分岐を持っている場合、対数項が現れます。 $\omega = s(Q + \alpha D)$ 。関数の凸性のため $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ 、これは $\omega = \Lambda$ でのみ発生します。

セクション5では、限界固有ベクトルの漸近的振る舞いを直接調べます。 $\pi = (\pi_{n,i})$ 関連付けられた ω_1 。セクション6は、リーマン微分方程式で $K = 2$ の場合にリンクします。セクション7では、マルコフ連鎖が含まれ、後者は (Dekking, 1988) および (Geiger et al., 2003) の研究の枠組みに含まれます。弱垂臨界と強垂臨界の間のしきい値は、次の場合と同じではないことに注意してください。 $\Lambda \neq s(Q + D)$ 。

他のいくつかの作品に関連して問題をより適切に位置付けるために、システム (1) は「準誕生と死の不均一なプロセス」であることに注意します。たとえば、(Sericola, 2013, p. 350) または (Latouche and Ramaswami, 1999, Chapter 12) を参照してください。これらは、定常分布について説明していますが、収束率については説明していません。さらに、一定の環境で

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

私たちは持っています $D = (a - b)I$ 、どこ I 単位行列です。だから $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ そして式 (3) は $\omega_1 = a - b$ 。これは、直接計算 (Hillion, 1986, V章)、または誕生と死の過程に関するカーリンとマクレガーの結果の特別なケース (Collet et al., 2013, セクション5.9.2) のいずれかでよく知られています。これらの後者の結果を「生と死の準プロセス」(Clayton, 2010年) に一般化すると、「スペクトル」が現実である場合にのみ関係します。これは、通常モデルでは当てはまりません。最後に、モデル (1) は、特定の非線形母集団モデル、特に流行病モデルの線形化として介入します (Bacaër, 2016)。

2絶滅率の式

2.1環境の時間離散化と限界への移行

M^T は、行列 M (またはベクトル) の転置です。時間の小さなステップを選びます $\delta > 0$ 。マトリックス

$$P = e^{Q^T \delta}$$

離散時間のマルコフ連鎖の行列です。私たちは持っています $P_{i,j} > 0$ すべてのために i として、 j の行列以来、 Q は既約です。環境は、タイムステップ δ の間、状態 i でブロックされたままです。次に、環境は状態 j にジャンプします $P_{i,j}$ 。長さの時間間隔 δ では、母集団はパラメータの出生と死亡の線形プロセスに従います $n a_i$ と $n b_i$ 環境が状態 i の場合。したがって、個人は平均して生成します

$$m_i = e^{(a_i - b_i) \delta}$$

個人。私たちは持っています $0 < m_i < +\infty$ 。したがって、私たちはマルコフ環境での分岐プロセスのコンテキストにいます。いくつかの表記：

- もし $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ k のトラバース環境のシーケンスであり、

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- のために $\alpha \in \mathbb{R}$ 、

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

どこに $\mathbb{E}(\cdot)$ 数学的期待を表す

- Z_k k サイズタイムステップ δ の終了時の母集団のサイズ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$ によって与えられる行列 $\Sigma_{i,j}(\alpha) = P_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = P \operatorname{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_k^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$: 正の行列のスペクトル半径 $\Sigma(\alpha)$ 。

だから $\mathbb{P}(Z_k > 0)$ 人口が絶滅しない確率です。(D'Souza and Hambly, 1997) の推論1.8では、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

私たちのケースでは、 $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ 明示的に計算されます：

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

(8) と (10) から、

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

α の分析関数でもあります。 $\rho(\Sigma(\alpha))$ 正の行列の単純な固有値です $\Sigma(\alpha)$ 。したがって、制限 (9) は $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ 。したがって、連続時間における消光率 ω は

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

特に取りましょう $\delta = 1/h$ 整数で $h \geq 1$ 。だから $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$ 。でも

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

ソフス・リーの公式から。スペクトル半径は連続関数であり、

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

なぜなら $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ 、と結論付けます

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

最後に、(Collet et al.、2013) の命題4.12は、式 (9) の左側にあるように、(2) または非消滅の確率で定義される消滅率の同等性を保証します。このようにして、連続時間における絶滅率の公式を見つけました。

2.2 機能の検討 $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

私たちは定義します

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

命題1。

- もし $m \leq 0$ 、その後 $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし $m > 0$ と $\lambda_1'(1) \leq 0$ 、それから私たちが持っています $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし $m > 0$ と $\lambda_1'(1) > 0$ 、それからユニークな $\alpha^* \in]0, 1[$ と $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ 。

証明。もし $v = (v_i)$ ベクトルです

- $v \geq 0$ もし $v_i \geq 0$ すべてのために i
- $v > 0$ もし $v \geq 0$ と $v \neq 0$
- $v \gg 0$ もし $v_i > 0$ すべてのために i 。

行列には同じ表記法を使用します。

(Bacaër, 2016) のセクション9の推論をもう一度取り上げますが、 $R_0 < 1$ ではなく $R_0 > 1$ 。マトリックス $Q + \alpha D$ 行列 Q は既約であり、行列 D は対角であるため、すべての α について既約です。だから $\lambda_1(\alpha)$ 行列の単純な固有値です $Q + \alpha D$ 、

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1,$$

どこに $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 実数ベクトルの通常のスカラー積を示します。 $\lambda_1(\alpha)$ 転置行列の単純な固有値でもあります $Q^\top + \alpha D$ 、

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^T + \alpha D)v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha)v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

単純な固有値摂動定理から、関数 $\lambda_1(\alpha)$ 区別可能であり、

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), Dw_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

特に $\alpha = 0$ 、私たちは持っています $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ 、 $w_1(0) = u$ 、 $v_1(0) = \mathbf{1}^T$ と

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^T, Du \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i)u_i < 0$$

なぜなら $R_0 < 1$ 。

もし $m \leq 0$ 、関数 $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ 減少している $D \leq 0$ 。ここで、 $m > 0$ 。覚えて $\lambda_1'(0) < 0$ 。機能 $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ 凸状です (コーエン、1981)。だから $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ 増加する機能です。さらに、 $\alpha \rightarrow +\infty$ 、私たちは持っています $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$ 。機能 $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ この場合、アフィンではないので厳密に凸です (Nussbaum、1986)。だからユニークな $\alpha^* > 0$ と $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$ 。

したがって、3つのケースがあります。

- もし $m \leq 0$ 、その後 $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし $m > 0$ と $\lambda_1'(1) \leq 0$ 、その後 $\alpha^* \geq 1$ と $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ 間隔で減少します $[0, 1]$ なので、まだ $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。
- もし $m > 0$ と $\lambda_1'(1) > 0$ 、その後 $\alpha^* \in]0, 1[$ と $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ 。

2.3 2つの環境の場合

とする $K = 2$ 。もし $Q_{i,i} = -q_i$ のために $i = 1, 2$ 、その後

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

特性方程式 $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ 書かれている

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

間のこの関係 ω と α 平面内の双曲線を説明します (ω, α) 。それも書くことができます

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

また、 $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ そのようなものです

$$2\lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

と

$$2\lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

もし $m \leq 0$ 、または $m > 0$ と $\lambda_1'(1) \leq 0$ 、私たちは持っています $\Lambda = \lambda_1(1)$ 。もし $m > 0$ と $\lambda_1'(1) > 0$ 、私たちは持っている必要があります $d_1 d_2 < 0$ 。この場合、たとえば、 $d_1 > 0$ と $d_2 < 0$ 。(13) の判別式を取り消すことにより、小さな計算の後に

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

そのことに注意してください $\Lambda = 0$ と $\alpha^* = 0$ もし $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ 、つまり $R_0 = 1$ 。

3 打ち切られた行列

もし $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ 、その後、主な方程式が書かれています $\frac{dp}{dt} = M p$ 、どこ M は無限行列です。マトリックスをカットしましょう M

$$M^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & U^{(N)} \end{array} \right)$$

と $S = A + B$ 。私たちは定義します $\mu_N = s(U^{(N)})$ 。

命題2。 みんなのために $N \geq 1$ 、私たちは持っています $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$ 。続き (μ_N) したがって、 $N \rightarrow +\infty$ 、つまり ω_1 。

証明。メツラー行列は、対角線の外側のすべての係数が ≥ 0 である行列です。行列 $U^{(N)}$ Q は既約なので、既約メツラー行列です。 $a_i > 0$ と $b_i > 0$ すべてのために i 。したがって、メツラー行列のスペクトル境界に関するペロンとフロベニウスの定理の帰結を使用できます。例を参照してください (Nkague Nkamba, 2012、定理30)。もし $e = (1, \dots, 1)^T$ そう

$$(U^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

なぜなら $e \gg 0$ 、私たちはそれを推定します $s((U^{(N)})^T) < 0$ 。だから

$$\mu_N = s(U^{(N)}) = s((U^{(N)})^T) < 0.$$

μ_N 行列の固有値です $U^{(N)}$

$$\exists W^{(N)} \gg 0, \quad U^{(N)} W^{(N)} = \mu_N W^{(N)}.$$

ベクトル $W^{(N)}$ サイズ K の N 個のブロックで構成され、 $W^{(N)} = (W_1^{(N)}, \dots, W_N^{(N)})$ 。ベクトルを考える

$$\tilde{W} = (W^{(N)}, 0)$$

サイズでもある $0 K$ 。だから

$$U^{(N+1)} \tilde{W} = \begin{pmatrix} U^{(N)} & \vdots & \\ \hline \cdots & 0 & (N+1)B \\ \cdots & 0 & NA \quad | \quad Q - (N+1)S \\ \hline & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N W^{(N)} \\ NA W_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

なぜなら $NA W_N^{(N)} \gg 0$ 、私たちは持っています $U^{(N+1)} \tilde{W} > \mu_N \tilde{W}$ 。なぜなら $\tilde{W} > 0$ 、私たちはそれを推定します $\mu_{N+1} > \mu_N$ 。

数値としてとりましょう

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

だから $u_1 = u_2 = 0,5$ 。パラメータ a_1 たとえば2と5の間で変化します。この上限は、 $R_0 = 1$ 。 N の値が小さい場合、通常は $N = 10^3$ 、Scilabのようなソフトウェアは、行列の完全なスペクトルを計算します $U^{(N)}$ 。それ以外の場合は、の最小固有値を計算します $-U^{(N)}$ そして、逆行列に適用される反復法による対応する固有ベクトル。各反復での反転には、3重対角ブロック構造を利用します (Artalejo et al.、2013)。このアルゴリズムを使用すると、 $N = 10^6$ 多くの問題なし。

図1は μ_N に応じて a_1 以下のための N は固定ではなく素晴らしいです。反復アルゴリズムは、次の2つの連続推定が終了すると停止します。 μ_N 違いが小さい 10^{-4} 。この図はまた、点線で示し、 a_1 式 (3) で与えられる数、は $\lambda_1(1)$ もし $\lambda_1'(1) \leq 0$ これは、式 (14) で与えられます。 $\lambda_1'(1) > 0$ 。私たちは持っています $\lambda_1'(1) < 0$ もし $a_1 < a_1^*$ と $\lambda_1'(1) > 0$ もし $a_1 > a_1^*$ 、 $a_1^* \approx 3,2829$ 。 Λ との制限との間の合意 (μ_N) 可能性が高いようです。ただし、収束は非常に遅く、おそらく対数的です。 R_0 特に1に近づく $a_1 > a_1^*$ 。

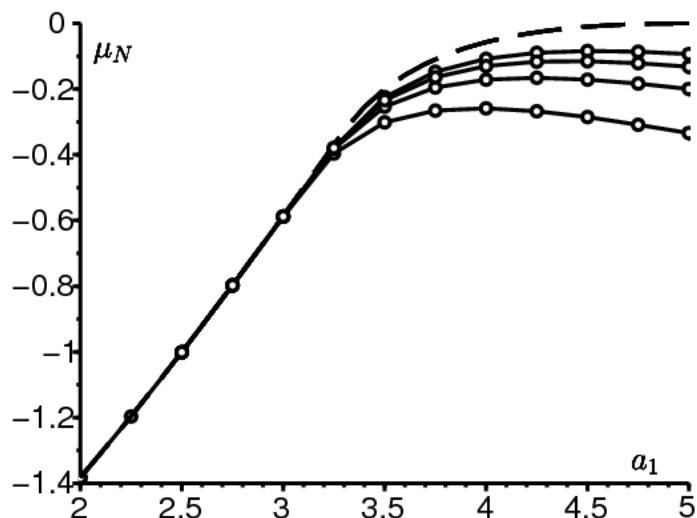


図1.点線：Λ式(3)の関数として与えられる a_1 。点のある連続線： μ_N のために $N = 10^3, 10^4, 10^5$ と 10^6 (下から上へ)。

4固有ベクトルと他の固有値

私たちは今、限界に興味があります $N \rightarrow \infty$ に関連する固有ベクトルの μ_N 他の固有値とベクトルも同様です。これに関しては、非常に部分的な結果しか得られません。

4.1フクシアンシステム

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ 、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 、 \mathbb{C} は複素数のセットであり、' 変数に関する導関数 x 。

命題3。

- 方程式(4)がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$ と $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ 、
- 生成系列(6)の収束半径 $\geq R$ がある場合、

そう $G_i(x)$ は、システム(5)のソリューションです。 $x \in \mathbb{C}$ 、 $|x| < R$ と $1 \leq i \leq K$ 。

証明。私たちは持っています

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

一定の環境での古典的なケース (Hillion, 1986) と同様に、(4) を乗算します x^n 。すべての $n \geq 0$ の合計は

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i)x G'_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

これは(5)と同等です。

メモ。

- (5) は特異微分システムの固有値の問題であることに注意してください。このシステムは、次の場合にフックスタイプです。 $a_i \neq b_i$ すべてのために i (Methée, 1959)。システムには特異点があります $x = 1$ そして $x = b_i/a_i$ のために $1 \leq i \leq K$ 。私たちは持っています $b_i/a_i < 1$ もし $a_i > b_i$ 。システムを書くこともできます

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- 次数2のフックスタイプのスカラー微分方程式の例は、一定の環境での2次の誕生と死の過程の研究に登場しました (Picard, 1965)。

4.2収束半径が1より大きい場合の固有値

命題4.

- 方程式 (4) がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$ 、 $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ と $\pi \neq 0$ 、
- 生成系列 (6) の収束半径が厳密に1より大きい場合

次に整数があります $\nu \geq 0$ ω は、行列の固有値であるような $Q + \nu D$ 。

証明。ばかげたことを理由に考えましょう。すべてについてそれを仮定します $\nu \geq 0$ 、 ω の固有値ではありません $Q + \nu D$ 。機能 $G_i(x)$ ディスクで分析的で $|x| < R$ と $R > 1$ 。(5) で x が1に収束する場合：

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

しかし、 ω はの固有値ではありません Q 。だから $G_i(1) = 0$ すべてのために i 。

整数にしよう $\nu \geq 1$ 。帰納によって、我々が実証したと仮定します $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$ 。 x に関して ν 倍式 (5) を導出し、ライプニッツの公式を次の積に使用します。 $(1-x)(a_i x - b_i)$ と $G_i'(x)$ 。私たちは持っています

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

どこに $\binom{\nu}{k}$ 二項式の係数を示します。多項式 $(1-x)(a_i x - b_i)x$ の次数は2です。のみの表現 $0 \leq k \leq 2$ 左側の合計がゼロでない場合：

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

x を1に収束させ、帰納法の仮説で

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

ただし、 ω は行列の固有値ではありません $Q + \nu D$ 。だから $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ すべてのために i 。

それで、私たちはそれを示しました $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ すべてのために i そしてすべてのために $\nu \geq 0$ 。機能以来 $G_i(x)$ 分析的であり、 $G_i(x) = 0$ の近くで $x = 1$ 、そして $G_i(x) = 0$ ディスク全体 $|x| < R$ 分析拡張の原則に従って。だから $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$ すべてのために $n \geq 0$ と $1 \leq i \leq K$ 。これは仮説と矛盾します $\pi \neq 0$ 。

メモ。

- 行列 $Q + \nu D$ の固有値は必ずしもすべてが実数であるとは限らないため、システム (5) はワイルおよびコダイラの理論 (Dieudonné, 2003) でも (Clayton, 2010) 誕生と死の特定の準過程について。それでも、これらの固有値は、 $K = 2$ の場合はすべて実数です。固有値は $s(Q + \nu D)$ 非常に現実的です。他の固有値も実数です。
- の近くで $x = 1$ 、システム (16) は書くことができます

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

もし $G(x)$ ベクトルです ($G_i(x)$)、システムは次の形式です

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

と

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

と $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$ 。シリーズの収束半径 $G_i(x)$ が1より大きい場合、 $G_i(x)$ 近所で分析的で $x = 1$ 。したがって、上記のシステムには、近隣の分析ソリューションがあります。 $x = 1$ 。(Gantmacher, 1966, p. 155) による

と、整数が存在します $\nu \geq 0$ は次の固有値です Ω_{-1} 。ベクトルがあります $w \neq 0$ と

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

だから

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

ω は次の固有値です $Q + \nu D$ 。これは、提案4で基本的にも実証されたものです。

例。数値 (15) を $a_1 = 2,5$ 。この場合、 $m < 0$ 。のために $N = 1000$ 、行列の最初の20個の固有値 $M^{(N)}$ 次の表に大まかに示します。

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

今の固有値 Q 0であり、 -2 、それらの $Q + D$ は -1 と $-3,5$ 、それらの $Q + 2D$ は $-1,6972244$ と $-5,3027756$ 、それらの $Q + 3D$ は $-2,2877855$ と $-7,2122145$ 、それらの $Q + 4D$ は $-2,8377223$ と $-9,1622777$ 、などそれらは上の表でよく見られます。要するに、の固有値は $M^{(N)}$ 収束するとき $N \rightarrow +\infty$ 行列の固有値に向けて $Q + \nu D$ のために $\nu = 0, 1, 2, \dots$ と μ_N に収束する $s(Q + D)$ 。ここを覚えて $s(Q + D) = \Lambda$ なぜなら $m < 0$ 。

4.3場合 $a_i < b_i$ すべてのために i

とする $m < 0$ 。次の形式のシステム (5) の $x = 1$ の近くで解を正式に求めましょう

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n. \quad (17)$$

私たちは持っています

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i} (1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i} (1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} (1-x)^n.$$

私たちは持っています $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ 。の係数を特定します $(1-x)^n$ 。得る

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

すべてのために $n \geq 0$ 。 $c_{n-1,i}$ ない場合 $n = 0$ 。と $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ 、 (17) は (5) の解です。

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

最初のタイプのソリューションは、 ω の固有値の中で Q と c_0 対応する固有ベクトル。関係 (18) により、 c_n のために $n \geq 1$ 、ただし行列 $Q + nD - \omega I$ 常に反転可能です。

2番目のタイプのソリューションは、 $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ と $\nu \geq 1$ 、 ω の固有値 $Q + \nu D$ と c_ν 関連する固有ベクトル。次に計算します c_n のために $n \geq \nu + 1$ 式 (18) を使用して、ただし、行列 $Q + nD - \omega I$ 常に反転可能です。

特に取りましょう $\omega = s(Q + \nu D)$ 整数で $\nu \geq 0$ 。なぜなら $a_i < b_i$ すべてのために i 、私たちは持っています $D < 0$ 。また、 $Q + \nu D$ 既約です。だから、どんな整数でも $n > \nu$ 、私たちは持っています

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

だから $s(Q + nD - \omega I) < 0$ 。マトリックス $Q + nD - \omega I$ は可逆メツツラー行列であり、 $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$ 。私たちは持っています

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$$

すべてのために $n \geq 1$ 。もし $n \rightarrow +\infty$ 、

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

そう

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

シリーズ (17) は、 $|1 - x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ 。シリーズ (17) $1 \leq i \leq K$ すべてのために収束しています $|1 - x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ 。

4.4 1に等しい収束半径

前の2つのセクションでは、整数 $v \geq 0$ に対する行列 $Q + vD$ の固有値について説明しました。ただし (BacaërおよびEd-Darraz, 2014年) は、 $R_0 < 1$ しかし、固有値は $s(Q + D)$ マトリックスの $Q + D$ 厳密に肯定的です：取るだけ $q_1 = q_2 = 1$ 、 $a_1 = 2, 7$ 、 $a_2 = 0, 8$ 、 $b_1 = b_2 = 2$ (したがって、 $a_1 > b_1$)。最初の問題は正の固有値を持つことはできません。特に、生成シリーズは $G_i(x)$ 常に収束半径があるとは限らない > 1 。次の命題は、 $G_i(x)$ に近い $x = 1$ パラメータ付き α 。

命題5。

- 方程式 (4) がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$ 、 $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ と $\pi \neq 0$ 、
- 生成系列 (6) の収束半径が1の場合
- 実数がある場合 $\alpha > 0$ 、整数 $J \geq 0$ および分析機能 $g_{i,j}(x)$ 中心のディスク $x = 1$ と

$$G_i(x) = (1 - x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^j g_{i,j}(x)$$

間隔をあけて $(1 - \varepsilon, 1)$ と $\varepsilon > 0$ 、

- ベクトルなら $(g_{i,J}(1))$ ゼロではない、

そう ω 行列の固有値です $Q + \alpha D$ 。

証明。私たちは持っています

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= (1 - x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^j g'_{i,j}(x) \\ &\quad + (1 - x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1 - x)]^j - j [\log(1 - x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

$G_i(x)$ は、式 (5) の解です。 $|x| < 1$ 。で割る $(1 - x)^\alpha [\log(1 - x)]^J$ 。私たちは持っています

$$\begin{aligned} \omega \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^{j-J} g_{i,j}(x) &+ (1 - x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1 - x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ &+ (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1 - x)]^{j-J} - j [\log(1 - x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ &= \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1 - x)]^{h-J} g_{j,h}(x). \end{aligned}$$

と $x \rightarrow 1$ 、私たちは

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j} g_{j,J}(1).$$

だから ω 行列の固有値です $Q + \alpha D$ 。

注。関数の形式 $G_i(x)$ べき関数と対数多項式を組み合わせた命題5では、特異点の近くのフックスシステムの解から期待できるものです (Gantmacher, 1966年, p. 159)。

4.5場合 $m > 0$ と $\lambda'_1(1) > 0$

命題6。私たちは仮定します： $m > 0$ と $\lambda'_1(1) > 0$ 。この場合、 $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ と $\alpha^* \in]0, 1[$ 。それは仮定されます。 $\alpha > 0$ と $\omega = s(Q + \alpha D)$ 。

- 方程式 (4) がある場合、 $\omega \in \mathbb{C}$ と $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- 関連する生成シリーズの場合 $G_i(x)$ 収束半径が I に等しい
- もし $G_i(x)$ 間隔で書くことができます $(1 - \varepsilon, 1)$ と $\varepsilon > 0$ 形で

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

と $J \geq 1$ そしてベクトル $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ ゼロではありません

そう $\alpha = \alpha^*$ と $\omega = \Lambda$ 。

証明。確かに、

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

私たちは持っています $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ 。なぜなら $G_i(x)$ 上の (5) の解決策です $|x| < 1$ 、私たちは持っています

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

の表現 $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ そして $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ それぞれキャンセルする必要があります：

$$\begin{aligned} \omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\ \omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}. \end{aligned}$$

私たちは定義します $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ 。私たちは持っています

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

なぜなら $\omega = s(Q + \alpha D)$ と $\gamma_J \neq 0$ 、最初の方程式は、 γ_J 行列の固有ベクトルです $Q + \alpha D$ 固有値に関連付けられています $s(Q + \alpha D)$ 。セクション2.2の表記により、定数があると推定します $\kappa \neq 0$ と $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$ 。さらに、2番目の方程式は次の形式をとります。

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

マトリックス $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ によって導かれる1次元の核を持つ $w_1(\alpha)$ 。セクション2.2の表記をそのままに、転置行列 $[Q^\top + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ によって導かれる1次元の核を持つ $v_1(\alpha)$ 。(19) のドット積 $v_1(\alpha)$ 与える

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

(12) によれば、これは $\lambda'_1(\alpha) = 0$ 。と $m > 0$ と $\lambda'_1(1) > 0$ 、これは $\alpha = \alpha^*$ 。だから $\omega = \Lambda$ 。

5固有ベクトルの漸近的振る舞い

5.1場合 $m < 0$

ここで、固有ベクトルの n ラージの動作を調べてみましょう $(\pi_{n,i})$ 固有値に関連付けられています ω_1 。(4) の解決策を直接試してみましょう

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

以下のために n 個の大、我々

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta}(1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta}(1-\delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

と

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

だから

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

以下のための n 大。の表現が $\Pi^n/n^{\beta-1}$ (4) で

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

だから

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

もし $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ 、私たちは取る $\Pi = a_1/b_1$ 、 $k_1 \neq 0$ と $k_i = 0$ もし $i \neq 1$ 。と $q_i = -Q_{i,i}$ 、式 Π^n/n^β (4) では

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

だから、

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

と

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

推測する

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

または、システム (5) の近くで研究します。 $x = b_1/a_1$ 。私たちは持っています

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

固有値について ω_1 、関連する固有ベクトルを選択して、 $\pi_{n,i} > 0$ のために $n \geq 1$ 。シリーズ全体 $G_i(x)$ 、複素平面で0に最も近い特異点を考えます。A.プリングスハイムの定理 (Queffelec and Zuily, 2013, p. 54) によると、この点は $x > 0$ 軸上にあります。(Flajolet and Sedgewick, 2009) によると、

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1+(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$$

のために $n \rightarrow +\infty$ 、乗法定数内に。これが私たちが見つけたものです。

数値例。数値例 (15) をもう一度、 $a_1 = 2,5$ 。図2は、固有値に関連付けられた固有ベクトルの漸近的な動作を示しています μ_N 、 $N = 1000$ 。ここにあります $\Lambda = -1$ 。だから私たちは $\beta = 1$ と $k_1/h_2 = 0,3$ 。この図は、 $n = N$ に近いエッジ効果を考慮に入れるべきではないため、得られた漸近的な結果を裏付けているようです。

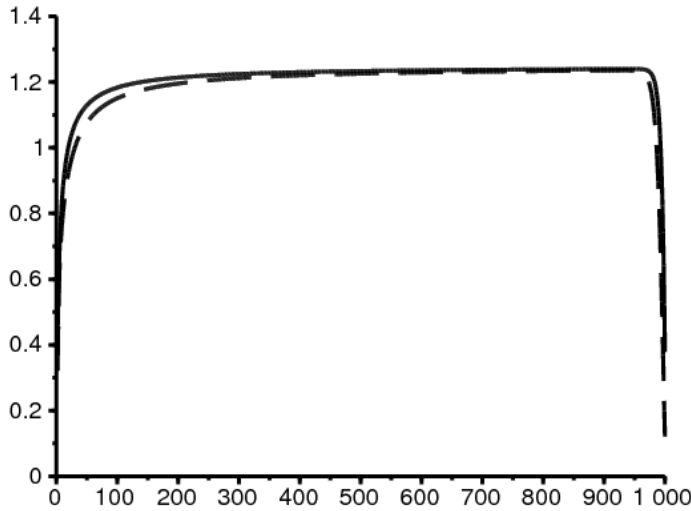


図2. ケース $a_1 = 2, 5$. なぞる $n^\beta (b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (実線) と $n^{\beta+1} (b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (点線) n . 打ち切り行列を使用します $\mathcal{M}^{(N)}$ と $N = 1000$.

5.2 ケース $m > 0$

私たちは疑います $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ どこに $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$. どちらの場合も、(4) の支配的な表現は

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

つまり、 ω 行列の固有値です $Q + (\beta - 1)D$. 確かに、私たちはフォームの解決策を探しているなら $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ 、私たちは (20) のように $\Pi = 1$. の場合は

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

私たちは持っています

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n \pm 1, i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1-\beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

これも式 (22) になります。これは、 $\beta = 1 + \alpha^*$ もし $\lambda_1'(1) > 1$ と $\beta = 2$ もし $\lambda_1'(1) \leq 0$. どちらの場合も、収束半径は $G_i(x)$ 1 になります。

6 特定のケースに戻ります $K = 2$

次によって満たされる2次の微分方程式を考えることができます。 $G_1(x)$ 一次微分システムではなく $G_1(x)$ と $G_2(x)$. 得る

$$\begin{aligned} &(1-x)^2(a_1x - b_1)(a_2x - b_2) \frac{d^2 G_1}{dx^2} \\ &+ (1-x) \left\{ [\omega + q_1 + a_1(1-2x) + b_1](a_2x - b_2) + (\omega + q_2)(a_1x - b_1) \right\} \frac{dG_1}{dx} \\ &+ [(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1q_2] G_1 = 0. \end{aligned}$$

で割る $(1-x)^2(a_1x - b_1)(a_2x - b_2)$ そして、有理分数を単純な要素に分解することにより、

$$0 = \frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2) - q_1 q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x - \frac{b_1}{a_1})(x - \frac{b_2}{a_2})}.$$

数を仮定します b_1/a_1 、 b_2/a_2 と1はすべて異なります。次の形式の微分方程式を認識します

$$\frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - k_0 - k'_0}{x - x_0} + \frac{1 - k_1 - k'_1}{x - x_1} + \frac{1 - k_2 - k'_2}{x - x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{k_0 k'_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{x - x_0} + \frac{k_1 k'_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_0)}{x - x_1} + \frac{k_2 k'_2 (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}{x - x_2} \right] \frac{G_1}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} = 0,$$

つまり、3つの特異点を持つリーマン微分方程式 (Roseau, 1997, p. 229) $x_0 = 1$ 、 $x_1 = b_1/a_1$ と $x_2 = b_2/a_2$ 。特徴的な出展者はそれぞれ

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

と α_+ と α_- (13) の解。したがって、解のセットはリーマン表記で書くことができます

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

(Roseau, 1997, p. 229) によれば、

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

私たちは定義します

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

微分超幾何方程式の場合に戻ります

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

平等に変換されます $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ 非調和関係の間。だから

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

超幾何関数は

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

表記あり $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ 。場合、 x が1の近傍で、変数 y は超幾何微分方程式の理論によれば、0の近傍で、定数があります κ_1 と κ_2 と

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

それを条件として $c \neq 1$ 、つまり $\alpha_- \neq \alpha_+$ 。フクシアンの出展者によるソリューション α_+ で $x = 1$ 対応する $\kappa_2 = 0$:

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

事件 $m < 0$

例として $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$ 。取る $\alpha_+ = 1$ に関連する固有関数 $\omega_1 = s(Q + D)$ 。選ぶ κ_1 だから $G_1(0) = 1$ 。だから

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

(13) から。私たちは定義します

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

これは、 x の値です。 $y = -1$ 。私たちは持っています $1 < \xi < b_1/a_1$ 。変数はしますかの減少 $0 < X < \xi$ の

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) / \left(\frac{b_2}{a_2} - 1 \right) \in]0, 1[$$

-1まで。もし $\xi < x < b_1/a_1$ 、式 (23) を置き換える必要があります

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

これは (C. Jordan、1896) の§182の式 (18) であり、引数は $\frac{y}{y-1}$ 1/2から1に成長します。

数値例 (15) をもう一度、 $a_1 = 2,5$ 。図3は生成関数を示しています $G_1(x)$ と $G_2(x)$ に関連付けられた固有ベクトルで構築 μ_N 。ここに $N = 4000$ 標準化あり $G_1(0) = 1$ 。生成シリーズを評価するためにホーナー法を使用します。それらを式 (23) および (24) と比較します。ここにあります $\xi \simeq 1,105$ 。2つの方法で得られる関数を重ね合わせることができるように、正規化の倍率を選択しました。

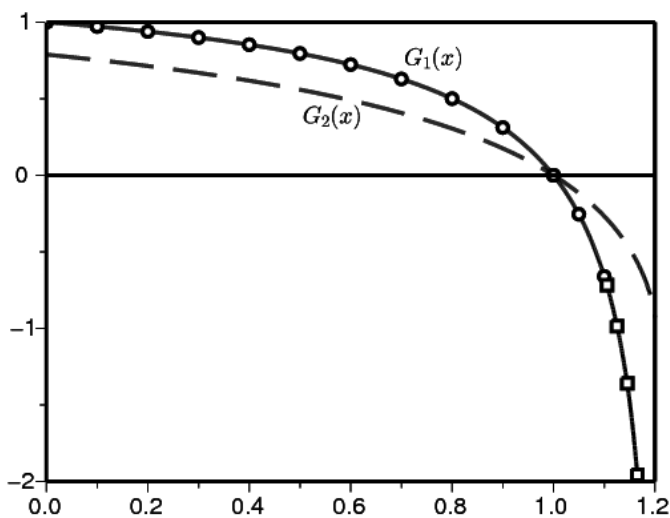


図3. ケース $a_1 = 2,5$ 。生成関数をトレースします $G_1(x)$ (実線) と $G_2(x)$ (点線) x の関数として。行列の計算に使用するもの $M^{(N)}$ と $N = 4000$ 。の式 (23) および (24) $G_1(x)$ 小さな円と正方形で表されます。

事件 $m > 0$ と $\lambda'_1(1) \leq 0$

例として $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$ 。私たちは今持っています

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

式 (23) は、変数 y 分岐する $x = b_1/a_1 < 1$ 。のために $0 < x < \xi$ 、 $y^{-1}0$ と1の間の数だけ-1に減少します。この区間を (C. Jordan、1896、§182) の式 (32) とします。

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

と $\alpha_+ = 1$ 、 $\omega_1 = s(Q+D)$ と κ_1 だから $G_1(0) = 1$ 。ただし、間隔 $\xi < x < 1$ 、(C. Jordan、1896、§182) の式 (34) をとります。 $(1-y)^{-1} 1/2$ から1に増加します。

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

数値例 (15) をもう一度、 $a_1 = 3, 2$ 。図4に式 (25) と (26) を示します。それらは、固有ベクトルで構築された生成関数とよく一致します。ここにあります $\xi \simeq 0, 97$ 。

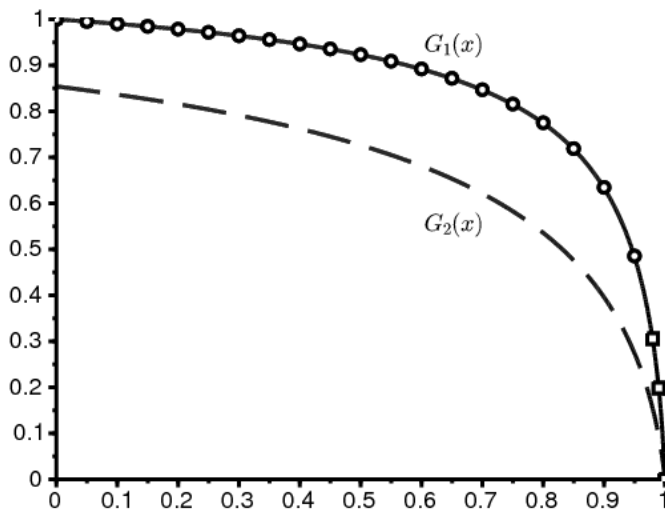


図4. ケース $a_1 = 3, 2$ 。式 (25) [小さい円] と (26) [小さい正方形] の比較 $G_1(x)$ に関連付けられた固有ベクトルの生成関数 μ_N (実線)、 $N = 10^4$ 。

事件 $m > 0$ と $\lambda'_1(1) > 0$

式 (25) および (26) は、たとえ次の場合でも、おそらく無効になります。 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$ 。対数項を含む式に置き換える必要があります。もし $a_1 = 3, 5$ 、私たちは持っています $\Lambda = -0, 2$ と $\alpha^* = 0, 6$ 式 (14) に従います。この場合、示唆的なグラフを取得できませんでした。

7 含まれるマルコフ連鎖

亜臨界接続プロセスの場合 Z_n ($(n = 0, 1, \dots)$) 同一に分散された独立した環境を持つランダムな環境では、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \quad (27)$$

どこに $f(x)$ は母関数を表す (Dekking、1988; Geiger et al.、2003)。 μ を (27) の右辺の最小値とします。「弱い亜臨界」の場合

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

私たちは持っています

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

一定の $c > 0$ 。「非常に未臨界」の場合

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

私たちは持っています $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ と

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

一定の $c > 0$ 。次の場合、プロセスは未臨界です。 $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$ 。

誕生と死のプロセスに戻りましょう。2つの環境の特定のケースに限定します。 $K = 2$ 。私たちは定義します

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

もし $a_i \neq b_i$ 、それは時間後の個体数の生成関数です t 環境内の時間0の個人から開始 i (ヒリオン、1986)。とにかく

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

しばらくして t_1 、環境が状態1から状態2に切り替わります。しばらくすると t_2 、環境は状態1に戻ります。関連する確率密度は $q_1 e^{-q_1 t_1}$ と $q_2 e^{-q_2 t_2}$ 。次に、含まれているマルコフ連鎖を考えます Z_n ($n = 0, 1, \dots$) 時間0と時間の間の変化のみを見る $t_1 + t_2$ 。それを世代と呼びましょう。生成関数は

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

特に、 $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$ 。この分岐プロセスは重要ではありません。確かに、

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

なぜなら $R_0 < 1$ 。接続プロセスが非常に重要でない場合

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

この場合、

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

注意してください $d_1 < 0$ と $d_2 < 0$ 、その後、プロセスは非常に重要です。弱臨界未満のケースでは、

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

と少し計算が示しています

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2} \right)^2}.$$

この数は < 1 もしそうなら $R_0 < 1$ 。

私たちの数値例では、式 (28) は、含まれるマルコフ連鎖が次の場合に強く未臨界であることを示しています。 $a_1 < 3, 4$ 。奇妙なことに、このしきい値はケースを分離するしきい値とは異なります $\Lambda = s(Q + D)$ と $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ と $0 < \alpha^* < 1$ 誕生と死の線形プロセスのために。この最後のしきい値は $\approx 3,2829$ セクション3から。ただし、含まれているマルコフ連鎖が絶滅に収束する速度は、連続時間プロセスが同じことを行う速度とはほとんど関係がありません。

8まとめ

固有値と固有ベクトルの振る舞いに関しては、まだ解明されていない点がたくさんあります。可能な一般化の中では、係数 a_i 、 b_i と $Q_{i,j}$ 関数です T -時間の定期的 t 、その後 ω_1 に等しくなります $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ 、どこ $f(\cdot)$ 支配的なフロケ指数を指定し、スペクトル境界を置き換えます。

謝辞

Vincent Bansaye、Anne Duval、Bruno Sericolaのコメントと提案に感謝します。

参考文献

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. *J Math Biol* 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. *SIAM J Matrix Anal Appl* 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D’Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv Appl Prob* 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. *Stoch Proc Appl* 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) *Éléments d’analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) *Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire*. *Ann I H Poincaré-Pr* 39 : 593–620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d’analyse de l’École polytechnique*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphia
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. *Comment Math Helv* 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) *Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle*. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl* 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. *Ann I H Poincaré B* 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l’agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris