

Über die unterkritischen linearen Prozesse von Geburt und Tod in einer zufälligen Umgebung

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers, Paris, Frankreich
nicolas.bacaer@ird.fr

Zusammenfassung

Wir erhalten eine explizite Formel für die Extinktionsrate linearer unterkritischer Geburts- und Todesprozesse in einer zufälligen Umgebung. Diese Formel wird durch numerische Berechnung des Eigenwerts des größten Realteils für die abgeschnittene Matrix der Master-Gleichung veranschaulicht. Die Erzeugungsfunktion des zugehörigen Eigenvektors überprüft ein singuläres System von Differentialgleichungen vom Fuchs-Typ. Besonderes Augenmerk wird auf den Fall zweier Umgebungen gelegt, was zu einer Riemannschen Differentialgleichung führt.

1 Einleitung

Angenommen, die Umgebung schwingt zwischen einer endlichen Anzahl K von Zuständen ($K \geq 2$) nach einer homogenen zeitkontinuierlichen Markov-Kette. $Q = (Q_{i,j})$ ist die Matrix, deren Transponierte der infinitesimale Generator dieser Kette ist:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

Wir nehmen an, dass die Matrix Q nicht reduzierbar ist. Es gibt einen einzelnen Vektor $u = (u_i)$ mit

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Sericola, 2013, S. 152).

Die Anzahl der Personen, die sich in dieser zufälligen Umgebung entwickeln, beträgt n . In der Umgebung i ($1 \leq i \leq K$), nehmen wir an, wir haben einen linearen Prozess von Geburt und Tod von Parametern

- $n a_i$ für Geburten
- $n b_i$ für die Toten,

mit $a_i > 0$ und $b_i > 0$. Mit anderen Worten, während eines infinitesimalen Zeitintervalls dt ,

- mit einer Wahrscheinlichkeit $a_i dt$, jedes Individuum bringt ein neues Individuum zur Welt,
- Jeder Einzelne stirbt mit einer Wahrscheinlichkeit $b_i dt$.

Angenommen, zum Zeitpunkt $t = 0$ gibt es n_0 Einzelpersonen ($n_0 \geq 1$) und die Umwelt ist i_0 . Die Wahrscheinlichkeit, n Individuen zum Zeitpunkt t in der Umgebung i zu haben, ist $p_{n,i}(t)$. Also haben wir $p_{n,i}(0) = 1$ wenn $(n, i) = (n_0, i_0)$ und $p_{n,i}(0) = 0$ sonst. Die Hauptgleichung lautet

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

für $n \geq 0$ und $1 \leq i \leq K$. Aber $p_{n-1,i}$ fehlt für $n = 0$. Wie (Lotka, 1939) definieren wir

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

Das werden wir immer annehmen $R_0 < 1$: Die Bevölkerung geht mit ziemlicher Sicherheit aus (Cogburn und Torrez, 1981; Bacaër und Ed-Darraz, 2014). Es ist das unterkritische Regime. Wenn $t \rightarrow +\infty$ haben wir

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

Die Extinktionsrate existiert und hängt nicht von $n \geq 1$ oder i ab

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(Collet et al., 2013, Abschnitt 4.5). Es hängt auch nicht vom Ausgangszustand ab (n_0, i_0) . Das Problem besteht darin, diese Rate explizit zu bestimmen.

Wir verwenden einige Notationen:

- $\Re(\cdot)$ ist der Realteil einer komplexen Zahl
- $\sigma(M)$ ist das Spektrum einer Matrix M .
- $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ ist die spektrale Grenze
- A ist die Diagonalmatrix $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$.

Wenn die Matrix M Koeffizienten außerhalb der Diagonale hat, die positiv oder Null sind, was unten immer der Fall sein wird, folgt aus dem Satz von Perron und Frobenius, dass $s(M)$ ist auch ein Eigenwert von M .

In Abschnitt 2 verwenden wir ein Ergebnis aus (D'Souza und Hambly, 1997) zu Verzweigungsprozessen in einer zufälligen Umgebung, um dies zu zeigen

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

Wir untersuchen auch die Variationen der Funktion $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ und die Ableitung $\lambda_1'(\alpha)$, was zur Unterscheidung von drei Fällen führt:

- der wo $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$;;
- der wo $m > 0$ und $\lambda_1'(1) \leq 0$;;
- der wo $m > 0$ und $\lambda_1'(1) > 0$.

In den ersten beiden Fällen wird das Minimum Λ im Intervall $[0,1]$ bei $\alpha = 1$ erreicht, so dass $\omega_1 = s(Q + D)$.

In Abschnitt 3 beobachten wir, dass die Spektralgrenze μ_N der abgeschnittenen Matrix der Hauptgleichung bildet eine zunehmende Folge. Dann berechnen wir numerisch μ_N in einer Reihe von Beispielen. Wir stellen insbesondere die Langsamkeit fest, zweifellos logarithmisch, mit der μ_N konvergiert zu ω_1 im dritten oben genannten Fall.

Ab Abschnitt 4 interessieren uns die anderen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren, für die wir nur sehr teilweise Ergebnisse erhalten. Wir transformieren zuerst das Eigenwertproblem

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

in ein singuläres Differentialsystem vom Typ Fuchs (Methé, 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

für die Generatorfunktion

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

Wenn der Eigenvektor $(\pi_{n,i})$ nimmt geometrisch in Bezug auf n ab, dann ist der Eigenwert ω notwendigerweise gleich dem Eigenwert einer Matrix $Q + \nu D$ mit ganzzahl $\nu \geq 0$. Wenn $m < 0$ und $\omega = s(Q + \nu D)$ Wir konstruieren effektiv analytische Lösungen des Systems (5) in der Nähe von $x = 1$. Die charakteristische Gleichung des Fuchsschen Systems lautet

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

mit anderen Worten, ω ist ein Eigenwert der Matrix $Q + \alpha D$. Diese charakteristische Gleichung wird erhalten, indem nach Lösungen gesucht wird, die sich wie folgt verhalten $(1-x)^\alpha$ in der Nähe von $x = 1$.

Lassen Sie uns den dritten Fall untersuchen: die Funktion $\lambda_1(\alpha)$ erreicht sein Minimum im Inneren $]0, 1[$. Wenn

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- die Entwicklung von $G_i(x)$ in der Nähe von $x = 1$ enthält einen logarithmischen Term,

so $\alpha = \alpha^*$ und $\omega = \Lambda$. Darüber hinaus erscheinen in der Fuchs-Theorie die logarithmischen Terme, wenn die charakteristische Gleichung (7) eine Doppelwurzel hat, insbesondere den Zweig $\omega = s(Q + \alpha D)$. Wegen der Konvexität der Funktion $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ Dies geschieht nur für $\omega = \Lambda$.

In Abschnitt 5 untersuchen wir direkt das asymptotische Verhalten des Grenzwerteigenvektors $\pi = (\pi_{n,i})$ verbunden mit ω_1 . Abschnitt 6 stellt die Verknüpfung her, wenn $K = 2$ mit einer Riemannschen Differentialgleichung. In Abschnitt 7 interessieren wir uns für die eingeschlossene Markov-Kette, wobei letztere in den Rahmen der Arbeit von (Dekking, 1988) und (Geiger et al., 2003) fällt. Wir stellen fest, dass die Schwelle zwischen den schwach und stark unterkritischen Regimen nicht dieselbe ist wie die, wo $\Lambda \neq s(Q + D)$.

Um unser Problem in Bezug auf einige andere Werke besser zu positionieren, stellen wir fest, dass das System (1) ein "inhomogener Prozess von quasi Geburt und Tod" ist; siehe zum Beispiel (Sericola, 2013, S. 350) oder (Latouche und Ramaswami, 1999, Kapitel 12), die die stationäre Verteilung, aber nicht die Konvergenzrate dazu diskutieren. Darüber hinaus in einer konstanten Umgebung mit

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

wir haben $D = (a - b)I$, wo I ist die Identitätsmatrix. Also $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ und Formel (3) ergibt $\omega_1 = a - b$. Dies ist entweder durch direkte Berechnung (Hillion, 1986, Kapitel V) oder als Sonderfall der Ergebnisse von Karlin und McGregor zu Geburts- und Todesprozessen bekannt (Collet et al., 2013, Abschnitt 5.9.2). Die Verallgemeinerungen dieser letzteren Ergebnisse zu den „Quasi-Prozessen von Geburt und Tod“ (Clayton, 2010) betreffen nur Fälle, in denen das „Spektrum“ real ist. Dies ist in unserem Modell im Allgemeinen nicht der Fall. Schließlich greift Modell (1) als Linearisierung bestimmter nichtlinearer Populationsmodelle und insbesondere epidemischer Modelle ein (Bacaër, 2016).

2 Die Formel für die Extinktionsrate

2.1 Zeitliche Diskretisierung der Umwelt und Überschreitung der Grenze

M^T ist die Transponierte einer Matrix M (oder eines Vektors). Wir wählen einen kleinen Zeitschritt $\delta > 0$. Die Matrix

$$\mathcal{P} = e^{Q^T \delta}$$

ist die Matrix einer Markov-Kette in diskreter Zeit. Wir haben $\mathcal{P}_{i,j} > 0$ für alles i und j , da die Matrix Q nicht reduzierbar ist. Die Umgebung bleibt für einen Zeitschritt δ im Zustand i blockiert. Dann springt die Umgebung mit einer Wahrscheinlichkeit in den Zustand j $\mathcal{P}_{i,j}$. Im Längenzzeitintervall δ folgt die Population einem linearen Prozess von Geburt und Tod von Parametern $n a_i$ und $n b_i$ wenn sich die Umgebung im Zustand i befindet. Somit erzeugt ein Individuum im Durchschnitt

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

Einzelpersonen. Wir haben $0 < m_i < +\infty$. Wir befinden uns daher im Kontext eines Verzweigungsprozesses in einer Markov-Umgebung. Einige Notationen:

- Wenn $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ ist eine Folge von k durchquerten Umgebungen,

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- Für $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

wo $\mathbb{E}(\cdot)$ bezeichnet die mathematische Erwartung

- Z_k ist die Größe der Population am Ende des k -Größenzeitschritts δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha)$ die Matrix gegeben durch $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \operatorname{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

- $\rho(\Sigma(\alpha))$: der spektrale Radius der positiven Matrix $\Sigma(\alpha)$.

Also $\mathbb{P}(Z_k > 0)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bevölkerung nicht ausgestorben ist. Folgerung 1.8 von (D'Souza und Hambly, 1997) zeigt dies

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

In unserem Fall die Erwartung von $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ wird explizit berechnet:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{\xi_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

Aus (8) und (10) folgt, dass

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

Es ist auch eine analytische Funktion von α , weil $\rho(\Sigma(\alpha))$ ist ein einfacher Eigenwert der positiven Matrix $\Sigma(\alpha)$. Die Grenze (9) ist daher gleich $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Die Extinktionsrate ω in kontinuierlicher Zeit ist daher

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

Nehmen wir insbesondere $\delta = 1/h$ mit einer ganzen Zahl $h \geq 1$. Also $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$. Aber

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

aus der Formel von Sophus Lie. Der spektrale Radius ist eine stetige Funktion

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Weil $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ schließen wir daraus

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Schließlich stellt Satz 4.12 von (Collet et al., 2013) die Gleichheit der mit (2) definierten Extinktionsraten oder mit der Wahrscheinlichkeit der Nicht-Extinktion wie auf der linken Seite von Gleichung (9) sicher. Wir haben also die Formel für die Extinktionsrate in kontinuierlicher Zeit gefunden.

2.2 Untersuchung der Funktion $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

Wir definieren

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

Satz 1 .

- Wenn $m \leq 0$ dann $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Wenn $m > 0$ und $\lambda_1'(1) \leq 0$, dann haben wir auch $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Wenn $m > 0$ und $\lambda_1'(1) > 0$, dann gibt es eine einzigartige $\alpha^* \in]0, 1[$ mit $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

Beweis . Wenn $v = (v_i)$ ist ein Vektor,

- $v \geq 0$ wenn $v_i \geq 0$ für alles i
- $v > 0$ wenn $v \geq 0$ und $v \neq 0$
- $v \gg 0$ wenn $v_i > 0$ für alles i .

Wir verwenden identische Notationen für die Matrizen.

Nehmen wir noch einmal die Argumentation von Abschnitt 9 von (Bacaër, 2016), aber mit $R_0 < 1$ und nicht $R_0 > 1$. Die Matrix $Q + \alpha D$ ist für alle α irreduzibel, weil die Matrix Q irreduzibel und die Matrix D diagonal ist. Also $\lambda_1(\alpha)$ ist ein einfacher Eigenwert der Matrix $Q + \alpha D$,

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1,$$

wo $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das übliche Skalarprodukt reeller Vektoren. $\lambda_1(\alpha)$ ist auch ein einfacher Eigenwert der transponierten Matrix $Q^\top + \alpha D$,

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^\top + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

Aus dem einfachen Eigenwert-Störungssatz wissen wir, dass die Funktion $\lambda_1(\alpha)$ ist differenzierbar und

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

Besonders für $\alpha = 0$ haben wir $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$, $w_1(0) = u$, $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$ und

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

weil $R_0 < 1$.

Wenn $m \leq 0$, die Funktion $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ nimmt ab, weil $D \leq 0$. Betrachten Sie nun den Fall, in dem $m > 0$. Denken Sie daran $\lambda_1'(0) < 0$. Die Funktion $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ ist konvex (Cohen, 1981). Also $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$ ist eine zunehmende Funktion. Darüber hinaus, wenn $\alpha \rightarrow +\infty$ haben wir $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$. Die Funktion $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ ist in diesem Fall streng konvex, da es nicht affin ist (Nussbaum, 1986). Es gibt also eine einzigartige $\alpha^* > 0$ mit $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$.

Es gibt also drei Fälle:

- Wenn $m \leq 0$ dann $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Wenn $m > 0$ und $\lambda_1'(1) \leq 0$ dann $\alpha^* \geq 1$ und $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$ nimmt über das Intervall ab $[0, 1]$, also haben wir noch $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- Wenn $m > 0$ und $\lambda_1'(1) > 0$ dann $\alpha^* \in]0, 1[$ und $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

2.3 Der Fall von zwei Umgebungen

Wir nehmen an $K = 2$. Wenn $Q_{i,i} = -q_i$ für $i = 1, 2$ dann

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

Die charakteristische Gleichung $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ ist geschrieben

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Diese Beziehung zwischen ω und α beschreibt eine Hyperbel in der Ebene (ω, α) . Es kann auch geschrieben werden

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

Darüber hinaus $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ ist so, dass

$$2 \lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

und

$$2 \lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Wenn $m \leq 0$ oder wenn $m > 0$ und $\lambda_1'(1) \leq 0$ haben wir $\Lambda = \lambda_1(1)$. Wenn $m > 0$ und $\lambda_1'(1) > 0$ müssen wir haben $d_1 d_2 < 0$. Nehmen wir in diesem Fall zum Beispiel an $d_1 > 0$ und $d_2 < 0$. Durch Aufheben der Diskriminante von (13) finden wir nach einer kleinen Berechnung, dass

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Beachten Sie das $\Lambda = 0$ und $\alpha^* = 0$ wenn $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ d.h. wenn $R_0 = 1$.

3 Die abgeschnittene Matrix

Wenn $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ dann wird die Hauptgleichung geschrieben $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$, wo \mathcal{M} ist eine unendliche Matrix. Schneiden wir die Matrix \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

mit $S = A + B$. Wir definieren $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$.

Satz 2. Für alle $N \geq 1$ haben wir $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$. Die Fortsetzung (μ_N) hat daher eine Grenze, wenn $N \rightarrow +\infty$ nämlich ω_1 .

Beweis. Eine Metzler-Matrix ist eine Matrix, in der alle Koeffizienten außerhalb der Diagonale ≥ 0 sind. Die Matrix $\mathcal{U}^{(N)}$ ist eine irreduzible Metzler-Matrix, weil Q irreduzibel ist, $a_i > 0$ und $b_i > 0$ für alles i . Wir können daher die Folgerungen des Satzes von Perron und Frobenius bezüglich der Spektralgrenze von Metzler-Matrizen verwenden; siehe zum Beispiel (Nkague Nkamba, 2012, Theorem 30). Wenn $e = (1, \dots, 1)^T$ so

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Weil $e \gg 0$ Daraus schließen wir $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$. Also

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

μ_N ist ein Eigenwert der Matrix $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

Vektor $\mathcal{W}^{(N)}$ besteht aus N Blöcken der Größe K , $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$. Betrachten Sie den Vektor

$$\tilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 , die auch von Größe K . Also

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{(N)} & \vdots & \\ \dots & 0 & (N+1)B \\ \dots & 0 & NA & Q - (N+1)S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Weil $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ haben wir $\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} > \mu_N \widetilde{\mathcal{W}}$. Weil $\widetilde{\mathcal{W}} > 0$ Daraus schließen wir $\mu_{N+1} > \mu_N$.

Nehmen wir als numerische Werte

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

Also $u_1 = u_2 = 0,5$. Der Parameter a_1 variiert zum Beispiel zwischen 2 und 5; diese Obergrenze entspricht $R_0 = 1$. Für kleine Werte von N typischerweise bis zu $N = 10^3$ Software wie Scilab berechnet das gesamte Spektrum der Matrix $\mathcal{U}^{(N)}$. Ansonsten berechnen wir den kleinsten Eigenwert von $-\mathcal{U}^{(N)}$ und den entsprechenden Eigenvektor durch ein iteratives Verfahren, das auf die inverse Matrix angewendet wird. Man nutzt die tridiagonale Blockstruktur für die Inversion bei jeder Iteration (Artalejo et al., 2013). Mit diesem Algorithmus können wir so weit gehen $N = 10^6$ ohne zu viele Probleme.

Abbildung 1 zeigt μ_N abhängig von a_1 für N fest aber groß. Der iterative Algorithmus wird gestoppt, wenn zwei aufeinanderfolgende Schätzungen von μ_N unterscheiden sich weniger als 10^{-4} . Die Figur zeigt auch in gepunkteten Linien und nach a_1 die durch Formel (3) gegebene Zahl Λ , die ist $\lambda_1(1)$ wenn $\lambda'_1(1) \leq 0$ und was durch Formel (14) gegeben ist, wenn $\lambda'_1(1) > 0$. Wir haben $\lambda'_1(1) < 0$ wenn $a_1 < a_1^*$ und $\lambda'_1(1) > 0$ wenn $a_1 > a_1^*$ mit $a_1^* \simeq 3,2829$. Die Übereinstimmung zwischen Λ und der Grenze von (μ_N) scheint wahrscheinlich. Die Konvergenz ist jedoch extrem langsam, möglicherweise logarithmisch, wenn R_0 kommt nahe an 1, besonders wenn $a_1 > a_1^*$.

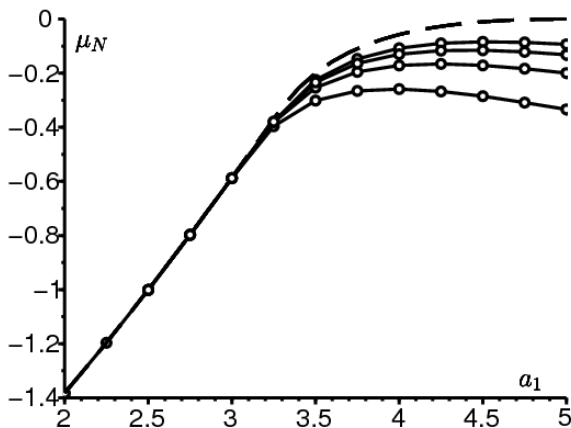


Abbildung 1. Gepunktete Linie: Λ gegeben durch Formel (3) als Funktion von a_1 . Durchgehende Linien mit Punkten: μ_N für $N = 10^3, 10^4, 10^5$ und 10^6 (von unten nach oben).

4 Eigenvektoren und andere Eigenwerte

Wir sind jetzt an der Grenze interessiert $N \rightarrow \infty$ des Eigenvektors zugeordnet mit μ_N sowie zu den anderen Eigenwerten und Vektoren. In dieser Hinsicht werden wir nur sehr teilweise Ergebnisse erhalten.

4.1 Ein fuchsianisches System

$\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{C} ist die Menge der komplexen Zahlen und $'$ die Ableitung in Bezug auf die Variable x .

Satz 3.

- Wenn wir Gleichung (4) haben, mit $\omega \in \mathbb{C}$ und $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$,
- wenn die Erzeugungsreihe (6) einen Konvergenzradius $\geq R$ hat,

so $G_i(x)$ ist die Lösung des Systems (5) für $x \in \mathbb{C}$, $|x| < R$ und $1 \leq i \leq K$.

Beweis. Wir haben

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

Wie im klassischen Fall mit konstanter Umgebung (Hillion, 1986) multiplizieren wir (4) mit x^n . Die Summe aller $n \geq 0$ ergibt

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i) x G_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Dies entspricht (5).

Anmerkungen.

- Wir stellen fest, dass (5) ein Eigenwertproblem für ein singuläres Differentialsystem ist. Dieses System ist vom Typ Fuchs, wenn $a_i \neq b_i$ für alles i (Méthée, 1959). Das System hat eine Singularität in $x = 1$ und in $x = b_i/a_i$ für $1 \leq i \leq K$. Wir haben $b_i/a_i < 1$ wenn $a_i > b_i$. Wir können das System auch schreiben

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Ein Beispiel für eine skalare Fuchs-Typ-2-Differentialgleichung erschien in der Untersuchung quadratischer Geburts- und Todesprozesse in einer konstanten Umgebung (Picard, 1965).

4.2 Eigenwerte bei einem Konvergenzradius von > 1

Satz 4 .

- Wenn wir Gleichung (4) haben, mit $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{N \times K}$ und $\pi \neq 0$,
- wenn die Erzeugendensreihen (6) einen Konvergenzradius haben, der streng größer als 1 ist,

dann gibt es eine ganze Zahl $\nu \geq 0$ so dass ω ein Eigenwert der Matrix $Q + \nu D$.

Beweis . Lasst uns durch das Absurde argumentieren. Angenommen, das für alles $\nu \geq 0$, ω ist kein Eigenwert von $Q + \nu D$. Die Funktionen $G_i(x)$ sind in einer Scheibe analytisch $|x| < R$ mit $R > 1$. Wenn x gegen 1 in (5) konvergiert:

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Aber ω keinen Eigenwert von Q . Also $G_i(1) = 0$ für alles i .

Sei eine ganze Zahl $\nu \geq 1$. Nehmen wir an, wir haben durch Induktion demonstriert $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$. Wir leiten die ν -fache Gleichung (5) in Bezug auf x ab und verwenden die Leibniz-Formel für das Produkt von $(1-x)(a_i x - b_i)$ und $G_i^{(\nu)}(x)$. Wir haben

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

wo $\binom{\nu}{k}$ bezeichnet den Koeffizienten des Binomials. Das Polynom $(1-x)(a_i x - b_i)$ ist vom Grad 2 in x . Nur Ausdrücke mit $0 \leq k \leq 2$ sind in der Summe links ungleich Null:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

Wir lassen x gegen 1 konvergieren und finden dies mit der Induktionshypothese

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

Jedoch ω keinen Eigenwert der Matrix $Q + \nu D$. Also $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ für alles i .

Das haben wir also gezeigt $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ für alles i und für alle $\nu \geq 0$. Da die Funktion $G_i(x)$ ist analytisch, haben wir $G_i(x) = 0$ in der Nähe von $x = 1$ und sogar $G_i(x) = 0$ überall auf der Scheibe $|x| < R$ nach dem Prinzip der analytischen Erweiterung. Also $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$ für alles $n \geq 0$ und $1 \leq i \leq K$. Dies widerspricht der Hypothese $\pi \neq 0$.

Anmerkungen.

- Die Eigenwerte der Matrizen $Q + \nu D$ sind nicht unbedingt alle reell, so dass das System (5) weder die Theorie von Weyl und Kodaira (Dieudonné, 2003) noch die Studie von (Clayton, 2010) ist) zu bestimmten Quasi-Prozessen von Geburt und Tod. Diese Eigenwerte sind dennoch alle real, wenn $K = 2$ ist . Weil der Eigenwert $s(Q + \nu D)$ ist sehr real; Der andere Eigenwert ist ebenfalls real.
- In der Nähe von $x = 1$ kann das System (16) geschrieben werden

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

Wenn $G(x)$ ist der Vektor $(G_i(x))$ ist das System von der Form

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

mit

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

und $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$. Ist der Konvergenzradius der Reihe $G_i(x)$ ist > 1 , dann $G_i(x)$ ist analytisch in einer Nachbarschaft von $x = 1$. Das obige System hat also eine analytische Lösung in der Nähe von $x = 1$. Nach (Gantmacher, 1966, S. 155) existiert eine ganze Zahl $\nu \geq 0$ für die ν ein Eigenwert von ist Ω_{-1} . Es gibt also einen Vektor $w \neq 0$ mit

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

Also

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

und ω ist ein Eigenwert von $Q + \nu D$. Dies wurde in Satz 4 elementar demonstriert.

Beispiel. Nehmen Sie die Zahlenwerte (15) mit $a_1 = 2,5$. In diesem Fall haben wir $m < 0$. Für $N = 1000$, die ersten zwanzig Eigenwerte der Matrix $\mathcal{M}^{(N)}$ sind grob in der folgenden Tabelle angegeben:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,456214.

Nun die Eigenwerte von Q sind 0 und -2 , die von $Q + D$ sind -1 und $-3,5$, die von $Q + 2D$ sind $-1,6972244$ und $-5,3027756$, die von $Q + 3D$ sind $-2,2877855$ und $-7,2122145$, die von $Q + 4D$ sind $-2,8377223$ und $-9,1622777$ usw. Sie sind in der obigen Tabelle gut zu finden. Zusammenfassend scheint es, dass die Eigenwerte von $\mathcal{M}^{(N)}$ konvergieren wenn $N \rightarrow +\infty$ in Richtung der Eigenwerte von Matrizen $Q + \nu D$ für $\nu = 0, 1, 2 \dots$ und μ_N konvergiert zu $s(Q + D)$. Denken Sie daran, dass hier $s(Q + D) = \Lambda$ weil $m < 0$.

4.3 Der Fall wo $a_i < b_i$ für alles i

Wir nehmen an $m < 0$. Lassen Sie uns formal eine Lösung in der Nähe von $x = 1$ des Systems (5) der Form suchen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n. \tag{17}$$

Wir haben

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

Wir haben $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Wir identifizieren die Koeffizienten von $(1-x)^n$. Wir bekommen

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

für alles $n \geq 0$. $c_{n-1,i}$ fehlt, wenn $n = 0$. Mit $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$, (17) ist eine Lösung von (5) wenn

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{18}$$

Eine erste Art von Lösung wird durch Auswahl erhalten ω unter den Eigenwerten von Q und c_0 ein entsprechender Eigenvektor. Die Beziehung (18) erlaubt zu berechnen c_n für $n \geq 1$ vorausgesetzt, dass die Matrix $Q + nD - \omega I$ ist immer invertierbar.

Eine zweite Art von Lösung wird durch Auswahl erhalten $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ mit $\nu \geq 1$, ω ein Eigenwert von $Q + \nu D$ und c_ν ein zugehöriger Eigenvektor. Dann berechnen wir c_n für $n \geq \nu + 1$ mit Gleichung (18), vorausgesetzt, dass die Matrix $Q + nD - \omega I$ ist immer invertierbar.

Nehmen wir insbesondere $\omega = s(Q + \nu D)$ mit einer ganzen Zahl $\nu \geq 0$. Weil $a_i < b_i$ für alles i haben wir $D < 0$. Darüber hinaus $Q + \nu D$ ist nicht reduzierbar. Also für jede ganze Zahl $n > \nu$ haben wir

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

Also $s(Q + nD - \omega I) < 0$. Die Matrix $Q + nD - \omega I$ ist eine invertierbare Metzler-Matrix und $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$. Wir haben

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$$

für alles $n \geq 1$. Wenn $n \rightarrow +\infty$,

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

so

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

Die Reihe (17) ist konvergent für $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$. Die Serie (17) für $1 \leq i \leq K$ konvergieren alle für $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$.

4.4 Ein Konvergenzradius von 1

In den beiden vorhergehenden Abschnitten haben wir die Eigenwerte der Matrizen $Q + \nu D$ für eine ganze Zahl $\nu \geq 0$ diskutiert. (Bacaër und Ed-Darraz, 2014) haben jedoch bereits ein Beispiel hervorgehoben, in dem $R_0 < 1$ aber wo der Eigenwert $s(Q + D)$ der Matrix $Q + D$ ist streng positiv: einfach nehmen $q_1 = q_2 = 1$, $a_1 = 2,7$, $a_2 = 0,8$, $b_1 = b_2 = 2$ (daher $a_1 > b_1$). Unser anfängliches Problem kann keinen positiven Eigenwert haben. Wir schließen insbesondere, dass die Erzeugungsreihe $G_i(x)$ haben nicht immer einen Konvergenzradius > 1 . Der folgende Satz verknüpft das Verhalten von $G_i(x)$ in der Nähe von $x = 1$ mit dem Parameter α .

Satz 5.

- Wenn wir Gleichung (4) haben, mit $\omega \in \mathbb{C}$, $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{N \times K}$ und $\pi \neq 0$,
- wenn die Erzeugungsreihe (6) einen Konvergenzradius von 1 hat,
- wenn es eine reelle Zahl gibt $\alpha > 0$, eine ganze Zahl $J \geq 0$ und analytische Funktionen $g_{i,j}(x)$ in einer Scheibe zentriert in $x = 1$ mit

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

über ein Intervall $(1-\varepsilon, 1)$ mit $\varepsilon > 0$,

- wenn der Vektor $(g_{i,j}(1))$ ist nicht Null,

so ω ist ein Eigenwert der Matrix $Q + \alpha D$.

Beweis. Wir haben

$$G'_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x).$$

$G_i(x)$ ist die Lösung von Gleichung (5) für $|x| < 1$. Wir teilen durch $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$. Wir haben

$$\begin{aligned}
& \omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\
& + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\
& = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x).
\end{aligned}$$

Mit $x \rightarrow 1$ bekommen wir

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j} g_{j,J}(1).$$

Also ω ist ein Eigenwert der Matrix $Q + \alpha D$.

Hinweis. Die Form der Funktion $G_i(x)$ in Satz 5, der Potenzfunktion und ein logarithmisches Polynom kombiniert, ist das, was von einer Lösung eines Fuchs-Systems in der Nähe einer Singularität erwartet werden kann (Gantmacher, 1966, S. 159).

4.5 Der Fall wo $m > 0$ und $\lambda'_1(1) > 0$

Satz 6. Wir gehen davon aus: $m > 0$ und $\lambda'_1(1) > 0$. In diesem Fall $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ mit $\alpha^* \in]0, 1[$. Wir nehmen an: $\alpha > 0$ und $\omega = s(Q + \alpha D)$.

- Wenn wir Gleichung (4) haben, mit $\omega \in \mathbb{C}$ und $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- wenn die zugehörige Erzeugendenserie $G_i(x)$ haben einen Konvergenzradius von 1
- wenn die $G_i(x)$ kann in einem Intervall geschrieben werden $(1 - \varepsilon, 1)$ mit $\varepsilon > 0$ in der Form

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

mit $J \geq 1$ und ein Vektor $(g_{i,j,0})_{1 \leq j \leq K}$ das ist nicht Null,

so $\alpha = \alpha^*$ und $\omega = \Lambda$.

Beweis. In der Tat,

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

Wir haben $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$. Weil $G_i(x)$ ist eine Lösung von (5) auf $|x| < 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
& \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\
& - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\
& + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\
& = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}.
\end{aligned}$$

Ausdrücke in $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ und in $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$ muss jeder stornieren:

$$\begin{aligned}
\omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\
\omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}.
\end{aligned}$$

Wir definieren $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq j \leq K}$. Wir haben

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

Weil $\omega = s(Q + \alpha D)$ und $\gamma_J \neq 0$ zeigt die erste Gleichung das γ_J ist ein Eigenvektor der Matrix $Q + \alpha D$ mit dem Eigenwert verbunden $s(Q + \alpha D)$. Mit den Notationen von Abschnitt 2.2 schließen wir, dass es eine Konstante gibt $\kappa \neq 0$ mit $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$. Außerdem sehen wir, dass die zweite Gleichung die Form annimmt

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

Die Matrix $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ hat einen eindimensionalen Kern, geführt von $w_1(\alpha)$. Noch mit den Notationen von Abschnitt 2.2 die transponierte Matrix $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ hat einen eindimensionalen Kern, geführt von $v_1(\alpha)$. Das Skalarprodukt von (19) mit $v_1(\alpha)$ geben

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

Nach (12) entspricht dies $\lambda'_1(\alpha) = 0$. Mit $m > 0$ und $\lambda'_1(1) > 0$ Dies impliziert, dass $\alpha = \alpha^*$. Also $\omega = \Lambda$.

5 Asymptotisches Verhalten von Eigenvektoren

5.1 Der Fall wo $m < 0$

Lassen Sie uns nun das Verhalten für n groß eines Eigenvektors untersuchen $(\pi_{n,i})$ mit dem Eigenwert verbunden w_1 . Versuchen wir direkt eine Lösung von (4) mit

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Für n groß haben wir

$$(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta}(1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta}(1-\delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

und

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

Also

$$n \pi_{n,i} \simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

$$(n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} \simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

für n groß. Wir sehen, dass die Ausdrücke in $\Pi^n/n^{\beta-1}$ in (4) geben

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

Also

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

Wenn $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ nehmen wir $\Pi = a_1/b_1$, $k_i \neq 0$ und $k_i = 0$ wenn $i \neq 1$. Mit $q_i = -Q_{i,i}$, Ausdrücke in Π^n/n^β in (4) sind

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

Also,

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

und

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

Wir schließen daraus

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

Alternativ untersuchen wir das System (5) in der Nähe von $x = b_1/a_1$. Wir haben

$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

Für den Eigenwert ω_1 können wir den zugehörigen Eigenvektor so wählen, dass $\pi_{n,i} > 0$ für $n \geq 1$. Für die ganze Serie $G_i(x)$ Betrachten Sie den singulären Punkt, der in der komplexen Ebene 0 am nächsten liegt. Dieser Punkt liegt auf der Achse $x > 0$ nach einem Satz von A. Pringsheim (Queffélec und Zuily, 2013, S. 54). Laut (Flajolet und Sedgewick, 2009) haben wir dann

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1 + (\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$$

für $n \rightarrow +\infty$ innerhalb einer multiplikativen Konstante. Das haben wir gefunden.

Numerisches Beispiel. Nehmen Sie noch einmal unser numerisches Beispiel (15) mit $a_1 = 2,5$. Abbildung 2 zeigt das asymptotische Verhalten des dem Eigenwert zugeordneten Eigenvektors μ_N , für $N = 1000$. Hier haben wir $\Lambda = -1$. Also haben wir $\beta = 1$ und $k_1/h_2 = 0,3$. Die Abbildung scheint die erhaltenen asymptotischen Ergebnisse zu bestätigen, da der Kanteneffekt nahe $n = N$ nicht berücksichtigt werden sollte.

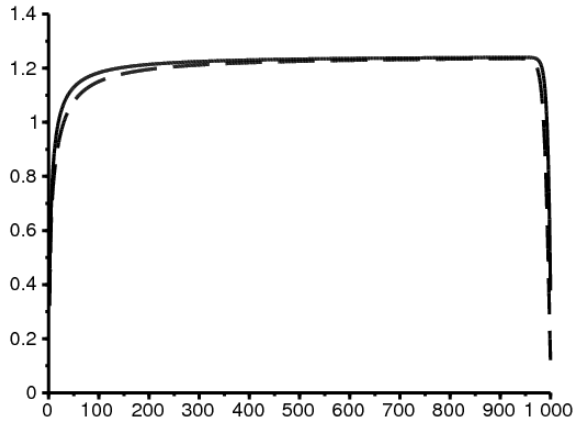


Abbildung 2. Der Fall $a_1 = 2,5$. Wir verfolgen $n^\beta/(b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (durchgezogene Linie) und $n^{\beta+1}/(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (gepunktete Linie) abhängig von n . Wir verwenden die abgeschnittene Matrix $\mathcal{M}^{(N)}$ mit $N = 1000$.

5.2 Fälle wo $m > 0$

Wir vermuten $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ wo $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$. In beiden Fällen ergeben die dominanten Ausdrücke in (4)

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

Mit anderen Worten, ω ist ein Eigenwert der Matrix $Q + (\beta - 1)D$. In der Tat, wenn wir nach einer Lösung der Form suchen $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ sind wir wie in (20) mit $\Pi = 1$. Wie für den Fall, wo

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

wir haben

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n\pm 1,i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1-\beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

was wiederum zu Gleichung (22) führt. Dies legt nahe, dass $\beta = 1 + \alpha^*$ wenn $\lambda_1'(1) > 1$ und $\beta = 2$ wenn $\lambda_1'(1) \leq 0$. In beiden Fällen beträgt der Konvergenzradius von $G_i(x)$ wäre gleich 1.

6 Kehren Sie zu dem speziellen Fall zurück, in dem $K = 2$

Wir können die Differentialgleichung der Ordnung 2 betrachten, die erfüllt ist durch $G_1(x)$ eher als das Differentialsystem erster Ordnung für $G_1(x)$ und $G_2(x)$. Wir bekommen

$$\begin{aligned} &(1-x)^2(a_1x - b_1)(a_2x - b_2) \frac{d^2 G_1}{dx^2} \\ &+ (1-x) \left\{ [\omega + q_1 + a_1(1-2x) + b_1](a_2x - b_2) + (\omega + q_2)(a_1x - b_1) \right\} \frac{dG_1}{dx} \\ &+ [(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1q_2] G_1 = 0. \end{aligned}$$

Teilen durch $(1-x)^2(a_1x - b_1)(a_2x - b_2)$ und indem wir den rationalen Bruch in einfache Elemente zerlegen, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ &+ \left[\frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1q_2}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} \frac{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x - \frac{b_1}{a_1})(x - \frac{b_2}{a_2})}. \end{aligned}$$

Angenommen, die Zahlen b_1/a_1 , b_2/a_2 und 1 sind alle verschieden. Wir erkennen eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - k_0 - k'_0}{x - x_0} + \frac{1 - k_1 - k'_1}{x - x_1} + \frac{1 - k_2 - k'_2}{x - x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ &+ \left[\frac{k_0 k'_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{x - x_0} + \frac{k_1 k'_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_0)}{x - x_1} \right. \\ &\left. + \frac{k_2 k'_2 (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}{x - x_2} \right] \frac{G_1}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} = 0, \end{aligned}$$

das heißt eine Riemannsche Differentialgleichung (Roseau, 1997, S. 229) mit drei singulären Punkten $x_0 = 1$, $x_1 = b_1/a_1$ und $x_2 = b_2/a_2$. Die charakteristischen Aussteller sind jeweils

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega + q_1}{d_1} \right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega + q_2}{d_2} \right),$$

mit α_+ und α_- Lösungen von (13). Der Lösungssatz kann daher mit der Riemannschen Notation geschrieben werden

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Nach (Roseau, 1997, S. 229) kann man schreiben

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Wir definieren

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega + q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

Wir kommen auf den Fall der differentiellen hypergeometrischen Gleichung zurück

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

was sich in Gleichheit übersetzt $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ zwischen anharmonischen Beziehungen. Also

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \right. y \left. \right\}.$$

Die hypergeometrische Funktion ist

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

mit der Notation $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$. Wenn x in der Nähe von 1 liegt, liegt die Variable y in der Nähe von 0. Nach der Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung gibt es Konstanten κ_1 und κ_2 mit

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

vorausgesetzt, dass $\mathcal{C} \neq 1$ das heißt $\alpha_- \neq \alpha_+$. Lösungen mit einem Fuchsian Aussteller α_+ in $x = 1$ entsprechen $\kappa_2 = 0$::

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

Der Fall $m < 0$

Wir nehmen zum Beispiel an $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$. Wir nehmen $\alpha_+ = 1$ für die Eigenfunktion verbunden mit $\omega_1 = s(Q + D)$. Wir wählen κ_1 so dass $G_1(0) = 1$. Also

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

aus (13). Wir definieren

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

Es ist der Wert von x für den $y = -1$. Wir haben $1 < \xi < b_1/a_1$. Die Variable y nimmt ab, wenn $0 < x < \xi$ von

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) / \left(\frac{b_2}{a_2} - 1 \right) \in]0, 1[$$

bis zu -1. Wenn $\xi < x < b_1/a_1$, Ausdruck (23) sollte ersetzt werden

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

Das ist der Ausdruck (18) von §182 von (C. Jordan, 1896), in dem das Argument $\frac{y}{y-1}$ wächst von 1/2 auf 1.

Nehmen Sie noch einmal unser numerisches Beispiel (15) mit $a_1 = 2,5$. Abbildung 3 zeigt die Erzeugungsfunktionen $G_1(x)$ und $G_2(x)$ konstruiert mit dem Eigenvektor assoziiert mit μ_N . Hier $N = 4000$ mit Standardisierung $G_1(0) = 1$. Wir verwenden die Horner-Methode, um die Erzeugungsserien auszuwerten. Wir vergleichen sie mit den Formeln (23) und (24). Hier haben wir $\xi \simeq 1,105$. Der multiplikative Normalisierungsfaktor wurde so gewählt, dass die mit beiden Methoden erhaltenen Funktionen überlagert werden können.

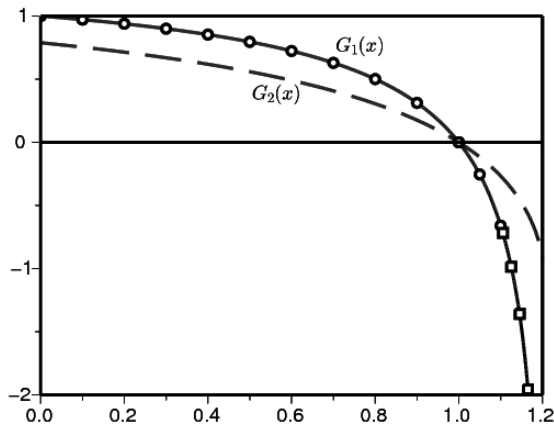


Abbildung 3. Der Fall $a_1 = 2,5$. Wir verfolgen die generierenden Funktionen $G_1(x)$ (durchgezogene Linie) und $G_2(x)$ (gepunktete Linie) als Funktion von x . Man verwendet für die Berechnung die Matrix $\mathcal{M}^{(N)}$ mit $N = 4000$. Die Formeln (23) und (24) für $G_1(x)$ werden durch kleine Kreise und Quadrate dargestellt.

Der Fall $m > 0$ und $\lambda'_1(1) \leq 0$

Wir nehmen zum Beispiel an $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$. Wir haben jetzt

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

Ausdruck (23) ist wegen der Variablen nicht mehr geeignet y divergiert in $x = b_1/a_1 < 1$. Für $0 < x < \xi$, y^{-1} nimmt um eine Zahl zwischen 0 und 1 auf -1 ab. Wir nehmen in diesem Intervall den Ausdruck (32) von (C. Jordan, 1896, §182),

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-C; \mathcal{A}+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-C; \mathcal{A}+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

mit $\alpha_+ = 1$, $\omega_1 = s(Q+D)$ und κ_1 so dass $G_1(0) = 1$. Jedoch über das Intervall $\xi < x < 1$ nehmen wir den Ausdruck (34) von (C. Jordan, 1896, §182), in dem das Argument $(1-y)^{-1}$ erhöht sich von 1/2 auf 1:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(\mathcal{A}, C-B; \mathcal{A}+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, C-B; \mathcal{A}+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Nehmen Sie noch einmal unser numerisches Beispiel (15) mit $a_1 = 3,2$. Fig. 4 zeigt die Formeln (25) und (26). Sie stimmen gut mit der mit dem Eigenvektor konstruierten Erzeugungsfunktion überein. Hier haben wir $\xi \simeq 0,97$.

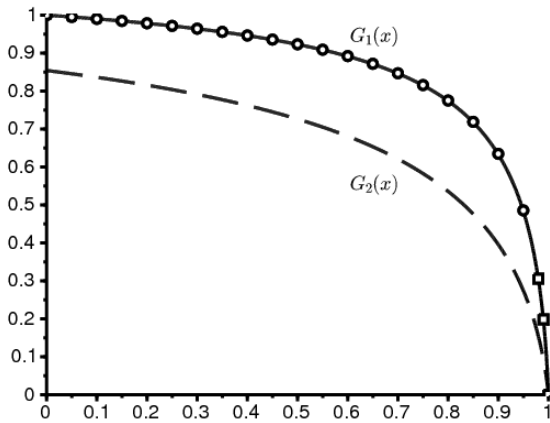


Abbildung 4. Der Fall, in dem $a_1 = 3,2$. Vergleich der Formeln (25) [kleine Kreise] und (26) [kleine Quadrate] für $G_1(x)$ mit der Erzeugungsfunktion des Eigenvektors verbunden mit μ_N (durchgezogene Linie), mit $N = 10^4$.

Der Fall $m > 0$ und $\lambda'_1(1) > 0$

Die Ausdrücke (25) und (26) sind wahrscheinlich nicht mehr gültig, auch wenn $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$. Sie müssen durch Ausdrücke ersetzt werden, die einen logarithmischen Term enthalten. Wenn $a_1 = 3,5$ haben wir $\Lambda = -0,2$ und $\alpha^* = 0,6$ gemäß den Formeln (14). In diesem Fall konnten wir keine aussagekräftige Grafik erhalten.

7 Die Markov-Kette enthalten

Für einen unterkritischen Verbindungsprozess Z_n ($n = 0, 1, \dots$) in einer zufälligen Umgebung mit identisch verteilten unabhängigen Umgebungen haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \quad (27)$$

wo $f(x)$ bezeichnet die Erzeugungsfunktion (Dekking, 1988; Geiger et al., 2003). Sei μ das Minimum auf der rechten Seite von (27). Im "schwach unterkritischen" Fall wo

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

wir haben

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

für eine Konstante $c > 0$. Im "höchst unterkritischen" Fall wo

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

wir haben $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ und

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

für eine Konstante $c > 0$. Der Prozess ist unterkritisch, wenn $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$.

Kehren wir zu unserem Geburts- und Todesprozess zurück. Wir beschränken uns auf den speziellen Fall zweier Umgebungen: $K = 2$. Wir definieren

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

Wenn $a_i \neq b_i$ ist es die erzeugende Funktion der Anzahl von Individuen nach einer Zeit t ausgehend von einer Person zum Zeitpunkt 0 in der Umgebung i (Hillion, 1986). Auf jeden Fall

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i - b_i)t} = e^{d_i t}.$$

Nach einer Weile t_1 wechselt die Umgebung von Zustand 1 zu Zustand 2. Nach einiger Zeit t_2 wechselt die Umgebung zurück in den Zustand 1. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten sind $q_1 e^{-q_1 t_1}$ und $q_2 e^{-q_2 t_2}$. Betrachten Sie dann die enthaltene Markov-Kette Z_n ($n = 0, 1, \dots$) Betrachtet man nur den Wechsel zwischen Zeit 0 und Zeit $t_1 + t_2$. Nennen wir es eine Generation. Die Erzeugungsfunktion ist

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

Insbesondere $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$. Dieser Verzweigungsprozess ist unterkritisch. In der Tat haben wir

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

weil $R_0 < 1$. Der Verbindungsprozess ist sehr unterkritisch, wenn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

In diesem Fall haben wir

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Beachten Sie, dass wenn $d_1 < 0$ und $d_2 < 0$ dann ist der Prozess stark unterkritisch. In dem schwach unterkritischen Fall haben wir

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

und eine kleine Berechnung zeigt

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2}\right)^2}.$$

Beachten Sie, dass diese Nummer ist < 1 genau dann, wenn $R_0 < 1$.

Für unser numerisches Beispiel zeigt Formel (28), dass die eingeschlossene Markov-Kette stark unterkritisch ist, wenn $a_1 < 3,4$. Seltsamerweise unterscheidet sich diese Schwelle von der zwischen den Fällen $\Lambda = s(Q + D)$ und $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ mit $0 < \alpha^* < 1$ für den linearen Prozess von Geburt und Tod. Diese letzte Schwelle war $\simeq 3,2829$ aus Abschnitt 3. Die Geschwindigkeit, mit der die eingeschlossene Markov-Kette zum Aussterben konvergiert, hat jedoch wenig mit der Geschwindigkeit zu tun, mit der der kontinuierliche Zeitprozess dasselbe tut.

8 Fazit

Viele Punkte müssen noch bezüglich des Verhaltens der Eigenwerte und Eigenvektoren geklärt werden. Unter den möglichen Verallgemeinerungen kann man denken, dass wenn die Koeffizienten a_i, b_i und $Q_{i,j}$ sind Funktionen T -periodisch der Zeit t dann ω_1 wird gleich sein $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$, wo $f(\cdot)$ bezeichnet den dominanten Floquet-Exponenten und ersetzt die Spektralgrenze.

Danksagung

Wir danken Vincent Bansaye, Anne Duval und Bruno Sericola für ihre Kommentare und Vorschläge.

Referenzen

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. J Math Biol 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. J Math Biol 69 : 73–90
- Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. J Math Biol 73 : 847–866
- Clayton A (2010) Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials. SIAM J Matrix Anal Appl 31 : 2239–2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. JAppl Probab 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. Proc Amer Math Soc 81 : 657–658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi-stationary distributions. Springer, Berlin
- D'Souza JC, Hambly BM (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment. Adv Appl Probab 29 : 38–55
- Dekking FM (1988) On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment. Stoch Proc Appl 27 : 151–157
- Dieudonné J (2003) Éléments d'analyse, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) Analytic combinatorics. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) Théorie des matrices, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire. Ann I H Poincaré-Pr 39 : 593–620
- Hillion A (1986) Les théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) Cours d'analyse de l'École polytechnique, tome 3. Gauthier-Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999) Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. SIAM, Philadelphia
- Lotka AJ (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions. Comment Math Helv 33 : 38–46
- Nkague Nkamba L (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius. Linear Algebra Appl 73 : 59–122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie. Ann I H Poincaré B 2 : 151–172
- Queffelec H, Zuily C (2013) Analyse pour l'agrégation, 4e édition. Dunod, Paris

- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Sericola B (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications. Lavoisier, Paris