

حول العمليات الخطية دون الدرجة للولادة والموت في بيئة عشوائية

J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا
nicolas.bacaer@ird.fr

المخلص

نحصل على صيغة واضحة لمعدل انقراض عمليات الولادة والوفاة دون الدرجة الخطي في بيئة عشوائية. يتم توضيح هذه الصيغة عن طريق حساب القيمة الذاتية الأكبر جزء حقيقي للمصفوفة المقطوعة من المعادلة الرئيسية. تتحقق الوظيفة المولدة للمتجه الذاتي المرتبط بنظام مفرد من المعادلات التفاضلية من نوع فوكس. يتم إيلاء اهتمام خاص لحالة بيئتين ، مما يؤدي إلى معادلة ريمان التفاضلية.

1 مقدمة

لنفترض أن يتذبذب البيئة بين عدد محدود K الدول ($K \geq 2$) بعد سلسلة ماركوف المتجانسة المستمرة. $Q = (Q_{i,j})$ هي المصفوفة التي يكون تبديلها هو المولد اللامتناهي لهذه السلسلة:

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i Q_{i,j} = 0 \quad \forall j.$$

نفترض أن المصفوفة Q غير قابلة للاختزال. يوجد ناقل واحد $u = (u_i)$ مع

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1$$

(سيركولا ، 2013 ، ص 152).

عدد الأفراد الذين يتطورون في هذه البيئة العشوائية هو n . في البيئة i ($1 \leq i \leq K$) ، لنفترض أن لدينا عملية خطية للولادة وموت المعلومات

- a_i للولادات
- b_i للميت ،

مع $a_i > 0$ و $b_i > 0$. وبعبارة أخرى ، خلال فترة زمنية متناهية الصغر dt ،

- مع احتمال $a_i dt$ ، كل فرد يلد فردًا جديدًا ،
- يموت كل فرد باحتمال $b_i dt$.

افترض أنه في الوقت $t = 0$ يوجد n_0 الأفراد ($n_0 \geq 1$) والبيئة i_0 . احتمال وجود n أفراد في البيئة i في الوقت t هو $p_{n,i}(t)$. لذا لدينا $p_{n,i}(0) = 1$ إذا $(n, i) = (n_0, i_0)$ و $p_{n,i}(0) = 0$ وإلا. المعادلة الرئيسية هي

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

ل $n \geq 0$ و $1 \leq i \leq K$. لكن $p_{n-1,i}$ غائب عن $n = 0$. مثل (Lotka، 1939) ، دعنا نحدد

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

سنفترض ذلك دائماً $R_0 < 1$: من شبه المؤكد أن السكان سيخرجون (Bacaër and Ed-Darraz، 'Cogburn and Torrez، 1981) (2014). إنه النظام دون الحرج. إذا $t \rightarrow +\infty$ ، لدينا

$$p_{0,i}(t) \rightarrow u_i, \quad p_{n,i}(t) \rightarrow 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i.$$

معدل الانقراض موجود ولا يعتمد على رقم I أو ط

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

(كوليت وآخرون، 2013، القسم 4.5). كما أنها لا تعتمد على الحالة الأولية (n_0, i_0) . المشكلة هي تحديد هذا المعدل بشكل صريح.

نستخدم بعض الرموز:

- $\mathfrak{R}(\cdot)$ هو الجزء الحقيقي من العدد المركب
- $\sigma(M)$ هو طيف من مصفوفة M .
- $s(M) = \max\{\mathfrak{R}(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$ هو الحد الطيفي
- A هي المصفوفة القطرية $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$
- $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$
- $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$

عندما تحتوي المصفوفة M على معاملات خارج القطر تكون موجبة أو صفرية، والتي ستكون دائماً الحالة أدناه، فإنه يتبع من نظرية Perron و Frobenius أن $s(M)$ هو أيضاً القيمة الذاتية من M .

في القسم 2، نستخدم نتيجة من (D'Souza and Hambly، 1997) بخصوص عمليات التفرع في بيئة عشوائية لإظهار أن

$$\omega_1 = \Lambda := \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

ندرس أيضاً الاختلافات في الوظيفة $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ والمشتق $\lambda'_1(\alpha)$ مما يؤدي إلى تمييز ثلاث حالات:

- واحد حيث $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$ ؛
- واحد حيث $\lambda'_1(1) \leq 0$ و $m > 0$ ؛
- واحد حيث $\lambda'_1(1) > 0$ و $m > 0$.

في الحالتين الأوليين، يتم الوصول إلى الحد الأدنى Λ في الفاصل الزمني $[0, 1]$ عند $\alpha = I$ ، بحيث $\omega_1 = s(Q + D)$.

في القسم 3، نلاحظ أن الحد الطيفي μ_N من المصفوفة المبتورة من المعادلة الرئيسية تشكل تسلسل متزايد. ثم نحسب عدديا μ_N في سلسلة من الأمثلة. نلاحظ على وجه الخصوص البطء، ولا شك اللوغاريتمي الذي معه μ_N يتلاقى ل ω_1 في الحالة الثالثة المذكورة أعلاه.

من القسم 4، نحن مهتمون بالقيم الذاتية الأخرى والمتجهات الذاتية المرتبطة بها، والتي نحصل عليها من نتائج جزئية للغاية. نقوم أولاً بتحويل مشكلة القيمة الذاتية

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

إلى نظام تفاضلي فريد من نوع فوكس (ميثي، 1959)

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G'_i(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

لوظيفة المولد

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

إذا كان المتجه الذاتي $(\pi_{n,i})$ يتناقص هندسياً بالنسبة إلى n ، فإن القيمة الذاتية ω تساوي بالضرورة القيمة الذاتية للمصفوفة $Q + \nu D$ مع عدد صحيح $\nu \geq 0$. إذا $m < 0$ و $\omega = s(Q + \nu D)$ ، نحن في الواقع نبني حلول تحليلية للنظام (5) في حي $s = I$. المعادلة المميزة لنظام Fuchsian هي

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

عبارة أخرى ، ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha D$. يتم الحصول على هذه المعادلة المميزة من خلال البحث عن حلول تتصرف على أنها $(1 - x)^\alpha$ على مقربة من $x = 1$.

دعونا ندرس الحالة الثالثة: الوظيفة $\lambda_1(\alpha)$ يصل إلى الحد الأدنى من الداخل $[0, 1]$. إذا

- $\omega = s(Q + \alpha D)$
- تطوير $G_i(x)$ على مقربة من $s = I$ يحتوي على مصطلح لوغاريتمي ،

ثم $\alpha^* = \alpha$ و $\omega = \Lambda$. علاوة على ذلك ، في نظرية فوكس ، تظهر المصطلحات اللوغاريتمية عندما يكون للمعادلة المميزة (7) جذر مزدوج ، وخاصة الفرع $\omega = s(Q + \alpha D)$. بسبب تحذب الوظيفة $s(Q + \alpha D)$ ، $\alpha \mapsto \omega = \Lambda$ ، هذا يحدث فقط لـ $\omega = \Lambda$.

في القسم 5 ، ندرس مباشرة السلوك المقارب للمتجه الذاتي الحد $\pi = (\pi_{n,i})$ يرتبط مع ω_1 . القسم 6 يجعل الارتباط عندما $K = 2$ مع معادلة ريمان التفاضلية. في القسم 7 ، نحن مهتمون بسلسلة ماركوف المدرجة ، والتي تقع الأخيرة في إطار عمل (Dekking ، 1988) و (Geiger et al. ، 2003). نلاحظ أن العتبة بين الأنظمة الضعيفة ودون الحرجة بقوة ليست هي نفسها حيث $\Lambda \neq s(Q + D)$.

لتحديد موقفنا بشكل أفضل فيما يتعلق ببعض الأعمال الأخرى ، نلاحظ أن النظام (1) هو "عملية غير متجانسة من شبه الولادة والموت" ؛ انظر على سبيل المثال (Sericola ، 2013 ، p.350) أو (Latouche and Ramaswami ، 1999 ، Chapter 12) ، والتي تناقش التوزيع الثابت ولكن ليس معدل التقارب تجاهه. علاوة على ذلك ، في بيئة مستمرة مع

$$a_i = a, \quad b_i = b > a, \quad \forall i,$$

لدينا $D = (a - b)I$ ، أين I هي مصفوفة الهوية. لذا $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$ والصيغة (3) يعطي $\omega_1 = a - b$. هذا معروف جيداً إما عن طريق الحساب المباشر (Hillion ، 1986 ، الفصل الخامس) ، أو كحالة خاصة لنتائج Karlin و McGregor في عمليات الولادة والوفاة (Collet et al. ، 2013 ، القسم 5.9.2). يؤدي تعميم هذه النتائج الأخيرة إلى "عمليات شبه الولادة والوفاة" (كلايتون ، 2010) تتعلق فقط بالحالات التي يكون فيها "الطيف" حقيقياً. هذا ليس هو الحال بشكل عام في نموذجنا. وأخيراً ، يتدخل النموذج (1) على أنه خطية لبعض النماذج السكانية غير الخطية ، وخاصة النماذج الوبائية (Bacaër ، 2016).

2 معادلة معدل الانقراض

2.1 تفكيك الوقت للبيئة والممرور إلى الحد الأقصى

M^T هو تبديل مصفوفة M (أو ناقل). نختار خطوة صغيرة من الوقت $\delta > 0$. المصفوفة

$$P = e^{Q^T \delta}$$

هي مصفوفة سلسلة ماركوف في وقت منفصل. لقد فعلنا $P_{i,j} > 0$ للجميع i, j لأن المصفوفة Q غير قابلة للاختزال. لا تزال البيئة مغلقة في الحالة i لخطوة زمنية δ . ثم تقفز البيئة إلى الحالة z ، مع احتمال $P_{i,z}$. في الفاصل الزمني الطويل ، يتبع السكان عملية خطية للولادة وموت المعلومات a_i و b_i ، وإذا كانت البيئة في حالة i . وهكذا ، يولد الفرد في المتوسط

$$m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$$

الأفراد. لقد فعلنا $0 < m_i < +\infty$. لذلك نحن في سياق عملية متفرعة في بيئة ماركوف. بعض الرموز:

- إذا $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ هو سلسلة من k البيئات من خلال ،

$$\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}.$$

- $\alpha \in \mathbb{R}$ لـ

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

أين $\mathbb{E}(\cdot)$ يدل على توقع رياضي

- Z_k هو حجم السكان في نهاية الخطوة الزمنية لحجم δ
- $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$
- $\Sigma(\alpha) = \sum_{i,j} P_{i,j} m_j^\alpha$ المصفوفة التي قدمتها

$$\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$$

• $\rho(\Sigma(\alpha))$: نصف القطر الطيفي للمصفوفة الموجبة $\Sigma(\alpha)$.

لذا $\mathbb{P}(Z_k > 0)$ هو احتمال عدم انقراض السكان. تظهر النتيجة الطبيعية 1.8 من (D'Souza and Hambly, 1997) ذلك

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp\left(\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha)\right). \quad (9)$$

في حالتنا، توقع $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$ تحسب بشكل صريح:

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

ويترتب على ذلك من (8) و (10) ذلك

$$\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha)).$$

وهي أيضًا وظيفة تحليلية لـ α لأن $\rho(\Sigma(\alpha))$ هو قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة الإيجابية $\Sigma(\alpha)$. وبالتالي فإن الحد (9) يساوي $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$. وبالتالي فإن معدل الانقراض continuous في الوقت المستمر هو

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log([\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta}).$$

لنأخذ على وجه الخصوص $\delta = 1/h$ مع عدد صحيح $h \geq 1$. ثم $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$. لكن

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

من صيغة سوفوس لي. نصف القطر الطيفي هو وظيفة مستمرة، لدينا

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho(e^{Q^\top + \alpha D}) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

لان $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ ، نستنتج ذلك

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

وأخيرًا، يضمن الاقتراح 4.12 من (Collet et al., 2013) المساواة في معدلات الانقراض المحددة مع (2) أو مع احتمال عدم الانقراض كما هو الحال في الجانب الأيسر من المعادلة (9). وهكذا وجدنا الصيغة لمعدل الانقراض في الوقت المستمر.

2.2 دراسة الوظيفة $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

نحدد

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

الاقتراح 1.

- إذا $m \leq 0$ ، ثم $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا $m > 0$ و $\lambda_1'(1) \leq 0$ ، ثم لدينا أيضًا $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا $m > 0$ و $\lambda_1'(1) > 0$ ، ثم هناك فريد $\alpha^* \in]0, 1[$ مع $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

إثبات. إذا $v = (v_i)$ هو ناقل،

- إذا $v \geq 0$ و $v_i \geq 0$ للجميع i
- إذا $v > 0$ و $v \neq 0$
- إذا $v \gg 0$ و $v_i > 0$ للجميع i .

نستخدم الرموز المتماثلة للمصفوفات.

دعونا نعود إلى منطق القسم 9 من (باقر ، 2016) ولكن مع $R_0 < 1$ و $R_0 > 1$. المصفوفة $Q + \alpha D$ غير قابل للاختزال لجميع α لأن المصفوفة Q غير قابلة للاختزال والمصفوفة D قطرية. لذا $\lambda_1(\alpha)$ هو قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة $Q + \alpha D$ ،

$$\exists! w_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q + \alpha D) w_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) w_1(\alpha), \quad \langle \mathbf{1}^T, w_1(\alpha) \rangle = 1,$$

أين $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ يشير إلى المنتج العادي المعتاد للمتجهات الحقيقية. $\lambda_1(\alpha)$ هو أيضًا قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة المنقولة $Q^T + \alpha D$ ،

$$\exists! v_1(\alpha) \gg 0, \quad (Q^T + \alpha D) v_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha) v_1(\alpha), \quad \langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1.$$

من نظرية اضطراب القيمة الذاتية البسيطة ، نعرف أن الوظيفة $\lambda_1(\alpha)$ قابل للتمييز و

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

خاصة بالنسبة $\alpha = 0$ ، لدينا $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ ، $w_1(0) = u$ ، $v_1(0) = \mathbf{1}^T$ و

$$\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^T, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$$

لان $R_0 < 1$.

إذا $m \leq 0$ ، الوظيفة $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ يتناقص بسبب $D \leq 0$. الآن النظر في الحالة حيث $m > 0$. نذكر أن $\lambda_1'(0) < 0$. الوظيفة $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ هو محدب (كوهين ، 1981). لذا $\lambda_1'(\alpha) \mapsto \alpha$ هي وظيفة متزايدة. علاوة على ذلك ، إذا $\alpha \rightarrow +\infty$ ، لدينا $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$. الوظيفة $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$ في هذه الحالة محدبة بصراحة لأنها ليست أفينية (Nussbaum، 1986). لذلك هناك فريد $\alpha^* > 0$ مع $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$.

لذلك هناك ثلاث حالات:

- إذا $m \leq 0$ ، ثم $\Lambda = \lambda_1(1)$ و $\lambda_1'(\alpha) \leq 0$ ، ثم $\alpha^* \geq 1$ و $\lambda_1(\alpha) \mapsto \alpha$ ينخفض خلال الفاصل الزمني $[0, 1]$ ، لذلك لا يزال لدينا $\Lambda = \lambda_1(1)$.
- إذا $m > 0$ و $\lambda_1'(1) > 0$ ، ثم $\alpha^* \in]0, 1[$ و $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$.

2.3 حالة بيتين

ومن المفترض $K = 2$. إذا $Q_{i,i} = -q_i$ ل $i = 1, 2$ ، ثم

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

المعادلة المميزة $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$ مكتوب

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

هذه العلاقة بين ω و α يصف الغلو في الطائرة (ω, α) . كما يمكن كتابتها

$$\alpha^2 - \alpha \left(\frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

بالإضافة إلى ذلك ، $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$ مثل هذا

$$2 \lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

$$2\lambda'_1(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1q_2}}.$$

إذا $m \leq 0$ ، أو إذا $m > 0$ و $\lambda'_1(1) \leq 0$ ، لدينا $\Lambda = \lambda_1(1)$. إذا $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$ ، يجب أن يكون لدينا $d_1 d_2 < 0$. لنفترض في هذه الحالة على سبيل المثال ذلك $d_1 > 0$ و $d_2 < 0$. بإلغاء التمييز (13) نجد بعد حساب صغير ذلك

$$\Lambda = -\frac{\left(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1}\right)^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

لاحظ ذلك $\Lambda = 0$ و $\alpha^* = 0$ إذا $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ ، أي إذا $R_0 = 1$.

3 المصفوفة المقطوعة

إذا $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^T$ ثم تتم كتابة المعادلة الرئيسية $\mathcal{M}p = \frac{dp}{dt}$ ، أين \mathcal{M} هي مصفوفة لا نهائية. دعونا قطع المصفوفة \mathcal{M}

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

مع $S = A + B$. نحدد $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$.

الافتراض 2. للجميع $N \geq 1$ ، لدينا $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$. استمرار (μ_N) وبالتالي يكون له حد إذا $N \rightarrow +\infty$ ، وهي ω_1 .

إثبات. مصفوفة مینزلر هي مصفوفة تكون فيها جميع المعاملات خارج القطر $0 \leq$. المصفوفة $\mathcal{U}^{(N)}$ مصفوفة مینزلر غير قابلة للاختزال لأن Q غير قابلة للاختزال، $a_i > 0$ و $b_i > 0$ للجميع i . لذلك يمكننا استخدام النتائج الطبيعية لنظرية بيرون وفروينوس فيما يتعلق بالحد الطبيعي لمصفوفات مینزلر؛ انظر على سبيل المثال (Nkague Nkamba، 2012، Theorem 30). إذا $e = (1, \dots, 1)^T$ ثم

$$(\mathcal{U}^{(N)})^T e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

لان $e \gg 0$ ، نستنتج ذلك $s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0$ لذا

$$\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^T) < 0.$$

μ_N هو قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathcal{U}^{(N)}$

$$\exists \mathcal{W}^{(N)} \gg 0, \quad \mathcal{U}^{(N)} \mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}.$$

ناقل $\mathcal{W}^{(N)}$ يتكون من كتل N بحجم K ، $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$. ضع في اعتبارك المتجه

$$\widetilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$$

0 الذي هو أيضا من حجم K . ثم

$$\mathcal{U}^{(N+1)} \widetilde{\mathcal{W}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{U}^{(N)} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \dots & \begin{matrix} (N+1)B \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

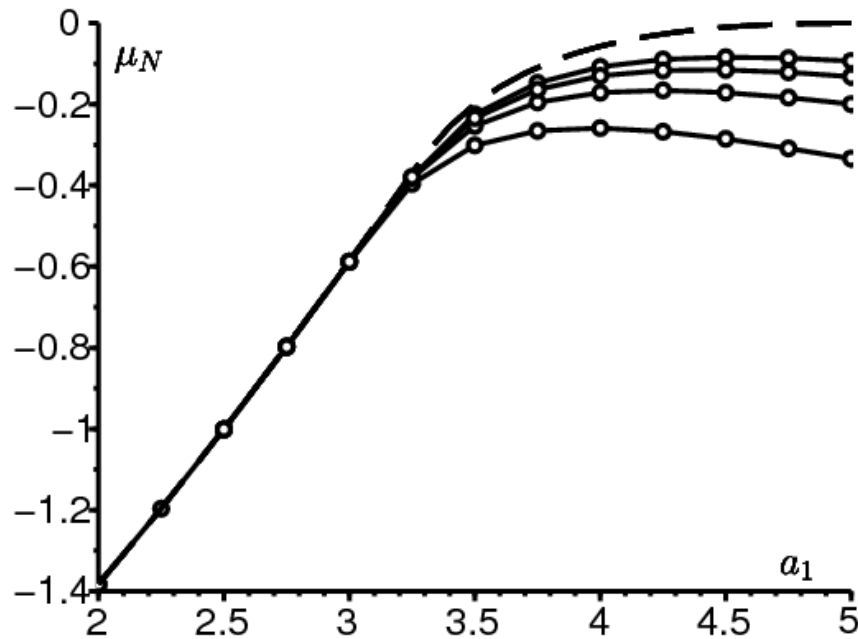
لان $NAW_N^{(N)} \gg 0$ ، لدينا $\mathcal{U}^{(N+1)}\bar{W} > \mu_N\bar{W}$ لان $\bar{W} > 0$ ، نستنتج ذلك $\mu_{N+1} > \mu_N$.

كقيم رقمية ، لناخذ

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$

ثم $u_1 = u_2 = 0,5$. المعلمة a_1 يختلف على سبيل المثال بين 2 و 5 ؛ هذا الحد الأعلى يتوافق مع $R_0 = 1$. للقيم الصغيرة من N ، عادة ما يصل إلى $N = 10^3$ ، يحسب برنامج مثل Scilab مجموعة كاملة من المصفوفة $\mathcal{U}^{(N)}$. وإلا فإننا نحسب أصغر قيمة ذاتية $\mathcal{U}^{(N)}$ - والمتجه الذاتي المقابل باستخدام طريقة تكرارية تطبيق على المصفوفة العكسية. يستفيد المرء من بنية الكتلة الثلاثية للانقلاب عند كل تكرار (Artalejo et al.، 2013). مع هذه الخوارزمية ، يمكننا الذهاب إلى أبعد الحدود $N = 10^6$ بدون مشاكل كثيرة.

يظهر الشكل 1 μ_N بالاعتماد على a_1 ل N ثابتة ولكنها كبيرة. يتم إيقاف الخوارزمية التكرارية عند تقديرين متتاليين لـ μ_N تختلف أقل من 10^{-4} . كما يظهر الشكل في الخطوط المنقطه وحسب a_1 الرقم Λ المعطى بالصيغة (3) ، وهو $\lambda_1(1)$ إذا $\lambda_1'(1) \leq 0$ والتي تعطى بالصيغة (14) متى $\lambda_1'(1) > 0$. لقد فعلنا إذا $\lambda_1'(1) < 0$ إذا $a_1 < a_1^*$ و $\lambda_1'(1) > 0$ إذا $a_1 > a_1^*$ مع $a_1^* \simeq 3,2829$. الاتفاق بين Λ وحد (μ_N) يبدو مرجحًا. ومع ذلك ، فإن التقارب بطيء للغاية ، ربما لوغاريتمي ، متى R_0 يقترب من 1 ، خاصة عندما $a_1 > a_1^*$.



الشكل 1. الخط المنقط: Λ المعطى بواسطة الصيغة (3) كدالة a_1 . خطوط مستمرة ذات نقاط: μ_N ل $N = 10^3$ ، 10^4 ، 10^5 و 10^6 (من الاسفل الى الاعلى).

4 المتجهات الذاتية والقيم الذاتية الأخرى

نحن مهتمون الآن بهذا الحد $N \rightarrow \infty$ من N من eigenvector المرتبطة μ_N بالإضافة إلى القيم والمتجهات الذاتية الأخرى. في هذا الصدد ، سوف نحصل على نتائج جزئية فقط.

4.1 نظام فوشي

هي مجموعة من الأرقام المعقدة و ' المشتق فيما يتعلق بالمتغير x . \mathbb{C} ، $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ، $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$

الاقتراح 3 .

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ و $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- إذا كان لسلسلة التوليد (6) نصف قطر تقارب R ،

ثم $G_i(x)$ هو حل النظام (5) ل $x \in \mathbb{C}$ و $|x| < R$ و $1 \leq i \leq K$.

$$G'_i(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}, \quad \forall |x| < R.$$

كما في الحالة الكلاسيكية مع بيئة ثابتة (Hillion ، 1986) ، نضرب (4) في x^n . الجمع على كل n يعطي

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G'_i(x) + b_i G'_i(x) - (a_i + b_i)x G'_i(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

وهذا يعادل (5).

ملاحظات.

- نلاحظ أن (5) مشكلة ذات قيمة ذاتية لنظام تفاضلي مفرد. هذا النظام من نوع فوكس إذا $a_i \neq b_i$ لجميع i (ميثي ، 1959). النظام لديه تفرد في $x = 1$ وفي $x = b_i/a_i$ ل $1 \leq i \leq K$. لقد فعلنا $b_i/a_i < 1$ إذا $b_i > a_i$. يمكننا أيضًا كتابة النظام

$$G'_i(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- ظهر مثال لمعادلة التفاضلية العددية من النوع 2 في دراسة عمليات الولادة والوفاة التربيعية في بيئة ثابتة (بيكار ، 1965).

4.2 القيم الذاتية عندما يكون نصف قطر التقارب $I <$

الافتراض 4 .

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ ، $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ و $\pi \neq 0$ ،
- إذا كان لسلسلة التوليد (6) نصف قطر تقارب أكبر من 1 ،

ثم هناك عدد صحيح $\nu \geq 0$ بحيث ω هو القيمة الذاتية للمصفوفة $Q + \nu D$.

إثبات . دعونا نتسبب بالعبث. افترض أن لكل شيء $\nu \geq 0$ ، ω ليست قيمة ذاتية $Q + \nu D$. الوظائف $G_i(x)$ تحليلية في القرص $|x| < R$ مع $R > 1$. إذا كانت x متقاربة إلى 1 في (5):

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

لكن ω ليست القيمة الذاتية لل Q . لذا $G_i(1) = 0$ لجميع i .

فليكن عددًا صحيحًا $\nu \geq 1$. بالحث ، افترض أننا أظهرنا $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$. نستمد المعادلة ν مضروبة (5) بالنسبة إلى x ونستخدم صيغة Leibniz لمنتج $(1-x)(a_i x - b_i)$ و $G'_i(x)$. لقد فعلنا

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

أين $\binom{\nu}{k}$ يدل على معامل ذي الحدين. كثير الحدود $(1-x)(a_i x - b_i)$ هي من الدرجة 2 في x . فقط تعابير مع $0 \leq k \leq 2$ ليست صفرًا في المجموع على اليسار:

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu [a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu (\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

نجعل x متقاربًا إلى 1 ونجد مع فرضية الاستقرار

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu (a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

ومع ذلك ω ليست قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \nu D$. لذا $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ لجميع i .

لذا ، فقد أظهرنا ذلك $G_i^{(\nu)}(1) = 0$ لجميع i وللجميع $\nu \geq 0$. منذ الوظيفة $G_i(x)$ تحليلي ، لدينا $G_i(x) = 0$ على مقربة من $x = 1$ ، وحتى $G_i(x) = 0$ في جميع أنحاء القرص $|x| < R$ حسب مبدأ التمديد التحليلي. لذا $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$ لجميع $1 \leq i \leq K$ و $n \geq 0$. هذا يتناقض مع الفرضية $\pi \neq 0$.

ملاحظات.

- القيم الذاتية للمصفوفات $Q + \nu D$ ليست بالضرورة كلها حقيقية ، لذا فإن النظام (5) ليس نظرية Kodaira (Dieudonné و Weyl ، 2003) ، ولا دراسة (Clayton ، 2010) على بعض عمليات شبه الولادة والوفاة. ومع ذلك ، فإن هذه القيم الذاتية كلها حقيقية عندما تكون $K = 2$. لأن القيمة الذاتية $s(Q + \nu D)$ حقيقي جدا ؛ قيمة eigenvalue الأخرى حقيقية أيضاً.
- على مقربة من $x = 1$ ، يمكن كتابة النظام (16)

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[\frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[\omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

إذا $G(x)$ هو المتجه $(G_i(x))$ ، النظام من النموذج

$$G'(x) = \Omega(x)G(x)$$

مع

$$\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n (x-1)^n$$

و $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$. إذا كان نصف قطر التقارب في السلسلة $G_i(x)$ غير $I < 1$ ، ثم $G_i(x)$ تحليلي في حي $x = 1$. لذا فإن النظام أعلاه لديه حل تحليلي في حي $x = 1$. وفقاً لـ (Gantmacher ، 1966 ، p.155) ، يوجد عدد صحيح $\nu \geq 0$ التي ν قيمة ذاتية لها Ω_{-1} . لذلك هناك ناقل $w \neq 0$ مع

$$D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w.$$

لذا

$$\omega w = (Q + \nu D)w$$

و ω قيمة ذاتية $Q + \nu D$. هذا ما تم عرضه بشكل أساسي في الاقتراح 4.

مثال. خذ القيم العددية (15) مع $a_1 = 2,5$. في هذه الحالة ، لدينا $m < 0$ ل $N = 1000$ ، أول عشرين قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathcal{M}^{(N)}$ يتم تقديمها تقريباً من خلال الجدول التالي:

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

الآن قيم eigenvalues من Q هي 0 و -2 ، تلك $Q + D$ هم -1 و -3,5 ، تلك $Q + 2D$ هم -1,6972244 و -5,3027756 ، تلك $Q + 3D$ هم -2,2877855 و -7,2122145 ، تلك $Q + 4D$ هم -2,8377223 و -9,1622777 ، إلخ. تم العثور عليها بشكل جيد في الجدول أعلاه. باختصار ، يبدو أن القيم الذاتية $\mathcal{M}^{(N)}$ تتلاقى عندما $N \rightarrow +\infty$ نحو القيم الذاتية للمصفوفات $Q + \nu D$ ل $\nu = 0, 1, 2, \dots$ يتلاقى ل $s(Q + D)$. تذكر ذلك هنا $s(Q + D) = \Lambda$ لأن $m < 0$.

4.3 الحالة حيث $a_i < b_i$ لجميع i

ومن المفترض $m < 0$. دعونا نبحث رسمياً عن حل بالقرب من $s = I$ من النظام (5) من النموذج

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n. \quad (17)$$

لقد فعلنا

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

لقد فعلنا $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ نحدد معاملات $(1-x)^n$. نحصل

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

للجميع $n \geq 0$. $c_{n-1,i}$ غائب إذا $n = 0$ مع $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ ، (17) هو حل (5) إذا

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

يتم الحصول على النوع الأول من الحل عن طريق الاختيار ω من بين القيم الذاتية Q و c_0 المتجه الذاتي المقابل. تسمح العلاقة (18) بالحساب c_n ل $n \geq 1$ ، بشرط أن المصفوفة $Q + nD - \omega I$ هو دائماً قابل للعكس.

يتم الحصول على نوع ثان من الحل عن طريق الاختيار $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$ مع $\nu \geq 1$ ، ω قيمة ذاتية $Q + \nu D$ و c_ν متحد ذاتي المنشأ. ثم نحسب c_n ل $n \geq \nu + 1$ معادلة (18)، شريطة أن المصفوفة $Q + nD - \omega I$ هو دائماً قابل للعكس.

لنأخذ على وجه الخصوص $\omega = s(Q + \nu D)$ مع عدد صحيح $\nu \geq 0$. لان $a_i < b_i$ للجميع i ، لدينا $D < 0$. بالإضافة إلى ذلك، $Q + \nu D$ غير قابل للاختزال. لذلك لأي عدد صحيح $n > \nu$ ، لدينا

$$s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega.$$

لذا $s(Q + nD - \omega I) < 0$. المصفوفة $Q + nD - \omega I$ هي مصفوفة ميتزلر وعاكس $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$. لقد فعلنا

$$c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$$

للجميع $n \geq 1$. إذا $n \rightarrow +\infty$

$$[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$$

هكذا

$$c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i).$$

سلسلة (17) متقاربة $|1-x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$. مسلسل (17) عن $1 \leq i \leq K$ تتلاقى جميعاً $|1-x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$.

4.4 نصف قطر التقارب يساوي 1

ناقشنا في القسمين السابقين القيم الذاتية للمصفوفات $Q + \nu D$ لعدد صحيح $\nu \geq 0$. ومع ذلك (Bacaër and Ed-Darraz، 2014) قد سلطوا الضوء بالفعل على مثال حيث $R_0 < 1$ ولكن أين القيمة الذاتية $s(Q + D)$ المصفوفة $Q + D$ هو إيجابي بصراحة: خذ فقط $q_1 = q_2 = 1$ ، $a_1 = 2,7$ ، $a_2 = 0,8$ ، $b_1 = b_2 = 2$ (لذلك $a_1 > b_1$). لا يمكن أن يكون لمشكلتنا الأولية قيمة ذاتية إيجابية. نستنتج على وجه الخصوص أن سلسلة التوليد $G_i(x)$ لا تملك دائماً نصف قطر تقارب > 1 . الاقتراح التالي يربط سلوك $G_i(x)$ قريب من $x = 1$ مع المعلمة α .

5. الاقتراح

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ ، $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$ و $\pi \neq 0$
- إذا كان لسلسلة التوليد (6) نصف قطر تقارب يساوي 1،
- إذا كان هناك رقم حقيقي $\alpha > 0$ ، عدد صحيح $J \geq 0$ والوظائف التحليلية $g_{i,j}(x)$ في قرص متمركز في $x = 1$ مع

$$G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$$

على مدى فترة $(1-\varepsilon, 1)$ مع $\varepsilon > 0$ ،
 • إذا كان المتجه $(g_{i,J}(1))$ ليست صفر ،

ثم ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha D$.

إثبات . لقد فعلنا

$$G'_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x).$$

$G_i(x)$ هو حل المعادلة (5) ل $|x| < 1$. نقسم على $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$. لقد فعلنا

$$\omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\ + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\ = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x).$$

مع $x \rightarrow 1$ ، نحصل

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

لذا ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha D$.

تعليق. شكل الوظيفة $G_i(x)$ في الاقتراح 5 ، الذي يجمع بين دالة القوة و متعدد الحدود اللوغاريتمي ، هو ما يمكن توقعه من حل لنظام Fuchs بالقرب من التفرد (Gantmacher، 1966، p. 159).

4.5 الحالة حيث $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$

الاقتراح 6 . ومن المفترض : $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$ في هذه الحالة ، $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ مع $\alpha^* \in]0, 1[$. نفترض : $\alpha > 0$ و $\omega = s(Q + \alpha D)$.

- إذا كان لدينا معادلة (4) مع $\omega \in \mathbb{C}$ و $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$
- إذا كانت سلسلة التوليد المرتبطة بها $G_i(x)$ نصف قطر التقارب يساوي 1
- إذا $G_i(x)$ يمكن كتابتها على فاصل زمني $(1-\varepsilon, 1)$ مع $\varepsilon > 0$ في النموذج

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

مع $J \geq 1$ وناقل $(g_{i,J,0})_{1 \leq i \leq K}$ وهي ليست صفر ،

ثم $\omega = \Lambda$ و $\alpha = \alpha^*$

إثبات . في الواقع ،

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1 - x)] [\log(1 - x)]^{j-1} (1 - x)^{n+\alpha-1}.$$

لقد فعلنا $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1 - x)$ لان $G_i(x)$ هو حل (5) يوم $|x| < 1$ ، لدينا

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1 - x)]^j (1 - x)^{n+\alpha} \\ & - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1 - x)] [\log(1 - x)]^{j-1} (1 - x)^{n+\alpha} \\ & + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1 - x)] [\log(1 - x)]^{j-1} (1 - x)^{n+\alpha+1} \\ & = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1 - x)]^j (1 - x)^{n+\alpha}. \end{aligned}$$

التعبيرات باللغة $(1 - x)^\alpha [\log(1 - x)]^J$ وفي $(1 - x)^\alpha [\log(1 - x)]^{J-1}$ يجب على كل إغناء:

$$\begin{aligned} \omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\ \omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}. \end{aligned}$$

نحدد $\gamma_j = (g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ لقد فعلنا

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

لان $\omega = s(Q + \alpha D)$ و $\gamma_J \neq 0$ المعادلة الأولى تبين ذلك γ_J هو المتجه الذاتي للمصفوفة $Q + \alpha D$ المرتبطة بالقيمة الذاتية $s(Q + \alpha D)$. مع ترميزات القسم 2.2، نستنتج أن هناك ثابت $\kappa \neq 0$ مع $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$. بالإضافة إلى ذلك، نرى أن المعادلة الثانية تأخذ الشكل

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

المصفوفة $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ نواة أحادية البعد، بقيادة $w_1(\alpha)$. لا يزال مع تدوينات القسم 2.2، المصفوفة المنقولة $[Q^T + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$ نواة أحادية البعد، بقيادة $v_1(\alpha)$. الناتج النقطي لـ (19) مع $v_1(\alpha)$ يعطي

$$\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0.$$

وبحسب (12) فهذا يعادل $\lambda'_1(\alpha) = 0$ مع $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$ ، هذا يعني ذلك $\alpha = \alpha^*$. لذا $\omega = \Lambda$.

5 السلوك المقارب للمتجهات الذاتية

5.1 الحالة حيث $m < 0$

دعونا الآن ندرس سلوك عدد كبير من المتجهات الذاتية $(\pi_{n,i})$ المرتبطة بالقيمة الذاتية w_1 . لنجرب مباشرة حل (4) بـ

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

بالنسبة إلى n ، لدينا

$$(n + 1)^{-\delta} = n^{-\delta} (1 + 1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} (1 - \delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$$

$$(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}.$$

لذا

$$n \pi_{n,i} \simeq \Pi^n \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

$$(n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} \simeq \Pi^{n \pm 1} \left(\frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right),$$

لن نكل. نرى أن التعابير في $\Pi^n/n^{\beta-1}$ في (4) يعطي

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

لذا

$$(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0, \quad \forall i.$$

إذا $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ ، ياخذ $\Pi = a_1/b_1$ ، $k_1 \neq 0$ و $k_i = 0$ إذا $i \neq 1$. مع $q_i = -Q_{i,i}$ ، تعابير في Π^n/n^β في (4) هي

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

لذا ،

$$\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$$

و

$$0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1, \quad \forall i \neq 1.$$

نستنتج

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \forall i \neq 1. \quad (21)$$

بدلاً من ذلك ، ندرس النظام (5) في محيط $x = b_1/a_1$. لقد فعلنا

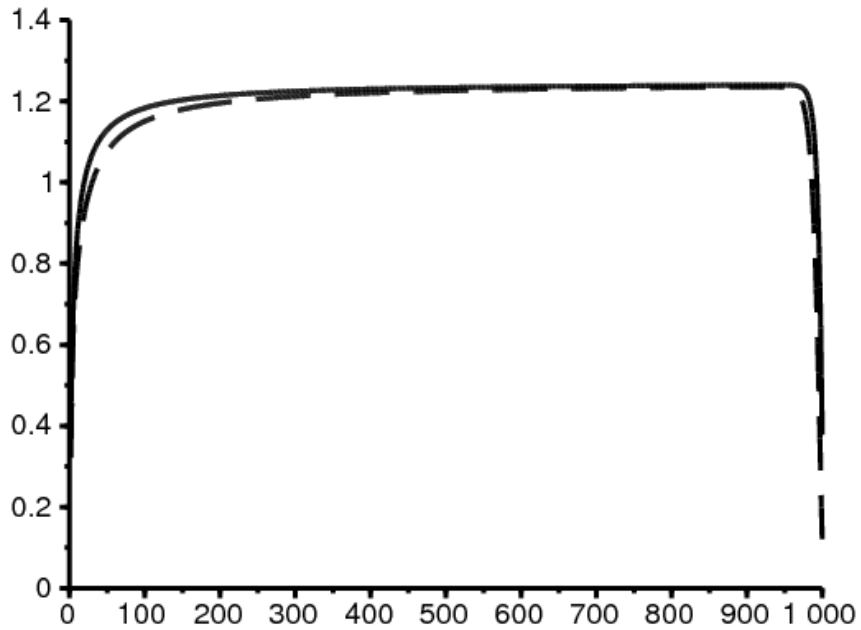
$$G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}.$$

من أجل القيمة الذاتية ω_1 ، يمكننا اختيار المتجه الذاتي المرتبط بذلك $\pi_{n,i} > 0$ ل $n \geq 1$. لكامل السلسلة $G_i(x)$ ضع في اعتبارك النقطة المفردة الأقرب إلى 0 في المستوى المعقد. هذه النقطة موجودة على المحور $x > 0$ ، وفقاً لنظرية كتبها A. Pringsheim (Queffélec and Flajolet and Sedgewick، 2009) ، فقد قمنا بذلك (Zuily ، 2013 ، ص 54) . وفقاً لـ (Flajolet and Sedgewick، 2009) ، فقد قمنا بذلك

$$\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n / n^{1+(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$$

ل $n \rightarrow +\infty$ ، ضمن ثابت مضاعف. هذا ما وجدناه.

مثال عددي. خذ مثالنا العددي (15) مرة أخرى مع $a_1 = 2,5$. يوضح الشكل 2 السلوك المقارب للناسل الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية μ_N ، لـ $N = 1000$. هنا لدينا $\Lambda = -1$. لذا لدينا $\beta = 1,3$ و $k_1/h_2 = 0,3$. يبدو أن الشكل يؤكد النتائج المقاربة التي تم الحصول عليها ، حيث يجب ألا يؤخذ تأثير الحافة القريب من $n = N$ في الاعتبار .



الشكل 2. الحالة $a_1 = 2,5$. نحن نتتبع $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$ (خط صلب) و $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$ (خط منقط) حسب n . نستخدم المصفوفة المقطوعة $M^{(N)}$ مع $N = 1000$.

5.2 الحالات حيث $m > 0$

نشك $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ أين $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$ في كلتا الحالتين ، فإن التعابير السائدة في (4) تعطي

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

بعبارة أخرى ، ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + (\beta - 1)D$. في الواقع ، إذا كنا نبحث عن حل للشكل $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ نحن مثل (20) مع $\Pi = 1$. أما الحالة حيث

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

لدينا

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n \pm 1,i} &\simeq \left(\log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[\frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[\frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

مما يؤدي مرة أخرى إلى المعادلة (22). هذا يشير إلى ذلك $\beta = 1 + \alpha^*$ إذا $\lambda'_1(1) > 1$ و $\beta = 2$ إذا $\lambda'_1(1) \leq 0$ في كلتا الحالتين ، نصف قطر التقارب $G_i(x)$ يساوي 1.

6 العودة إلى حالة معينة حيث $K = 2$

يمكننا أن نعتبر المعادلة التفاضلية للأمر 2 راضية $G_1(x)$ بدلا من النظام التفاضلي من الدرجة الأولى ل $G_1(x)$ و $G_2(x)$. نحصل

$$(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2) + (\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1 = 0.$$

القسمة على $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$ وتحليل الكسر العقلاني إلى عناصر بسيطة ، نحصل عليه

$$0 = \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1 - \frac{b_1}{a_1})(1 - \frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x - \frac{b_1}{a_1})(x - \frac{b_2}{a_2})}.$$

افترض الأرقام b_1/a_1 ، b_2/a_2 و 1 كلها مميزة. ندرك معادلة تفاضلية للشكل

$$\frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[\frac{1 - k_0 - k'_0}{x - x_0} + \frac{1 - k_1 - k'_1}{x - x_1} + \frac{1 - k_2 - k'_2}{x - x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} + \left[\frac{k_0k'_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{x - x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)}{x - x_1} + \frac{k_2k'_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}{x - x_2} \right] \frac{G_1}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} = 0,$$

أي معادلة ريمان التفاضلية (Roseau، 1997، p. 229) بثلاث نقاط منفردة $x_0 = 1$ ، $x_1 = b_1/a_1$ و $x_2 = b_2/a_2$. العارضون المميزون هم على التوالي

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

مع α_+ و α_- حلول (13). وبالتالي يمكن كتابة مجموعة الحلول باستخدام تدوين ريمان

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \right\} x.$$

بحسب (روسو ، 1997 ، ص 229) ، يمكن للمرء أن يكتب

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \right\} x.$$

نحدد

$$A = \alpha_+, \quad B = \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1}, \quad C = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

نعود إلى حالة المعادلة التفاضلية الهندسية

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

وهو ما يترجم إلى المساواة $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$ بين العلاقات غير المتناسقة. لذا

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \right. y \left. \right\}.$$

وظيفة الهندسة الفائقة هي

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

مع الترميز $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$. إذا كان x بالقرب من 1، يكون المتغير y على مقربة من 0. وفقاً لنظرية المعادلة التفاضلية الهندسية، هناك ثوابت κ_1 و κ_2 مع

$$G_1(x) = \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[\kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

شريطة أن $\mathcal{C} \neq 1$ ، وهذا يعني $\alpha_+ \neq \alpha_-$. حلول مع عارض فوشسي α_+ في $x = 1$ تتوافق مع $\kappa_2 = 0$:

$$G_1(x) = \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

القضية $m < 0$

نفترض على سبيل المثال $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$. ياخذ $\alpha_+ = 1$ للوظيفة الذاتية المرتبطة $\omega_1 = s(Q + D)$. يتم تحديد κ_1 لكي $G_1(0) = 1$ ثم

$$\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$$

من (13). نحدد

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1}.$$

هي قيمة x التي $y = -1$. لقد فعلنا $b_1/a_1 < \xi < 1$. ينخفض المتغير y إذا كان $0 < \xi < x$ من

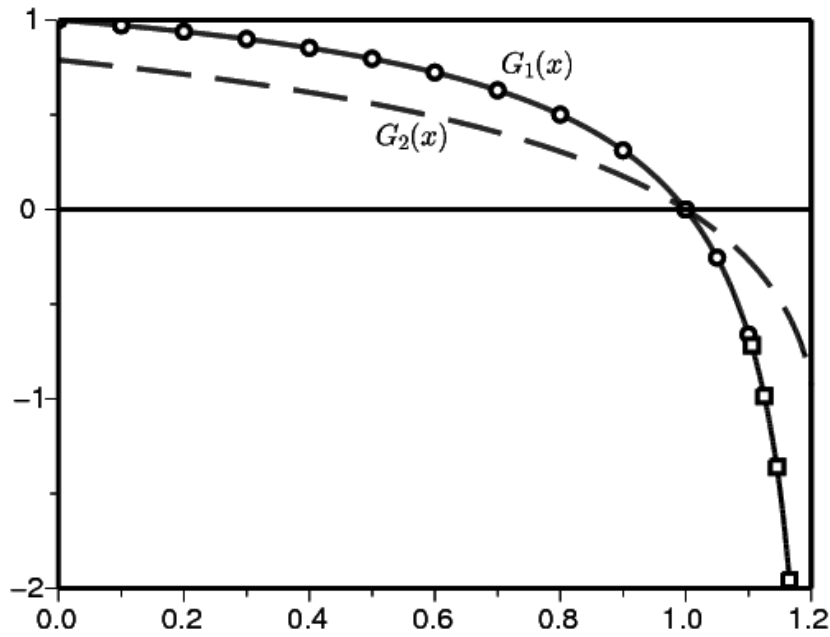
$$\left(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1 \right) / \left(\frac{b_2}{a_2} - 1 \right) \in]0, 1[$$

حتى 1- إذا $b_1/a_1 < x < \xi$ ، ينبغي استبدال التعبير (23)

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x - \frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{\frac{b_1}{a_1} - 1} \right)^{\alpha_+} F\left(\mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

وهو التعبير (18) من §182 من (ج. الأردن، 1896)، حيث كانت الحجة $\frac{y}{y-1}$ ينمو من 1/2 إلى 1.

خذ مثالنا العددي (15) مرة أخرى مع $a_1 = 2,5$. يوضح الشكل 3 وظائف التوليد $G_1(x)$ و $G_2(x)$ شيدت مع المتجه الذاتي المرتبط μ_N . هنا $N = 4000$ مع التقييس $G_1(0) = 1$. نستخدم طريقة هورنر لتقييم سلسلة التوليد. قارناها بالصيغ (23) و (24). هنا لدينا $\xi \simeq 1,105$. تم اختيار العامل المضاعف للتطبيع بحيث تكون الوظائف التي تم الحصول عليها بالطريقتين قابلة للتطبيق.



الشكل 3. الحالة $a_1 = 2,5$. نحن نتتبع وظائف التوليد $G_1(x)$ (خط صلب) و $G_2(x)$ (خط منقط) كدالة س. يستخدم المرء لحساب المصفوفة $\mathcal{M}^{(N)}$ مع $N = 4000$. الصيغ (23) و (24) لـ $G_1(x)$ يتم تمثيلها بدوائر ومربعات صغيرة.

القضية $m > 0$ و $\lambda'_1(1) \leq 0$

نفترض على سبيل المثال $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$. لدينا الآن

$$0 < b_1/a_1 < \xi < 1.$$

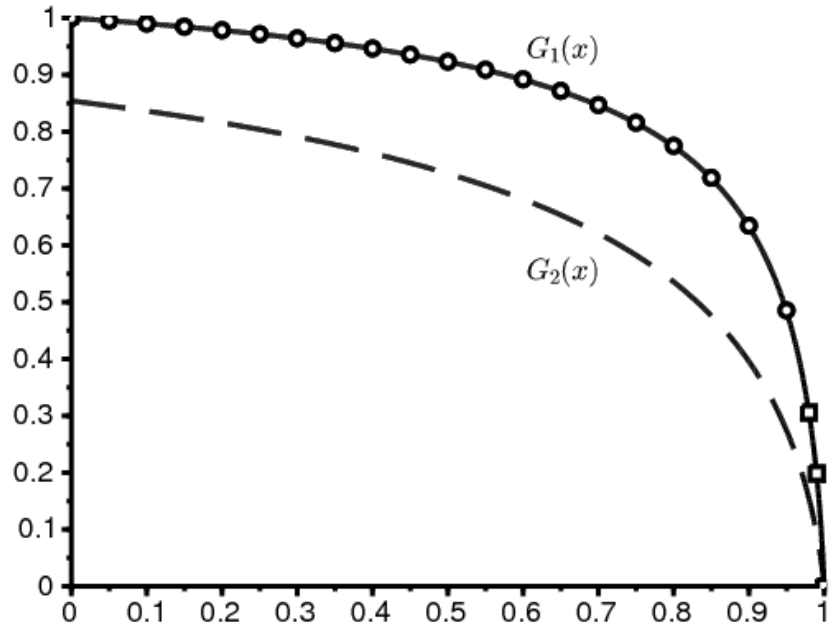
لم يعد التعبير (23) مناسباً لأن المتغير y يتباعد في $x = b_1/a_1 < 1$ لـ $0 < x < \xi$ ، y^{-1} ينقص برقم بين 0 و 1 إلى -1. نأخذ على هذا الفاصل التعبير (32) من (ج. الأردن، 1896، § 182)،

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, A+1-C; A+1-B; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

مع $\alpha_+ = 1$ ، $\omega_1 = s(Q+D)$ و κ_1 بحيث $G_1(0) = 1$. ومع ذلك، خلال الفاصل الزمني $\xi < x < 1$ ، نأخذ التعبير (34) من (ج. الأردن، 1896، § 182)، التي فيها الحجة $(1-y)^{-1}$ يزيد من 1/2 إلى 1:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-A} (1-1/y)^{-A} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left(\frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(A, C-B; A+1-B; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

خذ مثالنا العددي (15) مرة أخرى مع $a_1 = 3,2$. يوضح الشكل 4 الصيغتين (25) و (26). تتوافق بشكل جيد مع وظيفة التوليد التي تم إنشاؤها باستخدام المتجه الذاتي. هنا لدينا $\xi \simeq 0,97$.



الشكل 4. الحالة حيث $a_1 = 3,2$. مقارنة الصيغ (25) [دوائر صغيرة] و (26) [مربعات صغيرة] لـ $G_1(x)$ مع وظيفة التوليد للمتجه الذاتي المرتبط μ_N (خط صلب)، مع $N = 10^4$.

القضية $m > 0$ و $\lambda'_1(1) > 0$

التعبيرات (25) و (26) ربما لم تعد صالحة، حتى لو $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$. يجب استبدالها بتعبيرات تحتوي على مصطلح لوغاريتمي. إذا $a_1 = 3,5$ ، لدينا $\Lambda = -0,2$ و $\alpha^* = 0,6$ حسب الصيغ (14). لم نتمكن من الحصول على رسم بياني موحى في هذه الحالة.

7 شملت سلسلة ماركوف

لعملية اتصال دون الدرجة Z_n ($n = 0, 1, \dots$) في بيئة عشوائية ذات بيانات مستقلة موزعة بشكل متماثل، لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \quad (27)$$

أين $f(x)$ يشير إلى وظيفة التوليد (Dekking، 1988؛ Geiger et al.، 2003). μ ؛ يكون الحد الأدنى في الجانب الأيمن من (27). في حالة "ضعف الدرجة" حيث

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0,$$

لدينا

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

لثابت $c > 0$. في حالة "دون الدرجة" حيث

$$\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0,$$

لدينا $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$ و

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n, \quad n \rightarrow \infty$$

لثابت $c > 0$. هذه العملية دون حرج إذا $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$.

دعونا نعود إلى عملية الولادة والموت. نحن نقصر أنفسنا على حالة معينة من بيئتين: $K = 2$. نحدد

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

إذا $a_i \neq b_i$ ، هي الوظيفة المولدة لعدد الأفراد بعد وقت t بدءًا من الفرد في الوقت 0 في البيئة i (Hillion ، 1986). في جميع الحالات،

$$\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}.$$

بعد فترة t_1 ، تتحول البيئة من الحالة 1 إلى الحالة 2. بعد مرور بعض الوقت t_2 ، تتحول البيئة إلى الحالة 1. كثافات الاحتمالية المرتبطة بها هي $q_1 e^{-q_1 t_1}$ و $q_2 e^{-q_2 t_2}$. تأمل بعد ذلك سلسلة ماركوف المدرجة Z_n ($n = 0, 1, \dots$) النظر فقط إلى التغيير بين الوقت 0 والوقت $t_1 + t_2$. دعونا نسميها جيل. دالة التوليد هي

$$f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x)).$$

بالخصوص، $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$. إن عملية التفرع هذه دون حرج. في الواقع، لدينا

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

لان $R_0 < 1$. عملية الاتصال حرجة للغاية عندما

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[\frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

في هذه الحالة، لدينا

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

لاحظ أنه إذا $d_1 < 0$ و $d_2 < 0$ ، ثم تكون العملية دون حرجة بشدة. في الحالة الضعيفة دون الحرجة، لدينا

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

ويظهر القليل من الحساب

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2} \right)^2}.$$

لاحظ أن هذا الرقم < 1 إذا وفقط إذا $R_0 < 1$.

بالنسبة لمثالنا العددي، تظهر الصيغة (28) أن سلسلة ماركوف المضمنة هي دون حرج قوية عندما $a_1 < 3,4$. والغريب أن هذه العتبة تختلف عن تلك التي تفصل بين الحالات $\Lambda = s(Q + D)$ و $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$ مع $0 < \alpha^* < 1$ للعملية الخطية للولادة والموت. كانت هذه العتبة الأخيرة $\simeq 3,2829$ من القسم 3. ومع ذلك، فإن المعدل الذي تتلاقى عنده سلسلة ماركوف المضمنة للانقراض ليس له علاقة تذكر بالمعدل الذي تفعله عملية الزمن المستمرة بنفس الطريقة.

8 الخلاصة

لا يزال يتعين توضيح العديد من النقاط فيما يتعلق بسلوك القيم الذاتية والمتجهات الذاتية. من بين التعميمات المحتملة، يمكن للمرء أن يعتقد أنه إذا كانت المعاملات a_i ، b_i و $Q_{i,j}$ هي وظائف $-T$ فترة زمنية t ، ثم ستكون مساوية لـ $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ ، أين $f(\cdot)$ يعين الأس Flow المسيطر ويستبدل الحد الطيفي.

شكر وتقدير

- Artalejo JR, Economou A, Lopez–Herrero MJ (2013)
Stochastic epidemic models with random environment :
quasi–stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799– 831
- Bacaër N, Ed–Darras A (2014)
On linear birth– and– death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73– 90
- Bacaër N (2016)
Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire.
J Math Biol 73 : 847– 866
- Clayton A (2010)
Quasi– birth– and– death processes and matrix– valued orthogonal polynomials.
SIAM J Matrix Anal Appl 31 : 2239– 2260
- Cogburn R, Torrez WC (1981)
Birth and death processes with random environments in continuous time.
JAppl Probab 18 : 19– 30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix.
Proc Amer Math Soc 81 : 657– 658
- Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) Quasi–stationary distributions. Springer, Berlin
- D’Souza JC, Hambly BM (1997)
On the survival probability of a branching process in a random environment.
Adv Appl Prob 29 : 38– 55
- Dekking FM (1988)
On the survival probability of a branching process in a finite state i. i. d. environment.
Stoch Proc Appl 27 : 151– 157
- Dieudonné J (2003) *Éléments d’analyse*, tome 8. Jacques Gabay, Paris
- Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices*, tome 2. Dunod, Paris
- Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003)
Théorèmes limites pour des processus de branchement sous– critiques en environnement aléatoire
Ann I H Poincaré– Pr 39 : 593– 620
- Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*.
Presses Universitaires de France, Paris
- Jordan C (1896) *Cours d’analyse de l’École polytechnique*, tome 3. Gauthier– Villars, Paris
- Latouche G, Ramaswami V (1999)
Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. SIAM, Philadelphie
- Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris
- Methée PD (1959) Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions.
Comment Math Helv 33 : 38– 46
- Nkague Nkamba L (2012)
Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et sus
Thèse, Université de Lorraine
- Nussbaum RD (1986) Convexity and log convexity for the spectral radius.
Linear Algebra Appl 73 : 59– 122
- Picard Ph (1965) Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie.
Ann I H Poincaré B 2 : 151– 172
- Queffélec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l’agrégation*, 4e édition. Dunod, Paris
- Roseau M (1997) *Équations différentielles*.
In : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*.
Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222– 244
- Sericola B (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*. Lavoisier, Paris