



**HAL**  
open science

# Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire

Nicolas Bacaër

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër. Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire. *Journal of Mathematical Biology*, 2017, 75 (1), pp.85-108. 10.1007/s00285-016-1079-0 . hal-01414042v2

**HAL Id: hal-01414042**

**<https://hal.science/hal-01414042v2>**

Submitted on 26 Oct 2018 (v2), last revised 21 Jun 2020 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire\*

Nicolas Bacaër<sup>†‡</sup>

## Résumé

On obtient une formule explicite pour le taux d'extinction des processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire. On illustre cette formule en calculant numériquement la valeur propre de plus grande partie réelle pour la matrice tronquée de l'équation maîtresse. La fonction génératrice du vecteur propre associé vérifie un système singulier d'équations différentielles du type de Fuchs. Une attention particulière est portée au cas de deux environnements, qui conduit à une équation différentielle de Riemann.

## Zusammenfassung

Man findet eine explizite Formel für die Sterberate der unterkritischen linearen Geburts- und Todesprozesse in einer zufälligen Umgebung. Diese Formel vergleicht man mit dem Eigenwert mit dem größten realen Teil für die abstumpfte Matrix der Mastergleichung. Die erzeugende Funktion des Eigenvektors ist die Lösung eines Fuchsschen singularen Systems von Differentialgleichungen. Wenn die Umgebung zwischen zwei Zustände oszilliert, findet man eine Riemannsche Differentialgleichung.

## 1 Introduction

Supposons que l'environnement oscille entre un nombre fini  $K$  d'états ( $K \geq 2$ ) suivant une chaîne de Markov en temps continu homogène. Soit  $Q = (Q_{i,j})$  la matrice dont la transposée est le générateur infinitésimal de cette chaîne : ainsi  $Q_{i,j} \geq 0$  pour tout  $i \neq j$  et  $\sum_i Q_{i,j} = 0$  pour tout  $j$ . Supposons la matrice  $Q$  irréductible. Il existe un unique vecteur  $u = (u_i)$  tel que  $Qu = 0$  et  $\sum_i u_i = 1$  [24, p. 152].

Notons  $n$  le nombre d'individus d'une population qui évolue dans cet environnement aléatoire. Dans l'environnement  $i$  ( $1 \leq i \leq K$ ), supposons qu'on ait un processus linéaire de naissance et de mort de paramètres  $na_i$  pour les

---

\*J. Math. Biol. 75 (2017) 85-108

<sup>†</sup>Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>‡</sup>Université Pierre et Marie Curie, Campus des Cordeliers, Paris, France.

naissances et  $n b_i$  pour les morts, avec  $a_i > 0$  et  $b_i > 0$ . Autrement dit, chaque individu a pendant un intervalle de temps infinitésimal  $dt$  une probabilité  $a_i dt$  de donner naissance à un nouvel individu et une probabilité  $b_i dt$  de mourir.

Supposons qu'au temps  $t = 0$  il y ait  $n_0$  individus ( $n_0 \geq 1$ ) et que l'environnement soit  $i_0$ . Soit  $p_{n,i}(t)$  la probabilité d'avoir  $n$  individus dans l'environnement  $i$  au temps  $t$ . On a donc  $p_{n,i}(0) = 1$  si  $(n, i) = (n_0, i_0)$  et  $p_{n,i}(0) = 0$  sinon. L'équation maîtresse est

$$\frac{dp_{n,i}}{dt} = a_i(n-1)p_{n-1,i} + b_i(n+1)p_{n+1,i} - (a_i + b_i)n p_{n,i} + \sum_j Q_{i,j} p_{n,j} \quad (1)$$

pour  $n \geq 0$  et  $1 \leq i \leq K$ ; le terme en  $p_{n-1,i}$  est absent pour  $n = 0$ . À la suite de [17], posons

$$R_0 = \frac{\sum_{i=1}^K a_i u_i}{\sum_{i=1}^K b_i u_i}.$$

On supposera toujours que  $R_0 < 1$  : la population s'éteint presque sûrement [5, 2]. C'est le régime sous-critique. Quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a  $p_{0,i}(t) \rightarrow u_i$  et  $p_{n,i}(t) \rightarrow 0$  pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i$ . De plus, le taux d'extinction

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p_{n,i}(t) \quad (2)$$

existe et ne dépend pas de  $n \geq 1$  ou de  $i$  [7, section 4.5]. Il ne dépend pas non plus de la condition initiale  $(n_0, i_0)$ . Le problème est de déterminer explicitement ce taux.

On note  $\Re(\cdot)$  la partie réelle d'un nombre complexe. Pour toute matrice  $M$ , on note  $\sigma(M)$  son spectre et  $s(M) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(M)\}$  sa borne spectrale. Lorsque la matrice  $M$  a des coefficients hors diagonale qui sont positifs ou nuls, ce qui sera toujours le cas ci-dessous, il résulte du théorème de Perron et Frobenius que  $s(M)$  est aussi une valeur propre de  $M$ . On note  $A$  la matrice diagonale  $\text{diag}[a_1, \dots, a_K]$ . On note  $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_K]$ . Enfin, on note la différence  $D = A - B = \text{diag}[d_1, \dots, d_K]$ .

Dans la section 2, on utilise un résultat de [8] concernant les processus de branchement en environnement aléatoire pour montrer que

$$\omega_1 = \Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D). \quad (3)$$

On étudie aussi les variations de la fonction  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  et de sa dérivée  $\lambda_1'(\alpha)$ , ce qui conduit à distinguer trois cas :

- celui où  $m = \max_i(a_i - b_i) \leq 0$ ;
- celui où  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) \leq 0$ ;
- celui où  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) > 0$ .

Dans les deux premiers cas, le minimum  $\Lambda$  de  $\lambda_1(\alpha)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  est atteint en  $\alpha = 1$ , de sorte que la formule (3) montre que  $\omega_1 = s(Q + D)$ .

Dans la section 3, on observe que la borne spectrale  $\mu_N$  de la matrice tronquée au rang  $N$  de l'équation maîtresse forme une suite croissante. Puis

on calcule numériquement  $\mu_N$  dans une série d'exemples. On remarque en particulier la lenteur, sans doute logarithmique, avec laquelle  $\mu_N$  converge vers  $\omega_1$  dans le troisième cas évoqué ci-dessus.

À partir de la section 4, on s'intéresse aux autres valeurs propres et aux vecteurs propres associés, pour lesquels on n'obtient que des résultats très partiels. On transforme d'abord le problème de valeur propre

$$\omega \pi_{n,i} = a_i(n-1)\pi_{n-1,i} + b_i(n+1)\pi_{n+1,i} - (a_i + b_i)n\pi_{n,i} + \sum_j Q_{i,j}\pi_{n,j}, \quad (4)$$

en un système différentiel singulier du type de Fuchs [18]

$$\omega G_i(x) + (1-x)(a_i x - b_i)G_i'(x) = \sum_j Q_{i,j}G_j(x) \quad (5)$$

pour la fonction génératrice

$$G_i(x) = \sum_{n \geq 0} \pi_{n,i} x^n. \quad (6)$$

On montre que si le vecteur propre  $(\pi_{n,i})$  décroît géométriquement par rapport à  $n$ , alors la valeur propre  $\omega$  est nécessairement égale à la valeur propre d'une matrice  $Q + \nu D$  avec  $\nu$  entier  $\geq 0$ . Lorsque  $m < 0$  et  $\omega = s(Q + \nu D)$ , on construit effectivement des solutions analytiques du système (5) au voisinage de  $x = 1$ . On remarque que l'équation caractéristique du système fuchsien, obtenue en cherchant des solutions qui se comportent comme  $(1-x)^\alpha$  au voisinage de  $x = 1$ , est

$$\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0; \quad (7)$$

autrement dit,  $\omega$  est une valeur propre de la matrice  $Q + \alpha D$ . Dans le troisième cas, celui où la fonction  $\lambda_1(\alpha)$  atteint son minimum  $\Lambda$  en  $\alpha^*$  à l'intérieur de l'intervalle  $]0, 1[$ , on montre que si  $\omega = s(Q + \alpha D)$  et si le développement de  $G_i(x)$  au voisinage de  $x = 1$  contient un terme logarithmique, alors nécessairement  $\alpha = \alpha^*$  et donc  $\omega = \Lambda$ . D'ailleurs dans la théorie de Fuchs, les termes logarithmiques apparaissent quand l'équation caractéristique (7), et en particulier la branche  $\omega = s(Q + \alpha D)$ , d'inconnue  $\alpha$  a une racine double. À cause de la convexité de la fonction  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$ , ceci ne se produit que pour  $\omega = \Lambda$ .

Dans la section 5, on étudie directement le comportement asymptotique, c'est-à-dire pour  $n$  grand, du vecteur propre limite  $\pi = (\pi_{n,i})$  associé à  $\omega_1$ . La section 6 fait le lien lorsque  $K = 2$  avec une équation différentielle de Riemann. Dans la section 7, on s'intéresse à la chaîne de Markov incluse, cette dernière rentrant dans le cadre des travaux de [9] et de [13], entre autres. On remarque que le seuil entre les régimes faiblement et fortement sous-critiques n'est pas le même que celui où  $\Lambda$  cesse de valoir  $s(Q + D)$ .

Pour mieux situer notre problème par rapport à quelques autres travaux, on note que le système (1) est un « processus de quasi naissance et de mort non homogène » ; voir par exemple [24, p. 350] ou [16, chapitre 12], qui discutent de la distribution stationnaire mais pas du taux de convergence vers celle-ci. Par

ailleurs, dans un environnement constant avec  $a_i = a$  et  $b_i = b > a$  pour tout  $i$ , on a  $D = (a - b)I$ , où  $I$  est la matrice identité; donc  $s(Q + \alpha D) = \alpha(a - b)$  et la formule (3) donne  $\omega_1 = a - b$ , ce qui est bien connu soit par un calcul direct [14, chapitre V], soit comme cas particulier des résultats de Karlin et McGregor sur les processus de naissance et de mort qui ne sont pas forcément linéaires [7, section 5.9.2]. On note également que les généralisations de ces derniers résultats aux processus de quasi naissance et de mort [4] ne concernent que des cas où le « spectre » est réel, ce qui n'est pas le cas en général dans notre modèle. Enfin, le modèle (1) intervient comme linéarisation de certains modèles de population non linéaires, et notamment de modèles épidémiques [3].

## 2 La formule pour le taux d'extinction

### 2.1 Discrétisation en temps de l'environnement et passage à la limite

La transposée d'une matrice  $M$  (ou d'un vecteur) se note  $M^\top$ . Soit  $\delta > 0$  un petit pas de temps. Discrétisons en temps les fluctuations de l'environnement. La matrice  $\mathcal{P} = e^{Q^\top \delta}$  est la matrice d'une chaîne de Markov en temps discret. Noter que  $\mathcal{P}_{i,j} > 0$  pour tout  $i$  et  $j$  puisque la matrice  $Q$  est irréductible. L'environnement reste bloqué dans l'état  $i$  pendant un pas de temps  $\delta$  puis saute à l'état  $j$  avec une probabilité  $\mathcal{P}_{i,j}$ . Dans l'intervalle de temps de longueur  $\delta$ , on suppose toujours que la population suit un processus linéaire de naissance et de mort de paramètres  $na_i$  et  $nb_i$  si l'environnement est dans l'état  $i$ . Ainsi, un individu génère en moyenne  $m_i = e^{(a_i - b_i)\delta}$  individus; noter que  $0 < m_i < +\infty$ . On se trouve donc dans le cadre d'un processus de branchement en environnement markovien. Si  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$  est une suite de  $k$  environnements traversés, on pose  $\theta_k = m_{\xi_0} m_{\xi_1} \dots m_{\xi_{k-1}}$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , posons

$$\Phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}(\theta_k^\alpha), \quad (8)$$

où  $\mathbb{E}(\cdot)$  désigne l'espérance. Soit  $Z_k$  la taille de la population au bout de  $k$  pas de temps de taille  $\delta$ . Ainsi  $\mathbb{P}(Z_k > 0)$  est la probabilité que la population ne soit pas éteinte. Le corollaire 1.8 de [8] montre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_k > 0)^{1/k} = \exp \left( \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha) \right). \quad (9)$$

Soit  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  et  $\Sigma(\alpha)$  la matrice donnée par  $\Sigma_{i,j}(\alpha) = \mathcal{P}_{i,j} m_j^\alpha$ . Autrement dit,  $\Sigma(\alpha) = \mathcal{P} \text{diag}[m_1^\alpha, \dots, m_K^\alpha]$ . Dans notre cas, l'espérance du produit  $\theta_k^\alpha = m_{\xi_0}^\alpha m_{\xi_1}^\alpha \dots m_{\xi_{k-1}}^\alpha$  se calcule explicitement :

$$\mathbb{E}(\theta_k^\alpha) = (0 \dots 0 m_{i_0}^\alpha 0 \dots 0) (\Sigma(\alpha))^{k-1} \mathbf{1}^\top. \quad (10)$$

Soit  $\rho(\Sigma(\alpha))$  le rayon spectral de la matrice positive  $\Sigma(\alpha)$ . Il résulte de (8) et de (10) que  $\Phi(\alpha) = \log \rho(\Sigma(\alpha))$ . C'est d'ailleurs une fonction analytique de  $\alpha$  sur

$\mathbb{R}$  puisque  $\rho(\Sigma(\alpha))$  est une valeur propre simple de la matrice positive  $\Sigma(\alpha)$ . La limite (9) est donc égale à  $\min\{\rho(\Sigma(\alpha)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ . Le taux d'extinction  $\omega$  en temps continu est donc

$$\omega = \frac{1}{\delta} \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(\Sigma(\alpha)) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \log \left( [\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} \right).$$

Prenons en particulier  $\delta = 1/h$  avec  $h \geq 1$  qui est un entier. Alors  $[\rho(\Sigma(\alpha))]^{1/\delta} = \rho(\Sigma(\alpha)^h)$ . Or

$$\Sigma(\alpha)^h = \left[ e^{Q^\top/h} e^{\alpha D/h} \right]^h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{Q^\top + \alpha D}$$

d'après la formule de Lie. Le rayon spectral étant une fonction continue, on a

$$\rho(\Sigma(\alpha)^h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \rho \left( e^{Q^\top + \alpha D} \right) = e^{s(Q^\top + \alpha D)}.$$

Comme  $s(Q^\top + \alpha D) = s(Q + \alpha D)$ , on conclut que

$$\omega \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha D).$$

Enfin, la proposition 4.12 de [7] assure l'égalité des taux d'extinction définis avec (2) ou avec la probabilité de non-extinction comme dans le membre de gauche de l'équation (9). On a ainsi trouvé la formule pour le taux d'extinction en temps continu.

## 2.2 Étude de la fonction $\alpha \mapsto s(Q + \alpha D)$

Posons maintenant

$$\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D), \quad \Lambda = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_1(\alpha), \quad m = \max_{1 \leq i \leq K} (a_i - b_i) = \max_i d_i. \quad (11)$$

**Proposition 1.** *Si  $m \leq 0$ , alors  $\Lambda = \lambda_1(1)$ . Si  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , alors on a aussi  $\Lambda = \lambda_1(1)$ . Si  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) > 0$ , alors il existe un unique  $\alpha^* \in ]0, 1[$  tel que  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ .*

*Démonstration.* Si  $v = (v_i)$  est un vecteur, on note :  $v \geq 0$  si  $v_i \geq 0$  pour tout  $i$ ;  $v > 0$  si  $v \geq 0$  et  $v \neq 0$ ;  $v \gg 0$  si  $v_i > 0$  pour tout  $i$ . On utilise des notations identiques pour les matrices.

Reprenons le raisonnement de la section 9 de [3] mais avec  $R_0 < 1$  et non  $R_0 > 1$ . Comme la matrice  $Q$  est irréductible et la matrice  $D$  diagonale, la matrice  $Q + \alpha D$  est aussi irréductible pour tout  $\alpha$ . Ainsi  $\lambda_1(\alpha)$  est une valeur propre simple de la matrice  $Q + \alpha D$ . Soit  $w_1(\alpha) \gg 0$  l'unique vecteur propre réel de la matrice  $Q + \alpha D$  associé à la valeur propre  $\lambda_1(\alpha)$  tel que  $\langle \mathbf{1}^\top, w_1(\alpha) \rangle = 1$ , où  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel de vecteurs réels. On sait que  $\lambda_1(\alpha)$  est aussi une valeur propre simple de la matrice transposée  $Q^\top + \alpha D$ . Notons  $v_1(\alpha) \gg 0$  l'unique vecteur propre réel correspondant tel que

$\langle v_1(\alpha), w_1(\alpha) \rangle = 1$ . D'après le théorème de perturbation des valeurs propres simples, on sait que la fonction  $\lambda_1(\alpha)$  est dérivable et que

$$\lambda_1'(\alpha) = \langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle. \quad (12)$$

En particulier pour  $\alpha = 0$ , on a  $\lambda_1(0) = s(Q) = 0$ ,  $w_1(0) = u$ ,  $v_1(0) = \mathbf{1}^\top$  et  $\lambda_1'(0) = \langle \mathbf{1}^\top, D u \rangle = \sum_{i=1}^K (a_i - b_i) u_i < 0$  puisque  $R_0 < 1$ .

Si  $m \leq 0$ , la fonction  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  est décroissante puisque  $D \leq 0$ . Considérons maintenant le cas où  $m > 0$ . Rappelons que  $\lambda_1'(0) < 0$ . La fonction  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  est convexe [6]. Donc  $\alpha \mapsto \lambda_1'(\alpha)$  est une fonction croissante. Par ailleurs, lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ , on a  $\lambda_1(\alpha) \sim \alpha m \rightarrow +\infty$ . La fonction  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  est dans ce cas strictement convexe puisqu'elle n'est pas affine [20]. Il existe donc un unique  $\alpha^* > 0$  tel que  $\lambda_1'(\alpha^*) = 0$ .

Ainsi donc, trois cas se présentent :

- Si  $m \leq 0$ , alors  $\Lambda = \lambda_1(1)$ .
- Si  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , alors  $\alpha^* \geq 1$  et  $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha)$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , de sorte qu'on a encore  $\Lambda = \lambda_1(1)$ .
- Si  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) > 0$ , alors  $\alpha^* \in ]0, 1[$  et  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ .

□

### 2.3 Le cas de deux environnements

Supposons que  $K = 2$ . Posons  $Q_{i,i} = -q_i$  pour  $i = 1, 2$ , de sorte que

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}.$$

L'équation caractéristique  $\det(Q + \alpha D - \omega I) = 0$  s'écrit

$$\omega^2 - (-q_1 + \alpha d_1 - q_2 + \alpha d_2)\omega + (-q_1 + \alpha d_1)(-q_2 + \alpha d_2) - q_1 q_2 = 0.$$

Cette relation entre  $\omega$  et  $\alpha$  décrit une hyperbole dans le plan  $(\omega, \alpha)$ . Elle peut aussi s'écrire

$$\alpha^2 - \alpha \left( \frac{\omega + q_1}{d_1} + \frac{\omega + q_2}{d_2} \right) + \frac{(\omega + q_1)(\omega + q_2) - q_1 q_2}{d_1 d_2} = 0. \quad (13)$$

De plus,  $\lambda_1(\alpha) = s(Q + \alpha D)$  est tel que

$$2 \lambda_1(\alpha) = -q_1 - q_2 + \alpha(d_1 + d_2) + \sqrt{[\alpha(d_1 - d_2) + q_2 - q_1]^2 + 4q_1 q_2}$$

et

$$2 \lambda_1'(1) = d_1 + d_2 + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)}{\sqrt{(d_1 - d_2 + q_2 - q_1)^2 + 4q_1 q_2}}.$$

Si  $m \leq 0$ , ou si  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) \leq 0$ , on a  $\Lambda = \lambda_1(1)$ . Si  $m > 0$  et  $\lambda_1'(1) > 0$ , on a forcément  $d_1 d_2 < 0$ . Supposons dans ce cas par exemple que  $d_1 > 0$  et  $d_2 < 0$ . En annulant le discriminant de (13), on trouve après un petit calcul que

$$\Lambda = -\frac{(\sqrt{-q_1 d_2} - \sqrt{q_2 d_1})^2}{d_1 - d_2}, \quad \alpha^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda + q_1}{d_1} + \frac{\Lambda + q_2}{d_2} \right]. \quad (14)$$

Remarquer que  $\Lambda = 0$  et  $\alpha^* = 0$  quand  $q_1 d_2 + q_2 d_1 = 0$ , c'est-à-dire quand  $R_0 = 1$ .

### 3 La matrice tronquée

Posons  $p = (p_{0,1}, \dots, p_{0,K}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,K}, \dots)^\top$ . L'équation maîtresse s'écrit  $\frac{dp}{dt} = \mathcal{M}p$ , où  $\mathcal{M}$  est une matrice infinie. Tronquons la matrice  $\mathcal{M}$  et posons

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} Q & B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - S & 2B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & Q - 2S & 3B & & 0 \\ 0 & 0 & 2A & Q - 3S & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & Q - NS \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & \mathcal{U}^{(N)} \end{array} \right)$$

avec  $S = A + B$ . Soit  $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)})$ .

**Proposition 2.** *Pour tout entier  $N \geq 1$ , on a  $\mu_N < \mu_{N+1} < 0$ . La suite  $(\mu_N)$  a donc une limite quand  $N \rightarrow +\infty$ , à savoir  $\omega_1$ .*

*Démonstration.* Une matrice de Metzler est une matrice dont tous les coefficients hors diagonale sont  $\geq 0$ . La matrice  $\mathcal{U}^{(N)}$  est une matrice de Metzler irréductible puisque  $Q$  est irréductible,  $a_i > 0$  et  $b_i > 0$  pour tout  $i$ . On peut donc utiliser les corollaires du théorème de Perron et Frobenius concernant la borne spectrale des matrices de Metzler ; voir par exemple [19, théorème 30]. Soit  $e = (1, \dots, 1)^\top$ . Alors

$$(\mathcal{U}^{(N)})^\top e = (-b_1, \dots, -b_K, 0, \dots, 0, -Na_1, \dots, -Na_K) < 0 = 0 \cdot e.$$

Comme  $e \gg 0$ , on en déduit que  $s((\mathcal{U}^{(N)})^\top) < 0$ . Or  $s(\mathcal{U}^{(N)}) = s((\mathcal{U}^{(N)})^\top)$ . Donc  $\mu_N = s(\mathcal{U}^{(N)}) < 0$ .

La borne spectrale  $\mu_N$  de la matrice  $\mathcal{U}^{(N)}$  est une valeur propre et il existe un vecteur propre  $\mathcal{W}^{(N)} \gg 0$  associé. Ainsi  $\mathcal{U}^{(N)}\mathcal{W}^{(N)} = \mu_N \mathcal{W}^{(N)}$ . Le vecteur  $\mathcal{W}^{(N)}$  est composé de  $N$  blocs de taille  $K$  :  $\mathcal{W}^{(N)} = (\mathcal{W}_1^{(N)}, \dots, \mathcal{W}_N^{(N)})$ . Considérons le vecteur  $\widetilde{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}^{(N)}, 0)$  dont le 0 est aussi de taille  $K$ . Alors

$$\mathcal{U}^{(N+1)}\widetilde{\mathcal{W}} = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{U}^{(N)} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \cdots & \begin{matrix} NA \\ Q - (N+1)S \end{matrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(N)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_N \mathcal{W}^{(N)} \\ NA \mathcal{W}_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Comme  $NA \mathcal{W}_N^{(N)} \gg 0$ , on voit que  $\mathcal{U}^{(N+1)}\widetilde{\mathcal{W}} > \mu_N \widetilde{\mathcal{W}}$ . Comme  $\widetilde{\mathcal{W}} > 0$ , on en déduit que  $\mu_{N+1} > \mu_N$ .  $\square$

Comme valeurs numériques, prenons

$$q_1 = q_2 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 3. \quad (15)$$



Alors  $u_1 = u_2 = 0,5$ . Faisons varier  $a_1$  par exemple entre 2 et 5; cette limite supérieure correspond à  $R_0 = 1$ . Pour des petites valeurs de  $N$ , typiquement jusqu'à  $N = 10^3$ , on peut utiliser un logiciel tel que Scilab pour déterminer le spectre complet de la matrice  $\mathcal{U}^{(N)}$ . Sinon on peut déterminer la plus petite valeur propre de  $-\mathcal{U}^{(N)}$  et le vecteur propre correspondant par la méthode itérative de la puissance appliquée à la matrice inverse. On tire avantage de la structure tridiagonale par bloc pour l'inversion à chaque itération [1]. Avec cet algorithme, on peut aller jusqu'à  $N = 10^6$  sans trop de problèmes.

La figure 1 montre en fonction de  $a_1$  la borne spectrale  $\mu_N$  de la matrice  $\mathcal{U}^{(N)}$  pour  $N$  fixé mais grand; l'algorithme itératif est arrêté lorsque deux estimations consécutives de  $\mu_N$  diffèrent de moins que  $10^{-4}$ . La figure montre aussi en pointillé et en fonction de  $a_1$  le nombre  $\Lambda$  donné par la formule (3), qui vaut  $\lambda_1(1)$  lorsque  $\lambda'_1(1) \leq 0$  et qui est donné par la formule (14) lorsque  $\lambda'_1(1) > 0$ . On note que  $\lambda'_1(1) < 0$  lorsque  $a_1 < a_1^*$  et  $\lambda'_1(1) > 0$  lorsque  $a_1 > a_1^*$ , avec  $a_1^* \simeq 3,2829$ . L'accord entre  $\Lambda$  et la limite des  $(\mu_N)$  semble probable. Néanmoins, la convergence est extrêmement lente, peut-être logarithmique, lorsque  $R_0$  se rapproche de 1, en particulier lorsque  $a_1 > a_1^*$ .

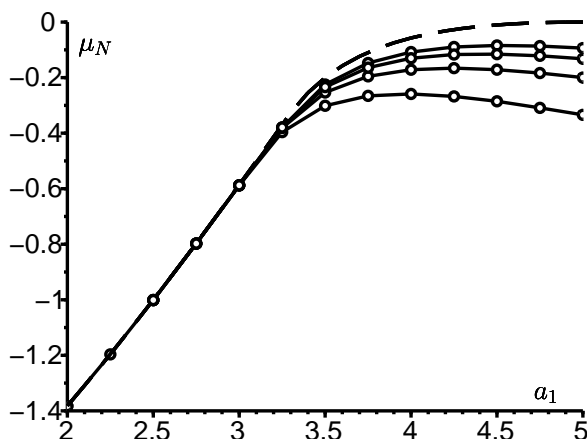


FIGURE 1 – En pointillé :  $\Lambda$  donné par la formule (3) en fonction de  $a_1$ . Lignes continues avec des points :  $\mu_N$  pour  $N = 10^3, 10^4, 10^5$  et  $10^6$  (de bas en haut).

## 4 Vecteurs propres et autres valeurs propres

On s'intéresse désormais à la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$  du vecteur propre associé à  $\mu_N$  ainsi qu'aux autres valeurs et vecteurs propres. À ce sujet, on n'obtiendra que des résultats très partiels.

## 4.1 Un système fuchsien

Notons  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes et  $'$  la dérivée par rapport à la variable  $x$ .

**Proposition 3.** *Si  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $(\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  vérifient (4) et si les séries génératrices (6) ont un rayon de convergence  $\geq R$ , alors les  $G_i(x)$  sont solution du système (5) pour  $x \in \mathbb{C}$ ,  $|x| < R$  et  $1 \leq i \leq K$ .*

*Démonstration.* Noter que  $G_i'(x) = \sum_{n \geq 1} n \pi_{n,i} x^{n-1}$  pour  $|x| < R$ . Comme dans le cas classique avec environnement constant [14], on multiplie (4) par  $x^n$  et on somme sur tous les  $n \geq 0$ , ce qui donne

$$\omega G_i(x) = a_i x^2 G_i'(x) + b_i G_i'(x) - (a_i + b_i)x G_i'(x) + \sum_j Q_{i,j} G_j(x).$$

Ceci équivaut à (5). □

### Remarques.

- On note que (5) est un problème de valeur propre pour un système différentiel singulier. Ce système est du type de Fuchs si  $a_i \neq b_i$  pour tout  $i$  [18]. Le système est singulier en  $x = 1$  et en  $x = b_i/a_i$  pour  $1 \leq i \leq K$ . Noter que  $b_i/a_i < 1$  si  $a_i > b_i$ . On peut également écrire le système sous la forme

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{b_i}{a_i}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right]. \quad (16)$$

- Un exemple d'équation différentielle scalaire d'ordre 2 du type de Fuchs est apparu dans l'étude des processus de naissance et de mort quadratiques dans un environnement constant [21].

## 4.2 Valeurs propres possibles lorsque le rayon de convergence est $> 1$

**Proposition 4.** *Si  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $\pi = (\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  vérifient (4) avec  $\pi \neq 0$ , si les séries génératrices (6) ont un rayon de convergence strictement supérieur à 1, alors il existe un entier  $\nu \geq 0$  tel que  $\omega$  soit une valeur propre de la matrice  $Q + \nu D$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout  $\nu \geq 0$ ,  $\omega$  ne soit pas une valeur propre de  $Q + \nu D$ . Les fonctions  $G_i(x)$  sont analytiques dans un disque  $|x| < R$  avec  $R > 1$ . On fait tendre  $x$  vers 1 dans (5). On obtient que

$$\omega G_i(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j(1).$$

Or  $\omega$  n'est pas une valeur propre de  $Q$ . Donc  $G_i(1) = 0$  pour tout  $i$ .

Soit un entier  $\nu \geq 1$ . Par récurrence, supposons que l'on ait démontré que  $G_i^{(\nu-1)}(1) = 0$ . On dérive  $\nu$  fois l'équation (5) par rapport à  $x$  et on applique la formule de Leibniz au produit de  $(1-x)(a_i x - b_i)$  et de  $G_i'(x)$ . On obtient que

$$\omega G_i^{(\nu)}(x) + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} [(1-x)(a_i x - b_i)]^{(k)} G_i^{(\nu-k+1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x),$$

où  $\binom{\nu}{k}$  désigne le coefficient du binôme. Comme le polynôme  $(1-x)(a_i x - b_i)$  est de degré 2 en  $x$ , seuls les termes avec  $0 \leq k \leq 2$  sont non nuls dans la somme de gauche :

$$\begin{aligned} \omega G_i^{(\nu)}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) G_i^{(\nu+1)}(x) \\ + \nu[a_i(1-2x) + b_i] G_i^{(\nu)}(x) - a_i \nu(\nu-1) G_i^{(\nu-1)}(x) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(x). \end{aligned}$$

On fait tendre  $x$  vers 1 et on trouve avec l'hypothèse de récurrence que

$$\omega G_i^{(\nu)}(1) - \nu(a_i - b_i) G_i^{(\nu)}(1) = \sum_j Q_{i,j} G_j^{(\nu)}(1).$$

Or  $\omega$  n'est pas une valeur propre de la matrice  $Q + \nu D$ . Donc  $G_i^{(\nu)}(1) = 0$  pour tout  $i$ .

Ainsi, on a démontré que  $G_i^{(\nu)}(1) = 0$  pour tout  $i$  et pour tout entier  $\nu \geq 0$ . Puisque la fonction  $G_i(x)$  est analytique, on a  $G_i(x) = 0$  dans un voisinage de  $x = 1$ , et même  $G_i(x) = 0$  dans tout le disque  $|x| < R$  d'après le principe du prolongement analytique. Donc  $\pi_{n,i} = G_i^{(n)}(0)/n! = 0$  pour tout  $n \geq 0$  et  $1 \leq i \leq K$ . Ceci contredit l'hypothèse  $\pi \neq 0$ .  $\square$

### Remarques.

- Les valeurs propres des matrices  $Q + \nu D$  ne sont pas forcément toutes réelles, de sorte que le système (5) ne relève ni de la théorie de Weyl et Kodaira [10], ni de l'étude de [4] sur certains processus de quasi naissance et de mort. Ces valeurs propres sont néanmoins toutes réelles lorsque  $K = 2$  car alors la valeur propre  $s(Q + \nu D)$  est bien réelle; l'autre valeur propre est donc aussi réelle.
- Au voisinage de  $x = 1$ , le système (16) peut s'écrire

$$G_i'(x) = \frac{1}{a_i - b_i} \left[ \frac{1}{x-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)^{n+1}} \right] \left[ \omega G_i(x) - \sum_j Q_{i,j} G_j(x) \right].$$

Soit  $G(x)$  le vecteur  $(G_i(x))$ . Le système est donc de la forme  $G'(x) = \Omega(x)G(x)$  avec  $\Omega(x) = \frac{\Omega_{-1}}{x-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(x-1)^n$  et  $\Omega_{-1} = D^{-1}(\omega I - Q)$ . Si le rayon de convergence de la série  $G_i(x)$  est  $> 1$ , alors  $G_i(x)$  est analytique dans un voisinage de  $x = 1$ . Donc le système ci-dessus a une solution analytique dans un voisinage de  $x = 1$ . D'après [12, p. 155], il existe un

entier  $\nu \geq 0$  tel que  $\nu$  soit valeur propre de  $\Omega_{-1}$ . Donc il existe un vecteur  $w \neq 0$  tel que  $D^{-1}(\omega I - Q)w = \nu w$ . Donc  $\omega w = (Q + \nu D)w$  et  $\omega$  est une valeur propre de  $Q + \nu D$ . C'est ce que l'on a démontré de façon élémentaire dans la proposition 4.

**Exemple.** Reprenons les valeurs numériques (15) avec  $a_1 = 2,5$ . Dans ce cas, on a  $m < 0$ . Pour  $N = 1000$ , les vingt premières valeurs propres de la matrice  $\mathcal{M}^{(N)}$  sont à peu près données par le tableau suivant :

0	-1	-1,6972244	-2	-2,2877855
-2,8377223	-3,3689563	-3,5	-3,8902278	-4,4056104
-4,9172375	-5,3027756	-5,426328	-5,933627	-6,4396149
-6,9446154	-7,2122145	-7,448851	-7,9524836	-8,4556214.

Or les valeurs propres de  $Q$  sont 0 et  $-2$ , celles de  $Q + D$  sont  $-1$  et  $-3,5$ , celles de  $Q + 2D$  sont  $-1,6972244$  et  $-5,3027756$ , celles de  $Q + 3D$  sont  $-2,2877855$  et  $-7,2122145$ , celles de  $Q + 4D$  sont  $-2,8377223$  et  $-9,1622777$ , etc. On les retrouve bien dans le tableau ci-dessus. En somme, il semblerait que les valeurs propres de  $\mathcal{M}^{(N)}$  convergent quand  $N \rightarrow +\infty$  vers les valeurs propres des matrices  $Q + \nu D$  pour  $\nu = 0, 1, 2 \dots$ . La borne spectrale  $\mu_N$  converge vers  $s(Q + D)$ . Rappelons qu'ici  $s(Q + D) = \Lambda$  puisque  $m < 0$ .

### 4.3 Le cas où $a_i < b_i$ pour tout $i$

Supposons  $m < 0$ . Cherchons formellement une solution au voisinage de  $x = 1$  du système (5) de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n. \quad (17)$$

On obtient

$$\omega \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,i}(1-x)^n - (a_i x - b_i) \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n,i}(1-x)^n = \sum_j Q_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j}(1-x)^n.$$

En tenant compte de ce que  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ , on identifie les termes en  $(1-x)^n$  et on obtient

$$[\omega - (a_i - b_i)n]c_{n,i} + a_i(n-1)c_{n-1,i} = \sum_j Q_{i,j}c_{n,j}$$

pour tout  $n \geq 0$ , les termes en  $c_{n-1,i}$  étant absents lorsque  $n = 0$ . En posant  $c_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,K})$ , on voit donc que (17) est une solution de (5) si

$$[Q - \omega I]c_0 = 0, \quad [Q + nD - \omega I]c_n = (n-1)Ac_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Un premier type de solution s'obtient en choisissant  $\omega$  parmi les valeurs propres de  $Q$  et  $c_0$  un vecteur propre correspondant. La relation (18) permet

de calculer  $c_n$  pour  $n \geq 1$ , pourvu que la matrice  $Q + nD - \omega I$  soit toujours inversible.

Un deuxième type de solution s'obtient en choisissant  $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$  avec  $\nu \geq 1$ ,  $\omega$  une valeur propre de  $Q + \nu D$  et  $c_\nu$  un vecteur propre associé. Puis on calcule  $c_n$  pour  $n \geq \nu + 1$  avec l'équation (18), pourvu encore que la matrice  $Q + nD - \omega I$  soit toujours inversible.

Prenons en particulier  $\omega = s(Q + \nu D)$  avec  $\nu \geq 0$  qui est entier. Comme  $a_i < b_i$  pour tout  $i$ , on a  $D < 0$ . De plus,  $Q + \nu D$  est irréductible. Donc pour tout entier  $n > \nu$ , on a  $s(Q + nD) < s(Q + \nu D) = \omega$ . Donc  $s(Q + nD - \omega I) < 0$ , la matrice  $Q + nD - \omega I$  est une matrice de Metzler inversible et  $(Q + nD - \omega I)^{-1} \ll 0$ . On a  $c_n = [Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)Ac_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$ , on remarque que  $[Q + nD - \omega I]^{-1}(n-1)A \rightarrow D^{-1}A$  donc  $c_{n,i}/c_{n-1,i} \rightarrow a_i/(a_i - b_i)$ . La série (17) est convergente pour  $|1 - x| < |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ . Les séries (17) pour  $1 \leq i \leq K$  sont toutes convergentes pour  $|1 - x| < \min_i |\frac{b_i}{a_i} - 1|$ .

#### 4.4 Un rayon de convergence égal à 1

Dans les deux numéros précédents, il était question des valeurs propres des matrices  $Q + \nu D$  pour  $\nu$  entier  $\geq 0$ . Cependant [2] ont déjà mis en évidence un exemple où  $R_0 < 1$  mais où la valeur propre  $s(Q + D)$  de la matrice  $Q + D$  est strictement positive : il suffit de prendre  $q_1 = q_2 = 1$ ,  $a_1 = 2,7$ ,  $a_2 = 0,8$ ,  $b_1 = b_2 = 2$  (noter que  $a_1 > b_1$ ). Or notre problème initial ne peut avoir de valeur propre positive. On en conclut en particulier que les séries génératrices  $G_i(x)$  n'ont pas toujours un rayon de convergence  $> 1$ . La proposition suivante lie le comportement de  $G_i(x)$  près de  $x = 1$  avec le paramètre  $\alpha$ .

**Proposition 5.** *Si  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $\pi = (\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  vérifient (4) avec  $\pi \neq 0$ , si les séries génératrices (6) ont un rayon de convergence égal à 1, s'il existe un nombre réel  $\alpha > 0$ , un nombre entier  $J \geq 0$  et des fonctions  $g_{i,j}(x)$  analytiques dans un disque centré en  $x = 1$  tels que  $G_i(x) = (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g_{i,j}(x)$  sur un intervalle  $(1-\varepsilon, 1)$  avec  $\varepsilon > 0$ , si le vecteur  $(g_{i,J}(1))$  est non nul, alors  $\omega$  est une valeur propre de la matrice  $Q + \alpha D$ .*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= (1-x)^\alpha \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^j g'_{i,j}(x) \\ &\quad + (1-x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^j - j [\log(1-x)]^{j-1} \right\} g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

Or  $G_i(x)$  vérifie l'équation (5) pour  $|x| < 1$ . En divisant par  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$ ,

on trouve que

$$\begin{aligned}
& \omega \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g_{i,j}(x) + (1-x)(a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J [\log(1-x)]^{j-J} g'_{i,j}(x) \\
& + (a_i x - b_i) \sum_{j=0}^J \left\{ -\alpha [\log(1-x)]^{j-J} - j [\log(1-x)]^{j-1-J} \right\} g_{i,j}(x) \\
& = \sum_j Q_{i,j} \sum_{h=0}^J [\log(1-x)]^{h-J} g_{j,h}(x).
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $x$  vers 1, on obtient

$$\omega g_{i,J}(1) - \alpha(a_i - b_i)g_{i,J}(1) = \sum_j Q_{i,j}g_{j,J}(1).$$

Donc  $\omega$  est une valeur propre de la matrice  $Q + \alpha D$ . □

**Remarque.** La forme de la fonction  $G_i(x)$  dans la proposition 5, qui combine fonction puissance et un polynôme en logarithme, est celle que l'on peut attendre d'une solution d'un système de Fuchs au voisinage d'une singularité [12, p. 159].

#### 4.5 Le cas où $m > 0$ et $\lambda'_1(1) > 0$

**Proposition 6.** *Supposons que  $m > 0$  et que  $\lambda'_1(1) > 0$ . Soit  $\alpha^* \in ]0, 1[$  tel que  $\Lambda = \lambda_1(\alpha^*)$ . Soit  $\alpha > 0$  et  $\omega = s(Q + \alpha D)$ . Si  $\omega$  et  $\pi = (\pi_{n,i}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{K}}$  vérifient (4), si les séries génératrices associées  $G_i(x)$  ont un rayon de convergence égal à 1 et si les  $G_i(x)$  peuvent s'écrire sur un intervalle  $(1 - \varepsilon, 1)$  avec  $\varepsilon > 0$  sous la forme*

$$G_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}$$

avec  $J \geq 1$  et un vecteur  $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$  qui est non nul, alors  $\alpha = \alpha^*$  et  $\omega = \Lambda$ .

*Démonstration.* En effet,

$$G'_i(x) = - \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n + \alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha-1}.$$

Rappelons que  $a_i x - b_i = a_i - b_i - a_i(1-x)$ . Comme  $G_i(x)$  est une solution de

(5) sur le disque  $|x| < 1$ , on a

$$\begin{aligned}
& \omega \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha} \\
& - (a_i - b_i) \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n+\alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha} \\
& + a_i \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{i,j,n} [j + (n+\alpha) \log(1-x)] [\log(1-x)]^{j-1} (1-x)^{n+\alpha+1} \\
& = \sum_{k=1}^K Q_{i,k} \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^{\infty} g_{k,j,n} [\log(1-x)]^j (1-x)^{n+\alpha}.
\end{aligned}$$

Les termes en  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^J$  et ceux en  $(1-x)^\alpha [\log(1-x)]^{J-1}$  doivent chacun s'annuler :

$$\begin{aligned}
\omega g_{i,J,0} - \alpha(a_i - b_i) g_{i,J,0} &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J,0}, \\
\omega g_{i,J-1,0} - (a_i - b_i) [J g_{i,J,0} + \alpha g_{i,J-1,0}] &= \sum_k Q_{i,k} g_{k,J-1,0}.
\end{aligned}$$

Soit  $\gamma_j$  le vecteur  $(g_{i,j,0})_{1 \leq i \leq K}$ . On a donc

$$(Q + \alpha D - \omega I) \gamma_J = 0, \quad (Q + \alpha D - \omega I) \gamma_{J-1} + J D \gamma_J = 0.$$

Comme  $\omega = s(Q + \alpha D)$  et  $\gamma_J \neq 0$ , la première équation montre que  $\gamma_J$  est un vecteur propre de la matrice  $Q + \alpha D$  associé à la valeur propre  $s(Q + \alpha D)$ . Avec les notations de la section 2.2, on en déduit qu'il existe une constante  $\kappa \neq 0$  telle que  $\gamma_J = \kappa w_1(\alpha)$ . De plus, on voit que la deuxième équation prend la forme

$$[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I] \gamma_{J-1} + J \kappa D w_1(\alpha) = 0. \quad (19)$$

La matrice  $[Q + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$  a un noyau de dimension 1 dirigé par  $w_1(\alpha)$ . Toujours avec les notations de la section 2.2, la matrice transposée  $[Q^\top + \alpha D - \lambda_1(\alpha) I]$  a un noyau de dimension 1 dirigé par  $v_1(\alpha)$ . En faisant le produit scalaire de (19) avec  $v_1(\alpha)$ , on voit que  $\langle v_1(\alpha), D w_1(\alpha) \rangle = 0$ . Ceci équivaut d'après (12) à  $\lambda'_1(\alpha) = 0$ . Comme  $m > 0$  et  $\lambda'_1(1) > 0$ , ceci implique que  $\alpha = \alpha^*$ . Donc  $\omega = \Lambda$ .  $\square$

## 5 Comportement asymptotique des vecteurs propres

### 5.1 Le cas où $m < 0$

Étudions maintenant le comportement pour  $n$  grand d'un vecteur propre  $(\pi_{n,i})$  associé à la valeur propre  $\omega_1$ . Essayons directement une solution de (4)

telle que, pour  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\pi_{n,i} = \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right).$$

Pour  $n$  grand, on a  $(n+1)^{-\delta} = n^{-\delta}(1+1/n)^{-\delta} \simeq n^{-\delta}(1-\delta/n) \simeq n^{-\delta} - \delta n^{-\delta-1}$  et  $(n-1)^{-\delta} \simeq n^{-\delta} + \delta n^{-\delta-1}$ . Donc

$$\begin{aligned} n \pi_{n,i} &\simeq \Pi^n \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \\ (n \pm 1) \pi_{n \pm 1, i} &\simeq \Pi^{n \pm 1} \left( \frac{k_i}{n^{\beta-1}} \pm \frac{(1-\beta)k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^\beta} + \dots \right), \end{aligned}$$

pour  $n$  grand. On voit que les termes d'ordre  $\Pi^n/n^{\beta-1}$  dans (4) donnent

$$0 = -(a_i + b_i)k_i + b_i k_i \Pi + a_i k_i / \Pi.$$

Ainsi  $(\Pi - 1)(b_i - a_i/\Pi)k_i = 0$  pour tout  $i$ . Si  $a_1/b_1 = \max_i a_i/b_i$ , on prend  $\Pi = a_1/b_1$ ,  $k_1 \neq 0$  et  $k_i = 0$  si  $i \neq 1$ . Posons  $q_i = -Q_{i,i}$ . Les termes d'ordre  $\Pi^n/n^\beta$  dans (4) sont

$$\omega_1 k_i = (b_i \Pi + a_i/\Pi - a_i - b_i)h_i + (a_i/\Pi - b_i \Pi)(\beta - 1)k_i + \sum_j Q_{i,j} k_j. \quad (20)$$

Ainsi,  $\omega_1 k_1 = (b_1 - a_1)(\beta - 1)k_1 - q_1 k_1$  et  $0 = (a_1 - b_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)h_i + Q_{i,1}k_1$  si  $i \neq 1$ . On en déduit que

$$\beta = 1 + \frac{\omega_1 + q_1}{b_1 - a_1}, \quad h_i = \frac{Q_{i,1}}{(b_1 - a_1)(b_i/b_1 - a_i/a_1)} k_1 \quad \text{si } i \neq 1. \quad (21)$$

Alternativement, on aurait pu étudier le système (5) au voisinage de  $x = b_1/a_1$  : ceci aurait suggéré que  $G_1(x) \sim (x - b_1/a_1)^{(\omega_1 + q_1)/(b_1 - a_1)}$ . Rappelons que pour la valeur propre  $\omega_1$ , on peut choisir le vecteur propre associé de sorte que  $\pi_{n,i} > 0$  pour  $n \geq 1$ ; le point singulier de la série entière  $G_i(x)$  le plus proche de 0 dans le plan complexe se trouve donc sur l'axe  $x > 0$  d'après un théorème de Pringsheim [22, p. 54]. D'après [11], on aurait alors  $\pi_{n,1} \sim (a_1/b_1)^n/n^{1+(\omega_1+q_1)/(b_1-a_1)}$  pour  $n \rightarrow +\infty$ , à une constante multiplicative près. C'est bien ce que l'on a trouvé.

**Exemple numérique.** Reprenons notre exemple numérique (15) avec  $a_1 = 2,5$ . La figure 2 montre le comportement asymptotique du vecteur propre associé à la valeur propre  $\mu_N$  de la matrice  $\mathcal{M}^{(N)}$  pour  $N = 1000$ . Ici on a  $\Lambda = -1$ . On a donc  $\beta = 1$  et  $k_1/h_2 = 0,3$ . La figure semble bien confirmer les résultats asymptotiques obtenus, vu qu'il ne faut pas tenir compte de l'effet de bord près de  $n = N$ .



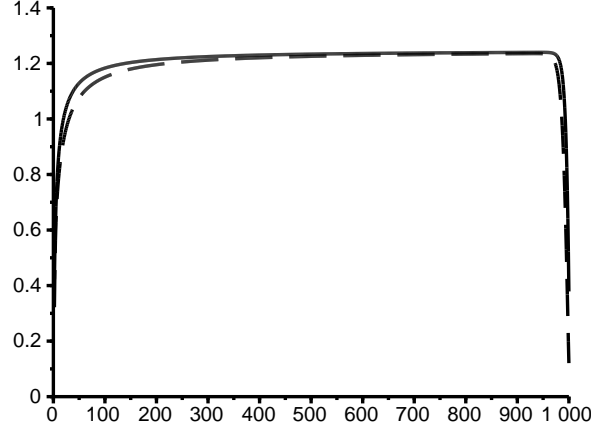


FIGURE 2 – Le cas où  $a_1 = 2,5$ . On trace  $n^\beta(b/a_1)^n \pi_{n,1}$  (ligne continue) et  $n^{\beta+1}(b/a_1)^n \pi_{n,2} k_1/h_2$  (ligne en pointillé) en fonction de  $n$ . On utilise la matrice tronquée  $\mathcal{M}^{(N)}$  avec  $N = 1000$ .

## 5.2 Les cas où $m > 0$

On soupçonne que  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$  ou que  $\pi_{n,i} \simeq k_i(\log n)/n^\beta$ . Dans les deux cas, les termes dominants dans (4) donnent

$$\omega k_i = (\beta - 1)(a_i - b_i)k_i + \sum_j Q_{i,j}k_j. \quad (22)$$

Autrement dit,  $\omega$  est une valeur propre de la matrice  $Q + (\beta - 1)D$ . En effet, dans le cas où l'on cherche une solution de la forme  $\pi_{n,i} \simeq k_i/n^\beta$ , on est comme dans (20) avec  $\Pi = 1$ . Quant au cas où

$$\pi_{n,i} \simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^\beta} + \frac{h_i}{n^{\beta+1}} + \dots \right],$$

on voit que

$$\begin{aligned} (n \pm 1)\pi_{n \pm 1,i} &\simeq \left( \log n \pm \frac{1}{n} \right) \left[ \frac{k_i}{(n \pm 1)^{\beta-1}} + \frac{h_i}{(n \pm 1)^\beta} \right] + \dots \\ &\simeq (\log n) \left[ \frac{k_i}{n^{\beta-1}} + \frac{h_i \pm (1 - \beta)k_i}{n^\beta} \right] + \dots, \end{aligned}$$

ce qui conduit à nouveau à l'équation (22). Ceci suggère que  $\beta = 1 + \alpha^*$  si  $\lambda'_1(1) > 1$  et  $\beta = 2$  si  $\lambda'_1(1) \leq 0$ . Dans les deux cas, le rayon de convergence des  $G_i(x)$  serait égal à 1.

## 6 Retour sur le cas particulier où $K = 2$

On peut considérer l'équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par  $G_1(x)$  plutôt que le système différentiel d'ordre 1 pour  $G_1(x)$  et  $G_2(x)$ . On obtient

$$\begin{aligned} & (1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\frac{d^2G_1}{dx^2} \\ & + (1-x)\left\{[\omega+q_1+a_1(1-2x)+b_1](a_2x-b_2)+(\omega+q_2)(a_1x-b_1)\right\}\frac{dG_1}{dx} \\ & + [(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2]G_1 = 0. \end{aligned}$$

En divisant par  $(1-x)^2(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)$  et en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle en facteur de  $\frac{dG_1}{dx}$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[ \frac{1 - \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} - \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x-1} + \frac{1 + \frac{\omega+q_1}{a_1-b_1} + \frac{\omega+q_2}{a_2-b_2}}{x - \frac{b_1}{a_1}} + \frac{\omega+q_2}{x - \frac{b_2}{a_2}} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ & + \left[ \frac{(\omega+q_1)(\omega+q_2)-q_1q_2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} \frac{(1-\frac{b_1}{a_1})(1-\frac{b_2}{a_2})}{x-1} \right] \frac{G_1}{(x-1)(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})}. \end{aligned}$$

Supposons que les nombres  $b_1/a_1$ ,  $b_2/a_2$  et 1 soient tous distincts. On reconnaît une équation différentielle de la forme

$$\begin{aligned} & \frac{d^2G_1}{dx^2} + \left[ \frac{1-k_0-k'_0}{x-x_0} + \frac{1-k_1-k'_1}{x-x_1} + \frac{1-k_2-k'_2}{x-x_2} \right] \frac{dG_1}{dx} \\ & + \left[ \frac{k_0k'_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{x-x_0} + \frac{k_1k'_1(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{x-x_1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{k_2k'_2(x_2-x_1)(x_2-x_0)}{x-x_2} \right] \frac{G_1}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une équation différentielle de Riemann [23, p. 229] avec trois points singuliers  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = b_1/a_1$  et  $x_2 = b_2/a_2$ , dont les exposants de Fuchs sont respectivement

$$(k_0, k'_0) = (\alpha_+, \alpha_-), \quad (k_1, k'_1) = \left(0, -\frac{\omega+q_1}{d_1}\right), \quad (k_2, k'_2) = \left(0, 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2}\right),$$

avec  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  solutions de (13). L'ensemble des solutions peut donc s'écrire avec la notation de Riemann

$$G_1(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ \alpha_+ & 0 & 0 \\ \alpha_- & -\frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

D'après [23, p. 229], on peut écrire

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} \\ 0 & \alpha_+ & 0 \\ \alpha_- - \alpha_+ & \alpha_+ - \frac{\omega+q_1}{d_1} & 1 - \frac{\omega+q_2}{d_2} \end{array} \quad x \right\}.$$

Posons

$$\mathcal{A} = \alpha_+, \quad \mathcal{B} = \alpha_+ - \frac{\omega + q_1}{d_1}, \quad \mathcal{C} = 1 + \alpha_+ - \alpha_-.$$

On se ramène au cas de l'équation différentielle hypergéométrique en posant

$$y = \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \frac{\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}}{\frac{b_2}{a_2} - 1},$$

ce qui traduit l'égalité  $(y, 0; \infty, 1) = (x, 1; b_1/a_1, b_2/a_2)$  entre rapports anharmoniques. Ainsi

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 1 - \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{array} \quad y \right\}.$$

Rappelons que la fonction hypergéométrique est définie pour  $|z| < 1$  par

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$$

avec la notation  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$ . Quand  $x$  est au voisinage de 1, la variable  $y$  est au voisinage de 0. D'après la théorie de l'équation différentielle hypergéométrique, il existe des constantes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  telles que

$$G_1(x) = \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} \left[ \kappa_1 F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y) + \kappa_2 y^{1-\mathcal{C}} F(\mathcal{A} - \mathcal{C} + 1, \mathcal{B} - \mathcal{C} + 1; 2 - \mathcal{C}; y) \right],$$

pourvu que  $\mathcal{C} \neq 1$ , c'est-à-dire  $\alpha_- \neq \alpha_+$ . Les solutions avec un exposant  $\alpha_+$  en  $x = 1$  correspondent à  $\kappa_2 = 0$  :

$$G_1(x) = \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x - \frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; y). \quad (23)$$

**Le cas où  $m < 0$ .** Supposons par exemple que  $a_2/b_2 < a_1/b_1 < 1$ . Il faut prendre  $\alpha_+ = 1$  pour la fonction propre associée à la valeur propre  $\omega_1 = s(Q + D)$ , et  $\kappa_1$  de sorte que  $G_1(0) = 1$ . Alors  $\alpha_- = \frac{\omega_1 + q_1}{d_1} + \frac{\omega_1 + q_2}{d_2} - 1$  d'après (13). Posons

$$\xi = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 2\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}{2\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} - 1},$$

qui est la valeur de  $x$  pour laquelle  $y = -1$ . On a  $1 < \xi < b_1/a_1$ . Sur l'intervalle  $0 < x < \xi$ , on remarque que la variable  $y$  décroît de  $(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2} - 1) / (\frac{b_2}{a_2} - 1)$ , qui

est compris entre 0 et 1, jusqu'à  $-1$ . Sur l'intervalle  $\xi < x < b_1/a_1$ , l'expression (23) doit être remplacée par

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} (1-y)^{-\mathcal{A}} F \left( \mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1} \right) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_1}{a_1}-1} \right)^{\alpha_+} F \left( \mathcal{A}, \mathcal{C} - \mathcal{B}; \mathcal{C}; \frac{y}{y-1} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

qui est l'expression (18) du §182 de [15], dans laquelle l'argument  $\frac{y}{y-1}$  croît de  $\frac{1}{2}$  à 1.

Reprenons notre exemple numérique (15) avec  $a_1 = 2,5$ . La figure 3 montre les fonctions génératrices  $G_1(x)$  et  $G_2(x)$  construites avec le vecteur propre associé à la valeur propre  $\mu_N$  de la matrice  $\mathcal{M}^{(N)}$  où  $N = 4000$ , avec la normalisation  $G_1(0) = 1$ . On utilise la méthode de Horner pour évaluer les séries génératrices. On les compare avec les formules (23) et (24). Ici on a  $\xi \simeq 1,105$ . Le facteur multiplicatif de normalisation a été choisi de sorte que les fonctions obtenues par les deux méthodes soient superposables.

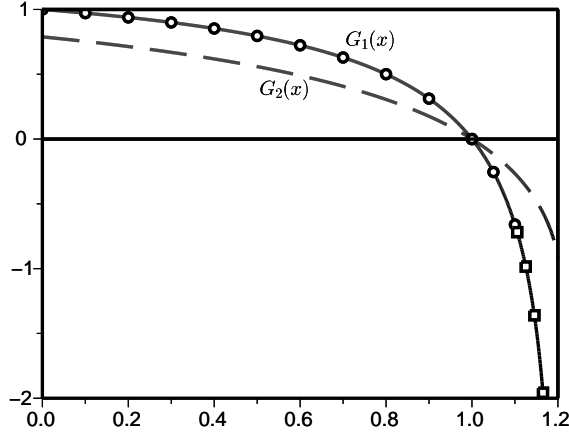


FIGURE 3 – Le cas où  $a_1 = 2,5$ . Les fonctions génératrices  $G_1(x)$  (ligne continue) et  $G_2(x)$  (en pointillé) sont tracées en fonction de  $x$  et calculées en utilisant la matrice  $\mathcal{M}^{(N)}$  avec  $N = 4000$ . Les formules (23) et (24) pour  $G_1(x)$  sont représentées par des petits cercles et carrés.

**Le cas où  $m > 0$  et  $\lambda'_1(1) \leq 0$ .** Supposons par exemple que  $a_1/b_1 > 1 > a_2/b_2$ . On a maintenant  $0 < b_1/a_1 < \xi < 1$ . L'expression (23) ne convient plus car  $y$  diverge en  $x = b_1/a_1 < 1$ . Sur l'intervalle  $0 < x < \xi$ , on voit que

$y^{-1}$  décroît d'un nombre dans l'intervalle  $]0, 1[$  jusqu'à  $-1$ . On prend sur cet intervalle l'expression (32) du §182 de [15],

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-\mathcal{A}} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-\mathcal{C}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; y^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{A}+1-\mathcal{C}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; y^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

avec  $\alpha_+ = 1$ ,  $\omega_1 = s(Q+D)$  et  $\kappa_1$  de sorte que  $G_1(0) = 1$ . En revanche, sur l'intervalle  $\xi < x < 1$ , on prend l'expression (34) du même §182 de [15], dans laquelle l'argument  $(1-y)^{-1}$  croît de  $\frac{1}{2}$  à 1 :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} y^{-\mathcal{A}} (1-1/y)^{-\mathcal{A}} F(\mathcal{A}, \mathcal{C}-\mathcal{B}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; (1-y)^{-1}) \\ &= \kappa_1 \left( \frac{x-1}{x-\frac{b_2}{a_2}} \frac{\frac{b_2}{a_2}-1}{1-\frac{b_1}{a_1}} \right)^{\alpha_+} F(\mathcal{A}, \mathcal{C}-\mathcal{B}; \mathcal{A}+1-\mathcal{B}; (1-y)^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Reprenons notre exemple numérique (15) avec  $a_1 = 3,2$ . La figure 4 montre les formules (25) et (26). Elles semblent bien coïncider avec la fonction génératrice construite avec le vecteur propre associé à la valeur propre  $\mu_N$  de la matrice tronquée  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Ici on a  $\xi \simeq 0,97$ .

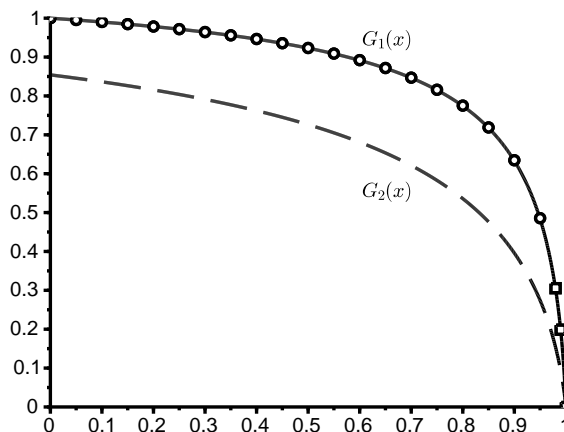


FIGURE 4 – Le cas où  $a_1 = 3,2$ . Comparaison des formules (25) [petits cercles] et (26) [petits carrés] pour  $G_1(x)$  avec la fonction génératrice du vecteur propre associé à la valeur propre  $\mu_N$  de la matrice tronquée  $\mathcal{M}^{(N)}$  (ligne continue) avec  $N = 10^4$ .

**Le cas où  $m > 0$  et  $\lambda'_1(1) > 0$ .** Il se peut que les expressions (25) et (26) ne soient plus valables, même en prenant  $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha^*$ , et qu'elles doivent être remplacées par des expressions contenant un terme logarithmique. Si  $a_1 = 3,5$ , on a  $\Lambda = -0,2$  et  $\alpha^* = 0,6$  d'après les formules (14). On n'est pas parvenu à obtenir de figure suggestive dans ce cas.

## 7 Chaîne de Markov incluse

Rappelons que pour un processus de branchement  $Z_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) sous-critique dans un environnement aléatoire avec des environnements indépendants identiquement distribués, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(Z_n > 0)]^{1/n} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathbb{E}(f'(1)^\alpha), \quad (27)$$

où  $f(x)$  désigne la fonction génératrice [9, 13]. Soit  $\mu$  le minimum dans le côté droit de (27). On sait plus précisément que dans le cas « faiblement sous-critique » où  $\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) > 0$ , on a  $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c n^{-3/2} \mu^n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  pour une constante  $c > 0$ . Dans le cas « fortement sous-critique » où  $\mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) < 0$ , on a  $\mu = \mathbb{E}(f'(1))$  et  $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c \mu^n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  pour une constante  $c > 0$ . Rappelons que le processus est sous-critique lorsque  $\mathbb{E}(\log f'(1)) < 0$ .

Retournons à notre processus de naissance et de mort en temps continu. Limitons nous pour simplifier au cas particulier de deux environnements :  $K = 2$ . Posons

$$\phi_{i,t}(x) = \frac{b_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}{a_i(1-x)e^{(a_i-b_i)t} + a_i x - b_i}.$$

Si  $a_i \neq b_i$ , c'est bien la fonction génératrice du nombre d'individus au bout d'un temps  $t$  partant d'un individu au temps 0 dans l'environnement  $i$  [14]. Dans tous les cas,  $\phi'_{i,t}(1) = e^{(a_i-b_i)t} = e^{d_i t}$ . Partant de l'environnement 1, l'environnement bascule vers l'état 2 au bout d'un temps  $t_1$ , puis rebascule vers l'état 1 au bout d'un temps  $t_2$ . Les densités de probabilités associées sont  $q_1 e^{-q_1 t_1}$  et  $q_2 e^{-q_2 t_2}$ . Considérons alors la chaîne de Markov incluse  $Z_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) ne regardant que le changement entre le temps 0 et le temps  $t_1 + t_2$ ; appelons cela une génération. La fonction génératrice est  $f(x) = \phi_{2,t_2}(\phi_{1,t_1}(x))$ . En particulier,  $f'(1) = e^{d_1 t_1 + d_2 t_2}$ . Ce processus de branchement est sous-critique. En effet, on a

$$\mathbb{E}(\log f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 = \frac{d_1}{q_1} + \frac{d_2}{q_2} < 0$$

puisque  $R_0 < 1$ . Le processus de branchement est fortement sous-critique lorsque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(1) \log f'(1)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} [d_1 t_1 + d_2 t_2] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)} \left[ \frac{d_1}{q_1 - d_1} + \frac{d_2}{q_2 - d_2} \right] < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Dans ce cas, on a

$$\mu = \mathbb{E}(f'(1)) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_1 e^{-q_1 t_1} q_2 e^{-q_2 t_2} e^{d_1 t_1} e^{d_2 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{q_1 q_2}{(q_1 - d_1)(q_2 - d_2)}.$$

Noter que si  $d_1 < 0$  et  $d_2 < 0$ , alors le processus est fortement sous-critique. Dans le cas faiblement sous-critique, on a

$$\mathbb{E}(f'(1)^\alpha) = \frac{q_1 q_2}{[q_1 - \alpha d_1][q_2 - \alpha d_2]}$$

et un petit calcul montre que

$$\mu = -4 \frac{\frac{q_1}{d_1} \frac{q_2}{d_2}}{\left(\frac{q_1}{d_1} - \frac{q_2}{d_2}\right)^2}.$$

Noter que ce nombre est  $< 1$  si et seulement si  $R_0 < 1$ .

Pour notre exemple numérique, la formule (28) montre que la chaîne de Markov incluse est fortement sous-critique lorsque  $a_1 < 3,4$ . Curieusement, ce seuil diffère de celui séparant les cas  $\Lambda = s(Q + D)$  et  $\Lambda = s(Q + \alpha^* D)$  avec  $0 < \alpha^* < 1$  pour le processus linéaire de naissance et de mort. Ce dernier seuil était  $\simeq 3,2829$  d'après la section 3. Cependant le taux auquel la chaîne de Markov incluse converge vers l'extinction n'a pas grand-chose à voir avec le taux auquel le processus en temps continu en fait de même.

## 8 Conclusion

De nombreux points restent à éclaircir concernant le comportement des valeurs propres et vecteurs propres. Parmi les généralisations possibles, on peut penser que si les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $Q_{i,j}$  sont des fonctions  $T$ -périodiques du temps  $t$ , alors  $\omega_1$  sera égal à  $\min\{f(Q(\cdot) + \alpha D(\cdot)); 0 \leq \alpha \leq 1\}$ , où  $f(\cdot)$  désigne l'exposant de Floquet dominant et remplace la borne spectrale.

**Remerciements** — On remercie Vincent Bansaye, Anne Duval et Bruno Sericola pour leurs remarques et suggestions.

## Références

- [1] Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) *Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size*. J Math Biol 67 : 799-831
- [2] Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) *On linear birth-and-death processes in a random environment*. J Math Biol 69 : 73-90
- [3] Bacaër N (2016) Le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement aléatoire. J Math Biol 73 : 847-866

- [4] Clayton A (2010) *Quasi-birth-and-death processes and matrix-valued orthogonal polynomials*. SIAM J Matrix Anal Appl 31 : 2239-2260
- [5] Cogburn R, Torrez WC (1981) *Birth and death processes with random environments in continuous time*. J Appl Probab 18 : 19-30
- [6] Cohen JE (1981) *Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix*. Proc Amer Math Soc 81 : 657-658
- [7] Collet P, Martínez S, San Martín J (2013) *Quasi-stationary distributions*. Springer, Berlin
- [8] D’Souza JC, Hambly BM (1997) *On the survival probability of a branching process in a random environment*. Adv Appl Prob 29 : 38-55
- [9] Dekking FM (1988) *On the survival probability of a branching process in a finite state i.i.d. environment*. Stoch Proc Appl 27 : 151-157
- [10] Dieudonné J (2003) *Éléments d’analyse, tome 8*. Jacques Gabay, Paris
- [11] Flajolet Ph, Sedgewick R (2009) *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press
- [12] Gantmacher FR (1966) *Théorie des matrices, tome 2*. Dunod, Paris
- [13] Geiger J, Kersting G, Vatutin VA (2003) *Théorèmes limites pour des processus de branchement sous-critiques en environnement aléatoire*. Ann I H Poincaré–Pr 39 : 593-620
- [14] Hillion A (1986) *Les théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris
- [15] Jordan C (1896) *Cours d’analyse de l’École polytechnique, tome 3*. Gauthier-Villars, Paris
- [16] Latouche G, Ramaswami V (1999) *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. SIAM, Philadelphie
- [17] Lotka AJ (1939) *Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie*. Hermann, Paris
- [18] Methée PD (1959) *Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions*. Comment Math Helv 33 : 38-46
- [19] Nkague Nkamba L (2012) *Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle*. Thèse, Université de Lorraine
- [20] Nussbaum RD (1986) *Convexity and log convexity for the spectral radius*. Linear Algebra Appl 73 : 59-122
- [21] Picard Ph (1965) *Sur les modèles stochastiques logistiques en démographie*. Ann I H Poincaré B 2 : 151-172
- [22] Queffélec H, Zuily C (2013) *Analyse pour l’agrégation, 4e édition*. Dunod, Paris
- [23] Roseau M (1997) *Équations différentielles*. In : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, p. 222-244



- [24] Sericola B (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications.  
Lavoisier, Paris