ランダム環境での流行のSIS確率モデル

J. Math. Biol. 73 (2016) 847-866。
http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、フランス、ボンディ
ピエール大学、マリーキュリー大学、
レコルデリエ、パリ、フランスnicolas.bacaer@ird.fr

概要

2状態の連続時間のマルコフチェーンであるランダムな環境では、超臨界の場合、確率論的SISモデルの絶滅までの平均時間は、両方の場合、人口サイズに関して指数関数的に増加します。状態は有利であり、一方の状態が伝搬に不利である一方、他方が好都合である場合、べき法則に従います。

1はじめに

してみましょうNが可能人口規模、一定であると仮定。流行のSIS確率モデルでは、各個人は健康（S）または感染（I）です（Nåsell、2011）。環境が2つの状態の連続時間でマルコフ連鎖に従うと想像してください。q_j 、$j = 1$または2は、状態jからの離脱率 です。環境jでは、各個人の接触率は$a_j > 0$。瞬間tで 感染した人の数がnで環境がjである場合、tと$t + dt$の間でdtが無限に小さい状態で新たに感染する確率は$a_j\, n(1 - n/N)\, dt$。個人の治癒率$b > 0$が両方の環境で同じであるとします。人口の新しい治療法の確率はそれからあります $b\, n\, dt$ 間トンとトン$+\, dt$の。このモデルは（Artalejo et al。、2013）によって研究されていますが、人口のサイズNが大きくなるほどではありません。さらに、それはマルコフ環境での誕生と死の過程の特別なケースです（Cogburn and Torrez、1981）。

定義しよう

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

Q は極小ジェネレーターですが、 u_1 （それぞれ u_2）は、環境1（それぞれ2）で費やされた時間の割合です。線形化されたモデル、つまりパラメータのランダムな環境での誕生と死の線形プロセス a_j そして b、（Baca andr and Ed-Darraz、2014）は、ほぼ確実に絶滅が存在する場合に限り、 $R_0 \le 1$。一方、非線形SISモデルの場合、パラメーターの値が何であっても消滅します。 R_0。ただし、人口Nが大きい場合、次の場合、絶滅までの平均時間は長くなります。 $R_0 > 1$ と小さい場合 $R_0 < 1$。私たちは定義します $T_{n,j}$ 環境内 で最初にn人の感染者がいる平均時間 j。次に、 $1 \le n \le N$、

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N) T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \tag{1}$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N) T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \tag{2}$$

さらに $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$。この記事の目的は、超臨界のケースで研究することです。 $R_0 > 1$、人口Nのサイズが大きくなる、絶滅までの平均時間の挙動 。

接触率と一定の環境では、Aと$R_0 = \frac{a}{b} > 1$、（Doering et al。、2005、Table 1）は、集団の感染した部分から絶滅するまでの平均時間$x = n / N$が増加すると、 $N \to \infty$、xとは無関係に、 $\frac{a}{(a-b)^2}\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\,e^{cN}$、

$$c = b/a - 1 - \log(b/a).$$

言い換えると、平均時間はNとともにほぼ指数関数的に増加しています。（Bacaër、2015）は、成長パラメーターcの明示的な式がない場合でも、環境が周期的である場合に同様の結果を提案します。

超臨界ランダム環境、すなわち $R_0 > 1$、次の記事は、2つのケースを区別する必要があることを示唆しています。 $a_1 > a_2 > b$ 弱い超臨界の場合 $a_1 > b > a_2$。非常に超臨界の場合 $a_1 > a_2 > b$、絶滅までの平均時間は、パラメーターを指定したNでほぼ指数関数的に増加すると推測します。 $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$。より正確には、この平均時間の対数を$N$で割ると、次のように収束します。 c_2。したがって、漸近的振る舞いは、環境が状態2でブロックされたままである場合と同じです。つまり、これは、伝染病の拡大に最も好ましくなく、絶滅が優先的に発生する場合です。

ただし、 $a_1 > b > a_2$ そして $R_0 > 1$、それから私達は絶滅までの平均時間が次のように増加すると推測します N^ω と

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}\,. \tag{3}$$

その場合、 $R_0 > 1 \Leftrightarrow \omega > 0$。直感的に、非常に長い間、状態2に留まることが時々起こります。この継続時間がτより大きい確率は、 $e^{-q_2\tau}$。状態2では、Nラージの平均消滅時間は次のオーダーです。 $\tau \simeq \frac{\log N}{b-a_2}$（Doering et al。、2005）。これは準消滅方程式からも推測できます $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$。したがって、最終的に状態2の期間中の絶滅の確率は次のオーダーになります。 $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$。これは、絶滅までの平均時間が逆数の桁であることを示唆しています。 $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$。私たちの分析によると、大きさの次数は実際には N^ω ωは（3）で与えられます。

また、 q_1 そして q_2 掛けられる $1+\varepsilon$ と $\varepsilon > 0$、 R_0 変わらないままですが ω 掛ける $1+\varepsilon$ ：このモデルでは、環境の変動性が増加すると、平均消滅時間が増加する傾向があります。

この法律 $N^\omega$$J$状態の 環境の場合、次の場合に一般化できるようです。

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

我々は持っています

$$R_0 = (\sum_{j=1}^{J} a_j u_j)/b$$

もしQが無限小生成され、もし uが唯一のベクトルであります

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^{J} u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

（BacaërおよびEd-Darraz、2014年）。AとBが対角行列を表すとする $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_J)$ そして $\mathrm{diag}(b, \ldots, b)$。スペクトル境界を検討する

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda);\ \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\}.$$

$\sigma(\cdot)$ 行列のスペクトルを示し、 $\Re(\cdot)$ 複素数の実部。私たちは見せる

$$\exists!\ \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

次に、絶滅までの平均時間は次のように増加すると推測します。 N^ω。特定のケースでは $a_j \neq b\,\forall j$、数ωは単に行列の最大実部の固有値です $(A - B)^{-1}Q$。この行列と、$I = 2$ に対して（3）で与えられる固有値ωの式は、

人口統計モデルのない人口モデルの（SawyerとSlatkin、1981、方程式（14）と（20））にすでにあります。未臨界のケース（$R_0 < 1$）。ただし、この場合、消滅までの平均時間はNの対数として増加します。

数人の著者が、ブラウンのランダム環境での人口モデルの平均消滅時間のべき法則を発見しました（Ludwig、1976年、Leigh、1981年、Lande、1993年）。彼らは出発点として拡散方程式を使用します。ただし、（Gaveau et al。、1996）および（Doering et al。、2005）は、この方程式がパラメーターcの式を不正確にすることを示しています。実際、この方程式は常に準定常分布の裾をよく表すとは限りません。これは、絶滅プロセスを研究するための最も重要な部分です。ただし、（Kamenev et al。、2008）は、パス積分を使用して色付きノイズのあるランダムな環境での個体群の消滅の問題に対処したことに注意してください。

セクション2では、モデルの準定常分布を示します。セクション3では、ブリルアン、クレイマー、ウェンツェル（BKW）法を使用して、分布が急速に変化するパラメーター$x = n / N$の領域で有効な近似を取得します。セクション4では、分布がゆっくりと変化する領域で別の近似を使用します。セクション5では、拡散方程式を使用して、以前の2つの近似を結び付けています。ここでは、特に使用されているガウスエラー関数をクンマーとトリコミの合流超幾何関数で置き換えています（Meerson and Sasorov、2008）。セクション6では、準定常分布に関連する固有値を推定します。

厳密に取得されたこれらの近似はありませんが、セクション7では、数値シミュレーションを示します。これは、強超臨界の場合の指数則と弱超臨界の場合のべき則の指数の数値を確認するようです。セクション8では、いくつかの注釈を追加しています。特に、弱い超臨界状態で、マルコフ環境の場合と周期的環境の場合を比較します。好ましい状態または不利な状態の時間の比率が同じです。最初の方法は、平均時間のべき乗則につながります。絶滅するまで、指数法則に次ぐ。セクション9では、有限数の状態を持つマルコフ連鎖の場合を検討し、他の一般化について説明します。

2準定常分布

時間tで 、環境jに n人の感染者　がいる確率を考えます 。$p_{n,j}(t)$。私たちは

$$\begin{aligned}\frac{dp_{n,1}}{dt} &= -\left[a_1 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_1\right]p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\ &\quad + a_1(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})p_{n-1,1} + q_2\,p_{n,2} \qquad (4)\\ \frac{dp_{n,2}}{dt} &= -\left[a_2 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_2\right]p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\ &\quad + a_2(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})p_{n-1,2} + q_1\,p_{n,1}. \qquad (5)\end{aligned}$$

定義しよう

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{N,1}, p_{N,2})$ ：列ベクトル
- $A_n = \mathrm{diag}[a_1 n(1-\frac{n}{N}),\ a_2 n(1-\frac{n}{N})]$ ：2次の対角行列
- $B_n = \mathrm{diag}[bn,\ bn]$
- $$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array}\right).$$

システム（4）-（5）の形式

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

固有値Mはのものであり、QとのそれらR。Qの固有値は0であり、$-(q_1+q_2)$。対角線の外側の行列Rの係数は正またはゼロです。さらに、関連するグラフでわかるように、行列Rは既約です。ペロンとフロベニウスの定理の帰結（Smith、1995、corollary 3.2）は、行列Rが、他のすべての固有値の実部よりも厳密に大きく、関連する固有ベクトルをもつ実固有値λを持っていることを示しています。厳密にポジティブなコンポーネントで。場合 **1は、**行ベクトルは[1,1、...、1]サイズの *2N*、次いで

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \ldots, 0, 0].$$

（Berman and Plemmons、1994、Theorem 6.2.3、L33）によれば、 $\lambda < 0$。我々が選択しました $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \ldots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ 固有値λに関連付けられたMの固有ベクトル： $M\pi = \lambda\pi$。言い換えると、

$$\begin{aligned}\lambda\,\pi_{n,1} = &-\left[a_1 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_1\right]\pi_{n,1} + b(n+1)\pi_{n+1,1} \\ &+ a_1(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})\pi_{n-1,1} + q_2\,\pi_{n,2} \qquad (6)\\ \lambda\,\pi_{n,2} = &-\left[a_2 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_2\right]\pi_{n,2} + b(n+1)\pi_{n+1,2} \\ &+ a_2(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})\pi_{n-1,2} + q_1\,\pi_{n,1}. \qquad (7)\end{aligned}$$

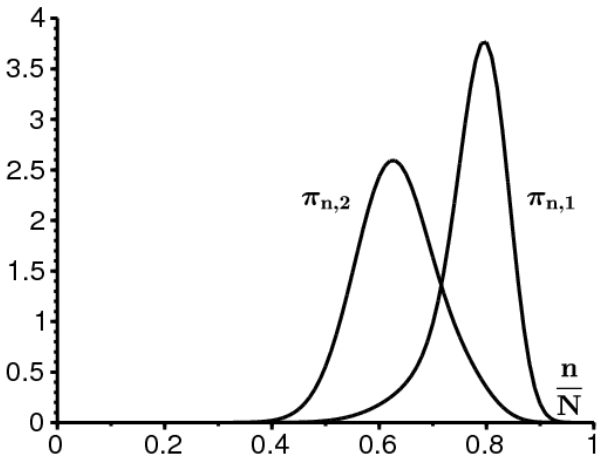
例として、固有ベクトルを正規化してみましょう

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2}) = 1.$$

図1は $\pi_{n,1}$ そして $\pi_{n,2}$ 関数としてのN/Nと $n \geq 1$ 2つのケース： $R_0 > 1$ そして $a_1 > a_2 > b$、ケース $R_0 > 1$ そして $a_1 > b > a_2$。固有ベクトルπはScilabソフトウェアで計算されます。のピーク $\pi_{n,1}$ に近い $x_1 = 1 - b/a_1$、感染者の割合iの 平均場方程式について考えるときに期待するように

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

確かに x_1 この方程式の唯一の安定した平衡状態です。のピーク $\pi_{n,2}$ に近い $x_2 = 1 - b/a_2$ もし $a_2 > b$ そして近くに $x = 0$ もし $a_2 < b$。



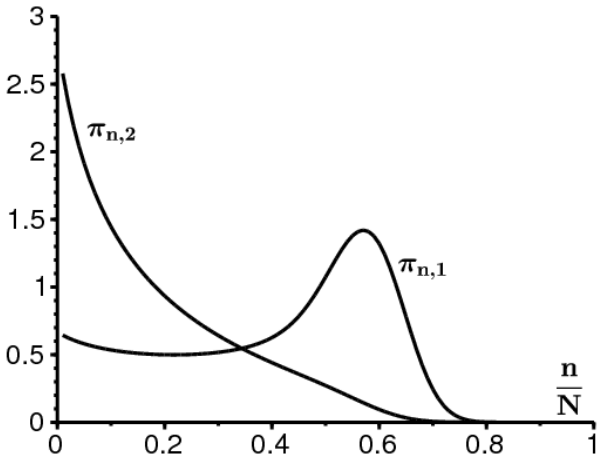


図1.コンポーネント $\pi_{n,1}$ そして $\pi_{n,2}$ と $n \geq 1$ $N = 100$の 場合、n/Nの関数としての固有ベクトルπの $q_1 = 1$ そして $q_2 = 1$。その他のパラメーター値：a） $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$、b） $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$。

定義しよう

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \ldots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \ldots, T_{N,1}, T_{N,2})$。

線形システム（1）-（2）は、次の形式で記述できます。

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \tfrac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1})\,, \tag{8}$$
$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \tfrac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2})\,. \tag{9}$$

システム（8）-（9）および（6）-（7）は、

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

ここで、スター*は、ベクトルまたは行列の転置を示します。通常のドット積をとることで、$\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R\hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$。だから私たちは

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}\,.$$

言い換えると、 $-1/\lambda$ の線形結合です $(T_{n,j})$ と $n \geq 1$ そして $j = 1, 2$。以下では、主にλに関心があります。私たちは勉強します $(T_{n,j})$ 数値シミュレーションを通じてセクション7で。

3. BKW近似

ケース $x > x_1 = 1 - b/a_1$**。** と $R_0 > 1$、私たちはそれを推測します $\lambda \to 0$ もし $N \to +\infty$。たとえば、別のモデルの場合（MeersonおよびSasorov、2008）が行ったように、実際にそうであることを事後検証します。したがって、（6）-（7）の左側は無視できます。と $x > x_1$ 、次の形式のBKW近似（Bender and Orszag、1978）を探しましょう

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N}\, e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

と $x = n/N$。オーダー2のテイラー開発 $S(x)$ および次数1の $\Sigma(x)$ それを示唆している

$$\pi_{n\pm1,1} \simeq e^{-NS(x)\mp S'(x)-\frac{S''(x)}{2N}-\Sigma(x)\mp\frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

（6）に置き換えて、 $e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 \simeq\, & a_1 N(x-\tfrac{1}{N})(1-x+\tfrac{1}{N})e^{S'(x)-\frac{S''(x)}{2N}+\frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 Nx(1-x) \\ & + bN(x+\tfrac{1}{N})e^{-S'(x)-\frac{S''(x)}{2N}-\frac{\Sigma'(x)}{N}} - bNx - q_1 + q_2\frac{c(x)}{N}\,. \end{aligned}$$

式O（N）ギブ

$$0 \simeq Nx\Big[e^{S'(x)}-1\Big]\Big[a_1(1-x)-be^{-S'(x)}\Big].$$

角括弧の最初の項は定数関数の場合のみnullです $S(x)$。角括弧内の2番目の項をキャンセルするソリューションを選択してください

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1(1-x)},$$

つまり

$$S(x) = s_1(x) = x\log(b/a_1) + x + (1-x)\log(1-x)$$

加法定数を除いて。これは意味します $S''(x) = \frac{1}{1-x}$。関数 $\Sigma(x)$ O（1）の式で取得されます。

$$\begin{aligned} 0 \simeq\, & a_1 N\left[x(1-x)+\frac{2x-1}{N}\right]e^{S'(x)}\left[1+\frac{S''(x)}{2N}+\frac{\Sigma'(x)}{N}\right] - a_1 Nx(1-x) \\ & + bN(x+\tfrac{1}{N})e^{-S'(x)}\left[1-\frac{S''(x)}{2N}-\frac{\Sigma'(x)}{N}\right] - bNx - q_1\,. \end{aligned}$$

交換 $S(x)$ その表現により、

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1-b}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x}\right), \\ \Sigma(x) &= \sigma_1(x) = \log\left(x\sqrt{1-x}\left[\frac{x-x_1}{x}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}}\right). \end{aligned}$$

関数 $c(x)$ に $\pi_{n,2}$ （7）から得られます。の形 $\pi_{n,2}$ 異なる表現間のバランスを確保するために選択されました。確かに、最高次数は

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N}\Big\{Na_2x(1-x)\Big[e^{S'(x)}-1\Big] + bNx\Big(e^{-S'(x)}-1\Big)\Big\} + q_1\,.$$

交換 $S(x)$ その表現により、

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1-a_2)x(x-x_1)}\,.$$

要約すると、 $x > x_1$、

$$\pi_{n,1} \simeq k_1\, e^{-Ns_1(x)-\sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1\,\pi_{n,1}}{N(a_1-a_2)x(x-x_1)}\,, \tag{10}$$

ある定数に対して k_1。特にの行動を考慮 $\pi_{n,1}$ との $\pi_{n,2}$ ために $x > x_1$ そして x 近く x_1。定義しよう $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$。我々は持っています $s_1'(x_1) = 0$。テイラー開発は

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s_1''(x_1)(x-x_1)^2/2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2.$$

このように

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2}\, x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1}\,(x-x_1)^{\frac{q_1}{a_1-b}}}\,, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1\,\pi_{n,1}}{N(a_1-a_2)x_1(x-x_1)}\,. \tag{11}$$

ケース $x < x_2 = 1 - b/a_2$ **もし** $a_1 > a_2 > b$**。** 対称的に、もし解決策を探しましょう $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N}\, e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad x < x_2 = 1 - b/a_2.$$

システム（6）-（7）は、上記のように、

$$S(x) = s_2(x) = x\log(b/a_2) + x + (1-x)\log(1-x)$$

加法定数を除いて、

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log\left(x\sqrt{1-x}\left[\frac{x_2-x}{x}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}}\right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1-a_2)x(x_2-x)}\,.$$

要約すると、 $x < x_2$、

$$\pi_{n,2} \simeq k_2\, e^{-Ns_2(x)-\sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2\,\pi_{n,2}}{N(a_1-a_2)x(x_2-x)}\,, \tag{12}$$

ある定数に対して k_2。と $x < x_2$ そして x 近く x_2、

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2}\, x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2}\,(x_2-x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}\,, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2\,\pi_{n,2}}{N(a_1-a_2)x_2(x_2-x)}\,. \tag{13}$$

図2と3は $-(\log\pi_{n,1})/N$ そして $-(\log\pi_{n,2})/N$ の面では n/N と $1 \le n \le N$,。 $\pi_{n,i}$ （6）-（7）のシステムを使用して計算されます。図には、近似（10）および（12）も濃い青と赤で示されています。定数 k_1 （10）では、 $\pi_{n,1}$ $n = N$-1の近似と一致します。定数 k_2 （12）は、 k_1 以下のセクション5で説明します。

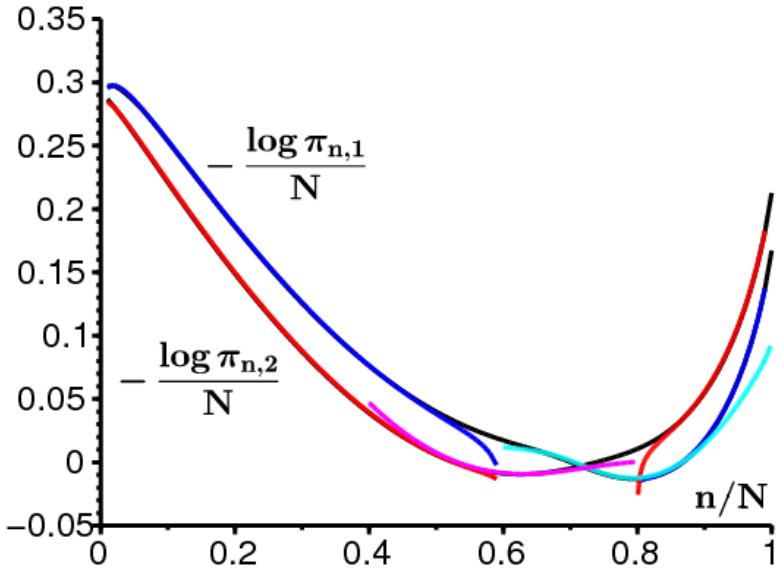


図2.の例 $a_1 > a_2 > b$。黒で、他の曲線の下：$-(\log \pi_{n,1})/N$ そして $-(\log \pi_{n,2})/N$ の面では $x = n/N$ 。
$\pi_{n,1}$ ：紺色で、近似値（10）の場合 $x > x_1$ （12）もし $x < x_2$; 水色、拡散近似（25）の場合 $x \simeq x_1$。
$\pi_{n,2}$ ：赤、近似（10）の場合 $x > x_1$ （12）もし $x < x_2$; ピンクの場合、拡散近似（31） $x \simeq x_2$。

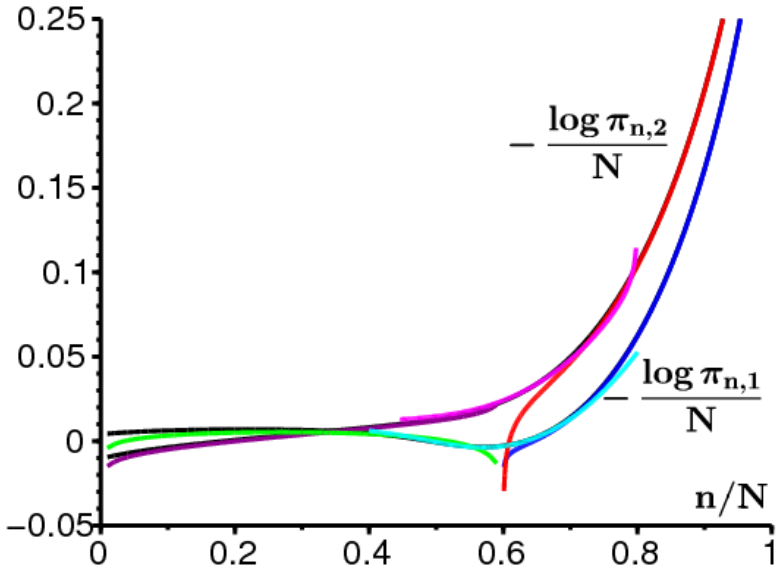


図3.の例 $a_1 > b > a_2$。黒で、他の曲線の下：$-(\log \pi_{n,1})/N$ そして $-(\log \pi_{n,2})/N$ の面では $x = n/N$ 。
$\pi_{n,1}$ ：濃い青色の場合、近似値（10） $x > x_1$; 緑の場合、近似（20） $x < x_1$; 水色、拡散近似（25）の場合 $x \simeq x_1$。
$\pi_{n,2}$ ：赤の場合、近似（10） $x > x_1$; 紫色の場合、近似値（19） $x < x_1$; ピンクの拡散近似（31）の場合 $x \simeq x_1$。

4変化が遅い領域での近似

の近似を探しています $\pi_{n,1}$ そして $\pi_{n,2}$ に $x_2 < x < x_1$ もし $a_1 > a_2 > b$ そして $0 < x < x_1$ もし $a_1 > b > a_2$。これらの間隔で、 $S(x) = 0$。システム（6）-（7）を検討し、直接連続近似を試してみましょう $\pi_{n,1} \simeq y(x)$、

$\pi_{n,2} \simeq z(x)$、 $x = n/N$。テイラー開発は

$$\pi_{n\pm1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

λ≈0の場合、これは拡散近似につながります

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_1x(1-x))y\right] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N}\frac{d^2}{dx^2}\left[(a_1x(1-x) + bx)y\right] \tag{14}$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_2x(1-x))z\right] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N}\frac{d^2}{dx^2}\left[(a_2x(1-x) + bx)z\right]. \tag{15}$$

*1 / N*を 無視すると、次の方程式が得られます。

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_1x(1-x))y(x)\right] - q_1y(x) + q_2z(x) \tag{16}$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_2x(1-x))z(x)\right] - q_2z(x) + q_1y(x)\,, \tag{17}$$

（Slatkin、1978）の式（29）-（30）と同じ形式です。式（16）と（17）を追加すると、

$$\frac{d}{dx}\left[(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)\right] \simeq 0\,.$$

したがって、角括弧の間の関数は一定です。xは因子であるため、これは $x \to 0$ この定数はゼロであること：

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0\,. \tag{18}$$

これは表現することができます $y(x)$ の面では $z(x)$。（17）で置き換えることにより、いくつかの操作の後に

$$\frac{1}{z(x)}\frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)}\,,$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)}\left(\frac{a_1(1-x) - b}{x}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{b - a_2(1-x)}{x}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \tag{19}$$

定数Cの場合。この近似は、図3の紫色で示されています。定数Cは、 k_1 以下のセクション5に示すように。次に、方程式（18）および（19）は、

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx}\left(\frac{a_1(1-x) - b}{x}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{b - a_2(1-x)}{x}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}\,. \tag{20}$$

この近似は、図3の緑色で示されています。 $x \simeq x_1$ と $x < x_1$ 、 私達は手に入れました

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1x_1}\left(\frac{a_1}{x_1}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}(x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\,. \tag{21}$$

その場合 $a_1 > b > a_2$ 、我々は見つけるためのx ≈0

$$y(x) \sim C\,(a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\,(b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}}\,x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}} \tag{22}$$

$$z(x) \sim C\,(a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\,(b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\,x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}}\,. \tag{23}$$

思い出す $R_0 = \frac{a_1q_2 + a_2q_1}{b(q_1+q_2)} > 1 \Leftrightarrow \frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$ その場合。特に、の積分 $z(x)$ 近所で 0^+ 収束しています。その場合 $a_1 > a_2 > b$、次に（19）が示す

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2\,x_2}\left(\frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{a_2}{x_2}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}(x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \tag{24}$$

近く x_2 と $x > x_2$。

5拡散近似 x_1 そして x_2

近くの状況 x_1。 近く $x=x_1$ そして $x=x_2$ 、（14）-（15）の拡散は無視できなくなりました。の遷移ゾーンの分析 x_1 そして x_2 （21）と（24）の定数Cを定数と接続できるようにする必要があります k_1 （10）から k_2 （12）から。定義しよう $x=x_1+\xi_1/\sqrt{N}$。次に、（14）の次数1の導関数の係数は、次数1のテイラーの展開で近似できます。

$$0 \simeq (a_1-b)\frac{d}{d\xi_1}[\xi_1 y]-q_1 y+q_2 z+b(1-b/a_1)\frac{d^2y}{d\xi_1^2}\,.$$

私たちは無視します $q_2 z$ の前に $q_1 y$ もし $x \simeq x_1$ ：

$$0 \simeq \frac{b}{a_1}\frac{d^2y}{d\xi_1^2}+\xi_1\frac{dy}{d\xi_1}+\left(1-\frac{q_1}{a_1-b}\right)y\,.$$

と

$$\eta_1=\xi_1\sqrt{\frac{a_1}{2b}}\,,\quad y(\eta_1)=e^{-\eta_1^2}Y(\eta_1) \tag{25}$$

エルミート微分方程式があります

$$0 \simeq \tfrac{1}{2}\frac{d^2Y}{d\eta_1^2}-\eta_1\frac{dY}{d\eta_1}-\frac{q_1}{a_1-b}Y\,.$$

シリーズ全体の形で解決策を探しています

$$Y(\eta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n\eta_1^n\,.$$

再帰関係を得る

$$w_{n+2}=\frac{2(n+2\alpha_1)}{(n+2)(n+1)}\,w_n\,,$$

と $\alpha_1=\frac{q_1/2}{a_1-b}$。したがって、2つの線形独立したソリューションがあります。

$$Y(\eta_1)=\gamma_1\,\Phi(\alpha_1,\tfrac{1}{2};\eta_1^2)+\gamma_2\,\eta_1\,\Phi(\alpha_1+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};\eta_1^2)\,.$$

γ_1 そして γ_2 定数であり、

$$\Phi(\alpha,\beta;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{(n)}z^n}{\beta^{(n)}n!},\quad \alpha^{(0)}=1,\quad \alpha^{(n)}=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$$

クンマーの合流型超幾何関数です。（マロニ、1997、方程式（93））によれば、 $\Phi(\alpha,\beta;z)\sim\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\,e^z\,z^{\alpha-\beta}$ もし $z\to+\infty$ここで、Γはオイラーのガンマ関数です。このように

$$Y(\eta_1)\sim e^{\eta_1^2}|\eta_1|^{2\alpha_1-1}\left(\frac{\gamma_1\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)}-\frac{\gamma_2\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})}\right),\quad \eta\to-\infty.$$

$y(\eta_1)=e^{-\eta_1^2}Y(\eta_1)$ （21）と同じ漸近的振る舞いをするとき $\eta_1\to-\infty$ 、ただし、

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\left(\frac{\gamma_1\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)}-\frac{\gamma_2\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})}\right)=\frac{C\,(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}}\;x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{26}$$

逆の場合 $\eta_1 \to +\infty$、（11）は、 $Y(\eta_1)$ 特定の定数を掛けたものとして動作する必要があります $\eta_1^{-2\alpha_1}$。合流型超幾何関数の理論（Maroni、1997）は、

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})}\,K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)}\,K \tag{27}$$

ある定数Kがそのような漸近的な振る舞いを得るために。実際、次に、

$$Y(\eta_1) = K\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})}\,\Phi(\alpha_1,\tfrac{1}{2};\eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)}\,\eta_1\,\Phi(\alpha_1+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};\eta_1^2)\right), \tag{28}$$

つまり $Y(\eta_1) = K\,\Psi(\alpha_1,\frac{1}{2};\eta_1^2)$ ために $\eta_1 > 0$。 $\Psi(\alpha,\beta;z)$ で定義されるTricomiの合流超幾何関数

$$\Psi(\alpha,\beta;z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\,\Phi(\alpha,\beta;z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)}\,z^{1-\beta}\Phi(\alpha-\beta+1,2-\beta;z)\,.$$

（Maroni、1997、方程式（90））によれば、 $\Psi(\alpha,\beta;z) \sim z^{-\alpha}$ もし $z \to +\infty$。だから私たちは$Y(\eta_1) \sim K\,\eta_1^{-2\alpha_1}$ もし $\eta_1 \to +\infty$。

同等のもの $e^{-\eta_1^2}Y(\eta_1)$ 次に（11）と一致しますが、

$$K\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1\,\frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}}\,x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\,. \tag{29}$$

要約すると、関係（26）、（27）、および（29）は、 K、 γ_1、 γ_2 そして C の面では k_1。特に、 $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$、 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ そして $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$、方程式（26）は

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\frac{2\pi\,K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})} = \frac{C\,(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}}\,x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{30}$$

ルジャンドル・ガウスの公式を使用して代替形式を取得できます $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}}\Gamma(2\alpha_1)$。

近くの状況 x_2**。** その場合 $a_2 > b$、同様の分析を（15）に近い $x = x_2 = 1 - b/a_2$。私たちは無視します $q_1 y$ の前に $q_2 z$。と

$$x = x_2 + \tfrac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2\sqrt{\tfrac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2}Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \tfrac{q_2/2}{a_2-b}\,,$$

我々は持っています

$$Z(\eta_2) = \delta_1\,\Phi(\alpha_2,\tfrac{1}{2};\eta_2^2) + \delta_2\,\eta_2\,\Phi(\alpha_2+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};\eta_2^2). \tag{31}$$

δ_1 そして δ_2 定数です。の動作 $\eta_2 \to +\infty$ （24）と一致する

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\left(\frac{\delta_1\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})}\right) = \frac{C\,[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}}\,x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{32}$$

定義しよう

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})}\,\hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)}\,\hat{K} \tag{33}$$

ある定数に対して $\hat{K}$ （マイナス記号に注意してください δ_2）。私たちは $Z(\eta_2) = \hat{K}\,\Psi(\alpha_2,\frac{1}{2};\eta_2^2)$ もし $\eta_2 < 0$。だから私たちは $e^{-\eta_2^2}Z(\eta_2) \sim \hat{K}\,e^{-\eta_2^2}|\eta_2|^{-2\alpha_2}$ もし $\eta_2 \to -\infty$。これは（13）と一致しますが、

$$\hat{K}\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2\,\frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}}\,x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\,. \tag{34}$$

上記のように、（32）と（33）は

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\frac{2\pi\,\hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})} = \frac{C\,[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}}\,x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{35}$$

したがって、定数 k_2、 $\hat{K}$、 δ_1 そして δ_2 定数Cによって決定されます。

6システムの固有値

我々は持っています $M\pi=\lambda\pi$。この連立方程式のすべての行を追加することにより、$\lambda\sum_{n=0}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})=0$。だが $\lambda<0$。だから私たちは

$$\sum_{n=0}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})=0.$$

システムの最初の2行は

$$\begin{aligned}\lambda\,\pi_{0,1} &= -q_1\,\pi_{0,1}+q_2\,\pi_{0,2}+b\,\pi_{1,1}\,,\\ \lambda\,\pi_{0,2} &= -q_2\,\pi_{0,2}+q_1\,\pi_{0,1}+b\,\pi_{1,2}\,.\end{aligned}$$

それらを追加することにより、

$$\lambda = b\,\frac{\pi_{1,1}+\pi_{1,2}}{\pi_{0,1}+\pi_{0,2}} = -b\,\frac{\pi_{1,1}+\pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})}\,. \tag{36}$$

最初に、 $a_1>b>a_2$ と $R_0>1$。（19）が示す

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,2}\simeq\int_0^{x_1}z(x)\,dx\simeq\kappa_1\,C.$$

$\kappa_1 N$に依存しない正の定数です。というピークを利用して $\pi_{n,1}$ に近い $x=n/N=x_1$ および関係（25）、（28）および（30）、

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,1}\simeq\int_{-\infty}^{+\infty}y(\eta_1)\,d\eta_1\,\frac{dx}{d\eta_1}\simeq\kappa_2\frac{K}{\sqrt{N}}\simeq\kappa_3\,C\,N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}\,, \tag{37}$$

どこ κ_j（上と下）はまだ正の定数であり、Nとは無関係です。したがって、（36）の分母にあるNの主要な項は、 $\pi_{n,2}$。分子では、 $\pi_{1,1}\simeq y(\frac{1}{N})$ そして $\pi_{1,2}\simeq z(\frac{1}{N})$。 $y(x)$ そして $z(x)$（22）-（23）で与えられます。私達は手に入れました

$$\lambda\simeq-\kappa_4\,\frac{(\frac{1}{N})^{\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{N}\simeq-\kappa_4\,N^{-\frac{q_2}{b-a_2}+\frac{q_1}{a_1-b}}\,.$$

言い換えると、 $-1/\lambda N$のべき乗則として増加し、その指数は

$$\omega=\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}>0,$$

はじめに発表したとおり。さらに、ωが次の方向に収束していることに気づきます。 $+\infty$ もし a_2 低い値でbに収束します。

ここで、 $a_1 > a_2 > b$。簡単にするために、表記を紹介しましょう $f \approx g$ （非公式のシンボルと混同しないでください $\simeq$ 上記で使用） $(\log f)/N - (\log g)/N \to 0$ もし $N \to +\infty$。特に $N^\beta \approx 1$ すべてのβに対して。次に、 $x = 1/N$の（12）は、 $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$。さらに、

$$\pi_{1,2} \approx k_2\, e^{-N s_2(1/N)} \approx k_2\, e^{-s_2'(0)} \approx k_2.$$

さらに、のピーク $\pi_{n,1}$ に近い $x = n/N = x_1$ その間 $\pi_{n,2}$ に近い x_2。したがって、（37）はまだ有効であり、

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \pi_{n,1} \approx C,$$

（31）、（33）、（35）は

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2)\, d\eta_2\, \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5\, C\, N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C\,.$$

しかし（34）と（35）は

$$C \approx \hat{K} \approx k_2\, e^{N c_2}.$$

したがって（36）は $-\lambda \approx e^{-N c_2}$ そして $-1/\lambda \approx e^{N c_2}$。最終的に、 $-1/\lambda$ パラメータでほぼ指数関数的に増加します c_2。

7絶滅までの平均時間

線形システム（8）～（9）は、（Artalejo et al。、2013）によって提示された数値手法で解くことができます。この方法は、2次の正方行列のみを使用し、数値の不安定性を低減します。それを覚えましょう $q_1 = q_2 = 1$ そして $b = 2$。

最初の例： $a_1 > a_2 > b$**。** 取りましょう $a_1 = 10$ そして $a_2 = 5$。図4aは$T_{n,1}$ そして $T_{n,2}$ の面では $x = n/N$。図4bは、たとえば環境1のN人の感染者から始まる、絶滅までの平均時間はおおよそ指数関数的に増加することを示唆しています。 $T_{N,1} \approx e^{cN}$。線形回帰は$c \simeq 0.32$。ご了承ください $c_1 \simeq 0.81$ そして $c_2 \simeq 0.32$、それは示唆しています $c = c_2$。

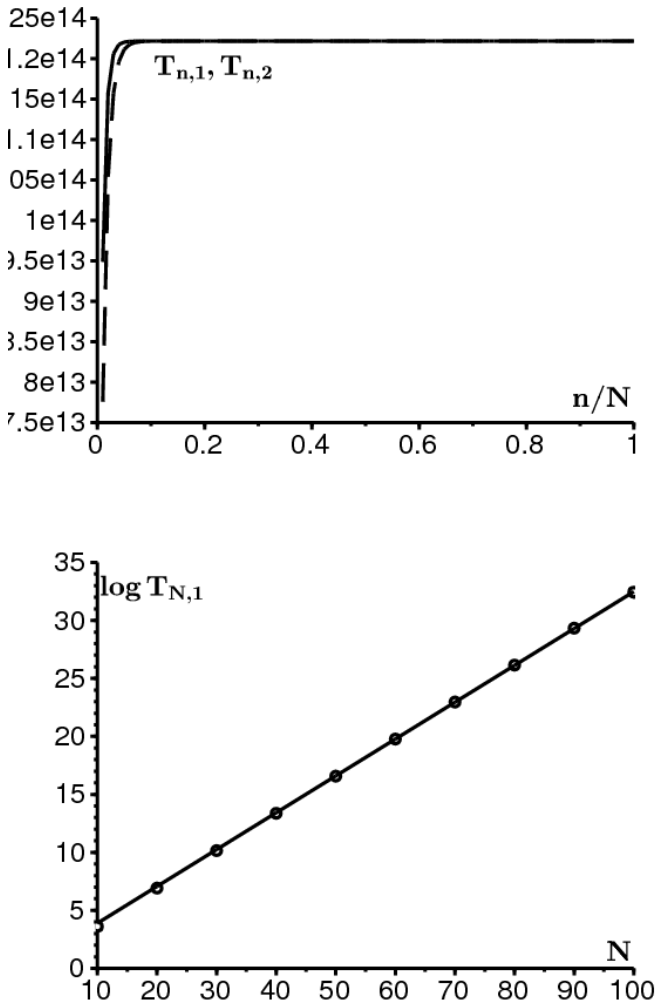


図4.ケース $a_1 > a_2 > b$。 a) $T_{n,1}$ 【実線】と $T_{n,2}$ 【点線】による n/N もし $N = 100$。b) $\log T_{N,1}$ の面では N。

***2*番目の例**： $a_1 > b > a_2$ そして $R_0 > 1$。取りましょう $a_1 = 5$ そして $a_2 = 1$。そう $R_0 = 1.5 > 1$。図5aは $T_{n,1}$ そして $T_{n,2}$ の面では $x = n/N$。図5bは $\log T_{N,1}$ の面では $\log N$。べき乗則を示唆する直線が得られます $T \sim \kappa N^{\omega}$。線形回帰によって得られる勾配は、 $\omega \simeq 0.67$。この場合、 $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$、これは測定された勾配によく対応しています。

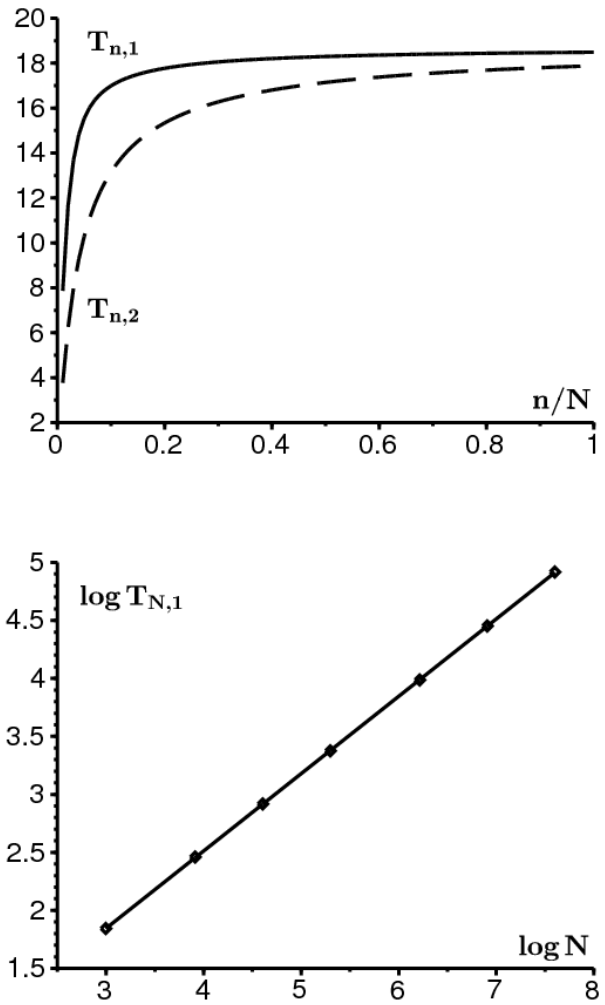


図5.ケース $a_1 > b > a_2$ と $R_0 > 1$。 a) $T_{n,1}$ そして $T_{n,2}$ の面では $x = n/N$ もし $N = 100$。b) $\log T_{N,1}$ の面では $\log N$。

8ノート

定期的なケースとの比較。

ランダムな環境と定期的な環境の違いを強調するために、 $a_1 = 5$ そして $a_2 = 1$、 $q_1 = q_2 = 1$ そして $b = 2$ 。私たちは $u_1 = u_2 = 0.5$ ：環境は、平均して半分の時間を状態1に費やし、残りの半分は状態2に費やします。 $T_{N,1}$べき法則としてNの関数として増加します。一方、同じSISモデルを検討しますが、定期的な環境（Bacaër、2015）で考えてみましょう。 $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$、 $a(t) = a_1$ ために $0 < t < u_1 T$、および $a(t) = a_2$ ために $u_1 T < t < T$。このモデルでは、 $e^{\Lambda T}$ 消滅プロセスに関連するフロケ乗数です。図6は、 $-1/\Lambda$ 指数関数的に成長します N。

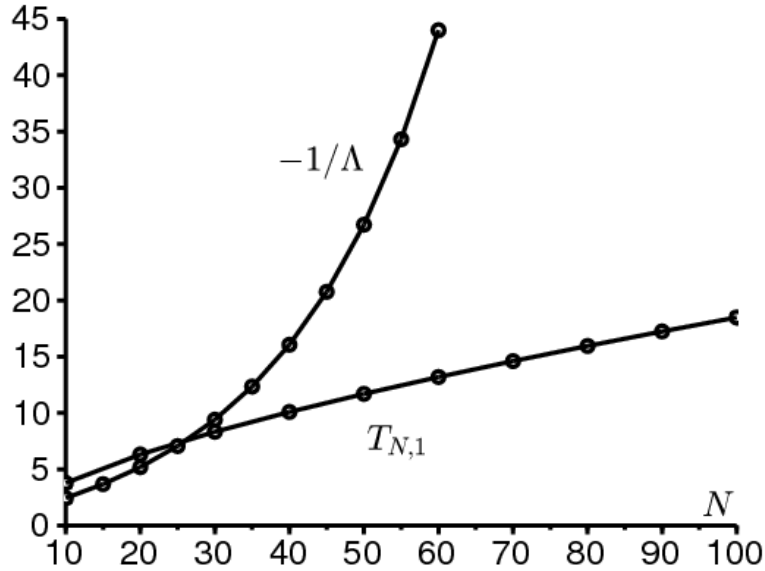


図6.絶滅までの平均時間 $T_{N,1}$ ランダムな環境で $-1/\Lambda$ 定期的に似た環境で。

平均場方程式。 平均場の方程式は次のように（Baca recallr and Ed-Darraz、2014）

$$\frac{dI_1}{dt} = a_1 I_1 (1 - \tfrac{I_1}{N}) - bI_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2$$
$$\frac{dI_2}{dt} = a_2 I_2 (1 - \tfrac{I_2}{N}) - bI_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,$$

平衡状態（0,0）の近くで線形化されると、ヤコビ行列につながります

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

しかし、同時に

- 厳密に正の固有値。これにより、自明な平衡が不安定になります。
- $R_0 < 1$。

別の制限。 得られた結果は、パラメータが q_j、 a_j そして b Nが無限大に収束する間、固定されます。例えば物事が明らかに異なる場合 q_1 そして q_2 一定の比率で無限に収束する q_1/q_2。次に、モデルは、一定の環境で均質化されたモデルに、平均化された接触パラメーターで接近します。 $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$。

未臨界のケース。 未臨界のケースには対処しませんでした $R_0 < 1$ と $a_1 > b > a_2$ または $b > a_1 > a_2$。絶滅までの平均時間の振る舞いは、一定の環境での場合とほぼ同じです。感染している人口の一定の割合から始めて、平均時間は $\log N$ （Doering et al。、2005）。感染したフラクション$1/N$から始めて、逆に平均時間が限界に向かって収束します。ランダムな環境の場合、これはデジタルシミュレーションが示唆することでもあります。

9有限数の状態を持つマルコフ連鎖

と J 状態、極小ジェネレータが Q そのようなものです $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^{J} Q_{i,j}\ \forall j$。この行列が$Q$ 既約であり、それは $a_1 > a_2 > \cdots > a_J$。その場合 $a_J > b$、その後、絶滅までの平均時間は、人口のサイズNにほぼ比例して、割合で増加します。 $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$。実際、絶滅の可能性が最も高いのは環境$J$です。

一方、 $b > a_J$ そして $R_0 > 1$、 注意 $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ と $x = n/N$。近所で $x = 0$、システム（16）-（17）は

$$0 \simeq (b-a_j)\frac{d}{dx}(x\,y_j) + \sum_{k=1}^{J} Q_{j,k} y_k\,. \tag{38}$$

解決策を探しています $y_j = \theta_j\, x^{\omega-1}$ と $\omega > 0$ そして $\theta_j > 0$ すべてのjについて、

$$0 \simeq \omega(b-a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^{J} Q_{j,k}\theta_k\,, \quad 1 \le j \le J.$$

イントロダクションの表記法では、したがって、一般化された固有値の問題があります $Q\theta = \omega(A-B)\theta$、$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_J)$。

お見せします

$$\exists!\, \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A-B)\theta, \quad \theta_j > 0\ \forall j.$$

$D = A - B$ 対角行列です。実数sの場合、

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda);\ \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$ 正またはゼロであるすべての係数が対角線の外側にあります。さらに、この行列は既約です。ペロンとフロベニウスの定理の推論によると（スミス、1995、推論3.2）、 $\mu(s)$ の単純な固有値です $Q - sD$ （支配的な固有値と呼ばれる）そして固有ベクトルがあります $\phi(s)$ それらのすべてのコンポーネントは、

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

この固有ベクトルは正規化で一意です

$$\sum_{j=1}^{J} \phi_j(s) = 1.$$

同じ推論によると、ベクトルの存在 θ と $\theta_j > 0\ \forall j$ そして $(Q - \omega D)\theta = 0$ 実際に相当する $\mu(\omega) = 0$。したがって、式 $\mu(\omega) = 0$ と $\omega > 0$ ユニークなソリューションがあります。

存在に関して、私たちは最初に、極小ジェネレータが Q 対応する $s = 0$ ： 我々は持っています $\mu(0) = 0$ そして私たちは注意します $u = \phi(0)$ 右側の固有ベクトル。行ベクトル $\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]$ の左側の固有ベクトルです Q 固有値0に関連付けられています。したがって、

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^{J} u_j = 1.$$

単純な固有値摂動定理によれば、関数 $\mu(s)$ 差別化できる $s = 0$ そして

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

だが $R_0 > 1 \Leftrightarrow \mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^{J}(a_j - b)u_j > 0$。だから私たちは $\mu'(0) < 0$。また、

$$(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s), \quad \forall s > 0.$$

我々は持っています $Q/s - D \to -D$ もし $s \to +\infty$。スペクトルの連続性により、

$$\mu(s)/s \to \max_j(-D_{j,j}) = \max_j(b - a_j) = b - a_J > 0.$$

だから私たちは $\mu(s) \to +\infty$ もし $s \to +\infty$。なぜなら $\mu(0) = 0$ そして $\mu'(0) < 0$、あると推定します $\omega > 0$ と $\mu(\omega) = 0$。

一意性については、最初に関数が $\mu(s)$ 凸状です。確かに、すべての実数について ω_1、 ω_2、および $0 < \varepsilon < 1$、それがわかります $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1-\varepsilon)\omega_2)$ は、行列の主要な固有値です $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1-\varepsilon)\omega_2 D$。（Cohen、

1981）の定理によれば、この固有値は以下です。$\varepsilon\mu(\omega_1)+(1-\varepsilon)\mu(\omega_2)$。これは凸性を証明します。今あると仮定します $\omega_1>\omega_2>0$ と $\mu(\omega_1)=\mu(\omega_2)=0$。なぜなら $\mu(0)=0$ そして、 $\mu(s)$ 凸であり、私たちは推論します $\mu(s)=0$ ために $0\le s\le\omega_1$。これは矛盾します $\mu'(0)<0$。

$A-B$ が可逆行列である場合 $a_j\neq b\ \forall j$。 $Q\theta=\omega(A-B)\theta$ したがって等しい $(A-B)^{-1}Q\theta=\omega\,\theta$。したがって、ωは次の固有値です。$(A-B)^{-1}Q$ その実部が最大です。

最後に式（36）は

$$\lambda=-b\,\frac{\sum_{j=1}^{J}\pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,j}}\,.$$

分子には、 $\pi_{1,j}\simeq\theta_j(1/N)^{\omega-1}$。分母には、

$$\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,j}\simeq N\theta_j\int_0^1 x^{\omega-1}\,dx.$$

そう $-1/\lambda$ 増加するNとして N^{ω}。

環境が例えば確率微分方程式によって支配されている場合、そのような結果を一般化することは間違いなく可能です

$$d\xi=f(\xi(t))+\sigma dB(t).$$

定義しよう L^* 微分演算子

$$(L^*u)(\xi)=\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2u}{d\xi^2}-\frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

と思う $u(\xi)$ 不変確率です：

$$L^*u=0,\quad u>0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\,d\xi=1.$$

したがって、ランジュバンの方程式の場合、

$$f(\xi)=-k\,\xi,\quad k>0,\quad u(\xi)=\sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}}\,e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

接触率は $a(\cdot)$ 上の関数です $\mathbb{R}$ と $\min a(\cdot)<b$ そして

$$R_0=\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a(\xi(t))\,dt\right)/b=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}a(\xi)\,u(\xi)\,d\xi\right)/b>1.$$

平均消滅時間は、Nとともに次のように増加します。 N^{ω}、ωは、微分演算子が $L^*-\omega[a(\cdot)-b]$ 0に等しい主固有値を持っています。この固有値の凸性の関数として ω 、（加藤、1982）を参照。アシスタント線形演算子は

$$L=\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}+f(\xi)\frac{d}{d\xi}$$

そして $L\mathbf{1}=0$ もし $\mathbf{1}$ 1に等しい定数関数を示します。

10周期的でランダムな環境

有限の環境セットの場合に戻りましょう。ここで、極小ジェネレータは$Q(t)$

- 周期の周期関数です $\mathcal{T}$

- 連続関数または区分連続関数です。
- 少なくともtの区間で既約です。

システム（4）-（5）の形式 $\frac{dP}{dt} = M(t)P$。（Bacaër、2015）に続いて、単一のカップルがいます (λ, π) と

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \le n \le N, 1 \le j \le J}$ 周期の周期関数です $\mathcal{T}$
- $$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$
- $$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} \pi_{n,j}(t) = 1$$
- $\pi_{n,j}(t) > 0$、 $1 \le n \le N$、 $1 \le j \le J$。

さらに、

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{J} \pi_{n,j}(t) = 0.$$

独自の機能もあります $\mathcal{T}$-定期的 $u(t)$ と

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^{J} u_j(t) = 1.$$

（Bacaërand Ed-Darraz、2014）として、

$$R_0 = (\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{J} a_j u_j(t)\, dt)/b.$$

私たちはそれを推測します $a_1 > \ldots > a_J > b$、その後、絶滅までの平均時間はNとともに指数関数的に増加します。

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

一方、 $a_J < b$ だが $R_0 > 1$、近似 $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t,x)$ の一般化（38）に至ります $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j)\frac{\partial}{\partial x}(xy_j) + \sum_{k=1}^{J} Q_{j,k}(t) y_k\,.$$

形の解決策 $y_j(t,x) = \theta_j(t) x^{\omega - 1}$、関数付き $\theta(t) = (\theta_j(t))$ $\mathcal{T}$-定期的、チェックする必要があります

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t)\,.$$

単一の実数があります $\mu(\omega)$ そのため $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ システムの支配的なフロケ乗数です

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

この行列は周期の周期関数です $\mathcal{T}$。対角線の外側の係数は正またはゼロです。行列はtの間隔で既約です。ユニークなものがあることを示すことができます $\omega > 0$ と $\mu(\omega) = 0$。セクション9のように使用します

- の凸 $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t)\, dt < 0$ もし $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \to +\infty$ もし $a_J < b$。

の凸性に注意してください $\mu(\omega)$ （Cohen、1981）の議論を単純に一般化することによって示されます。を使用しております

- ゼロのセットに係数がある行列のスペクトル半径の対数凸またはωの対数凸関数 $\mathfrak{S}$
- $\mathfrak{S}$ 加算、乗算、および限界への遷移により安定している

（キングマン、1961年）。確かに、 $Q(t)$ は区分的連続周期関数であり、階段関数でアプローチできます。 Q_k 区間の近似行列です (τ_k, τ_{k+1}) ために $k = 0, \ldots, K-1$ 、 $\tau_0 = 0$ そして $\tau_K = \mathcal{T}$。マトリックスの場合 $Q(t)$ この階段機能でした $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ 行列の積のスペクトル半径に等しい

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \cdots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

（Cohen、1981）によれば、これらの行列のそれぞれには、 $\mathfrak{S}$。したがって、行列の積は、 $\mathfrak{S}$。そのスペクトル半径はωの対数凸です。

なぜなら

$$\lambda = -b \frac{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t)\, dt}{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t)\, dt}\,,$$

私たちは以前と同じように結論付けます $-1/\lambda$ おそらくとともに増加するNとしてN^ω。

ありがとう

この記事は、2014年10月にマドリッドの*CienciasMatemáticas*で開催された会議、2015年5月にトレムセン大学での講義、2015年6月にノバスデリスボア大学でのセミナーによって刺激を受けました。

参考文献

- Artalejo JR, Economou A, Lopez−Herrero MJ (2013)
  Stochastic epidemic models with random environment : quasi−stationarity, extinction and final size.
  J Math Biol 67 : 799−831
- Bacaër N, Ed−Darraz A (2014) On linear birth−and−death processes in a random environment.
  J Math Biol 69 : 73−90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment.
  J Math Biol 71 : 491−511
- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers.
  McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences.
  Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time.
  J Appl Probab 18 : 19−30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix.
  Proc Amer Math Soc 81 : 657−658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth−death processes :
  exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker−Planck approximation.
  Multiscale Model Simul 3 : 283−299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system :
  different predictions between discrete and continuous models. Lett Math Phys 37 : 285−292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008)
  How colored environmental noise affects population extinction. Phys Rev Lett 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type.
  Math Z 180 : 265−273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices.
  Quart J Math Oxford Ser (2) 12 : 283−284
- Lande R (1993)
  Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes.
  Am Nat 142 : 911−927

- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. J Theor Biol 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. SIAM–AMS Proceedings 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise–driven unlimited population growth. Phys Rev E 78 : 060103
- N$\overline{\subset}$sell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. Ecology 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. Theor Popul Biol 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence