Das stochastische SIS-Modell für eine Epidemie in einer zufälligen Umgebung

J. Math. Biol. 73 (2016) 847-866. http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8 https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, Frankreich Pierre und Marie Curie Universität, Les Cordeliers, Paris, Frankreich nicolas.bacaer@ird.fr

Zusammenfassung

In einer zufälligen Umgebung, die eine zeitkontinuierliche Markov-Kette mit zwei Zuständen ist, steigt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben des stochastischen SIS-Modells für eine Epidemie im überkritischen Fall exponentiell in Bezug auf die Populationsgröße, wenn beide Staaten sind günstig und nach einem Potenzgesetz, wenn einer der Staaten günstig ist, während der andere für die Ausbreitung ungünstig ist.

1. Einleitung

Sei *N* die Populationsgröße, die als konstant angenommen wird. Im stochastischen SIS-Modell für eine Epidemie ist jedes Individuum entweder gesund (S) oder infiziert (I) (Nåsell, 2011). Stellen Sie sich vor, die Umgebung folgt einer Markov-Kette in kontinuierlicher Zeit mit zwei Zuständen. q_j ist mit j = 1 oder 2 die Austrittsrate aus dem Zustand j. In der Umgebung j beträgt die Kontaktrate jedes Einzelnen $a_j > 0$. Wenn zu einem Zeitpunkt t die Anzahl der infizierten Personen n und die Umgebung j ist , ist die Wahrscheinlichkeit einer neuen Infektion zwischen t und t + dt mit dt unendlich gering $a_j n(1 - n/N) dt$. Angenommen, die Heilungsrate b > 0 eines Individuums ist in beiden Umgebungen gleich. Die Wahrscheinlichkeit einer neuen Heilung in der Bevölkerung ist dann b n dt zwischen t und t + dt. Dieses Modell wurde von (Artalejo et al., 2013) untersucht, jedoch nicht in dem Maße, in dem die Größe N der Bevölkerung groß wird. Es ist außerdem ein Sonderfall des Geburts- und Todesprozesses in einer markovianischen Umgebung (Cogburn und Torrez, 1981).

Lassen Sie uns definieren

$$Q = egin{pmatrix} -q_1 & q_2 \ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = rac{q_2}{q_1+q_2}\,, \quad u_2 = rac{q_1}{q_1+q_2}\,, \quad R_0 = rac{a_1u_1+a_2u_2}{b}\,.$$

Q ist der infinitesimale Generator, während u_1 (bzw. u_2) ist der Anteil der Zeit, die in Umgebung 1 verbracht wird (bzw. 2). Für das linearisierte Modell nämlich den linearen Prozess von Geburt und Tod in einer zufälligen Umgebung von Parametern a_j und b, (Bacaër und Ed-Darraz, 2014) stellt fest, dass es mit ziemlicher Sicherheit genau dann zum Aussterben kommt, wenn $R_0 \leq 1$. Für das nichtlineare SIS-Modell gibt es dagegen eine Auslöschung, unabhängig vom Wert des Parameters R_0 . Wenn jedoch die Population N groß ist, ist die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben groß, wenn $R_0 < 1$. Wir definieren $T_{n,j}$ die durchschnittliche Zeit mit anfänglich n infizierten Personen in der Umgebung j. Wir haben dann mit $1 \leq n \leq N$,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n (1 - n/N) T_{n+1,1} + bn T_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n (1 - n/N) + bn + q_1},$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n (1 - n/N) T_{n+1,2} + bn T_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n (1 - n/N) + bn + q_2}.$$
(1)

Außerdem $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$. Das Ziel dieses Artikels ist es, im überkritischen Fall zu studieren, das heißt wenn $R_0 > 1$ das Verhalten der mittleren Zeit bis zum Aussterben, wenn die Größe der Population N groß wird.

In einer konstanten Umgebung mit einer Kontaktrate a mit $R_0 = \frac{a}{b} > 1$, (Doering et al., 2005, Tabelle 1) zeigt, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben aus einem infizierten Teil der Bevölkerung x = n/N zunimmt, wenn $N \to \infty$, unabhängig von x, wie $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ mit

$$c = b/a - 1 - \log(b/a).$$

Mit anderen Worten, die durchschnittliche Zeit wächst mit N fast exponentiell . (Bacaër, 2015) schlägt ein ähnliches Ergebnis vor, wenn die Umgebung periodisch ist, auch wenn es keine explizite Formel für den Wachstumsparameter c gibt .

In einer überkritischen zufälligen Umgebung, d. H. Mit $R_0 > 1$ Der folgende Artikel schlägt vor, zwei Fälle zu unterscheiden: einen sehr überkritischen Fall, in dem $a_1 > a_2 > b$ und ein schwach überkritischer Fall, in dem $a_1 > b > a_2$. In dem höchst überkritischen Fall wo $a_1 > a_2 > b$ Wir vermuten, dass die durchschnittliche Zeit bis zur Auslöschung mit *N* mit einem Parameter ungefähr exponentiell zunimmt $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$. Genauer gesagt konvergiert der Logarithmus dieser mittleren Zeit, geteilt durch *N*, gegen c_2 . Das asymptotische Verhalten ist daher dasselbe, als ob die Umgebung in Zustand 2 blockiert geblieben wäre, dh das, was für die Ausbreitung der Epidemie am ungünstigsten ist und in dem das Aussterben bevorzugt stattfindet.

jedoch, wenn $a_1 > b > a_2$ und $R_0 > 1$ dann nehmen wir an, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben mit zunimmt N^{ω} mit

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b} \,. \tag{3}$$

In diesem Fall, $R_0 > 1 \Leftrightarrow \omega > 0$. Intuitiv kommt es von Zeit zu Zeit vor, dass man sehr lange im Zustand 2 bleibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Dauer größer als τ ist, ist $e^{-q_2\tau}$. In Zustand 2 liegt die durchschnittliche Extinktionszeit für N groß in der Größenordnung von $\tau \simeq \frac{\log N}{b-a_2}$ (Doering et al., 2005). Dies kann auch mit der Quasi-Extinktionsgleichung erraten werden $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$. Schließlich liegt die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens während einer Periode in Zustand 2 in der Größenordnung von $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$. Dies legt nahe, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben in der Größenordnung der Umkehrung liegt, d.h. $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$. Nach unserer Analyse ist die Größenordnung tatsächlich N^{ω} mit ω gegeben durch (3).

Beachten Sie auch, dass wenn q_1 und q_2 werden mit multipliziert $1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, R_0 bleibt aber unverändert ω wird multipliziert mit $1 + \varepsilon$: In diesem Modell erhöht eine erhöhte Variabilität der Umgebung tendenziell die durchschnittliche Extinktionszeit.

Dieses Gesetz in N^{ω} scheint in der Lage zu sein, im Fall einer Umgebung mit J- Zuständen zu verallgemeinern , wenn

 $a_1>a_2>\ldots>a_J,\quad b>a_J,\quad R_0>1.$

$$R_0 = (\sum_{j=1}^J a_j u_j)/b$$

wenn Q der infinitesimale Generator ist und wenn u der einzige Vektor ist

$$Qu=0, \hspace{0.5cm} \sum_{j=1}^J u_j=1, \hspace{0.5cm} u_j>0 \hspace{0.5cm} orall j$$

(Bacaër und Ed-Darraz, 2014). A und B bezeichnen die Diagonalmatrizen diag (a_1, \ldots, a_J) und diag (b_1, \ldots, b) . Betrachten Sie die Spektralgrenze

$$\mu(s)=\max\{\mathfrak{R}(\lambda);\ \lambda\in\sigma(Q-s(A-B))\}.$$

 $\sigma(\cdot)$ bezeichnet das Spektrum einer Matrix und $\Re(\cdot)$ der Realteil einer komplexen Zahl. Wir zeigen

$$\exists! \ \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

Wir vermuten dann, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben mit zunimmt N^{ω} . In dem besonderen Fall wo $a_j \neq b \forall j$ ist die Zahl ω einfach der Eigenwert des größten Realteils der Matrix $(A - B)^{-1}Q$. Diese Matrix und der Ausdruck ihres Eigenwerts ω durch (3) für I = 2 sind bereits in (Sawyer und Slatkin, 1981, Gleichungen (14) und (20)) für ein Populationsmodell ohne demografische Stochastizität in der unterkritischer Fall ($R_0 < 1$). In diesem Fall nimmt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben jedoch mit dem Logarithmus von Nzu.

Mehrere Autoren haben ein Potenzgesetz für die mittlere Zeit bis zum Aussterben in Populationsmodellen in einer Brownschen Zufallsumgebung gefunden (Ludwig, 1976; Leigh, 1981; Lande, 1993). Sie verwenden eine Diffusionsgleichung als Ausgangspunkt. (Gaveau et al., 1996) und (Doering et al., 2005) haben jedoch gezeigt, dass diese Gleichung zu einer ungenauen Formel für den Parameter *c führt*. Tatsächlich repräsentiert diese Gleichung nicht immer gut den Schwanz der quasistationären Verteilung, was genau der wichtigste Teil ist, um den Extinktionsprozess zu untersuchen. Es ist jedoch zu beachten, dass (Kamenev et al., 2008) das Problem der Extinktion für Populationen in einer zufälligen Umgebung mit farbigem Rauschen unter Verwendung von Pfadintegralen angesprochen hat.

Abschnitt 2 zeigt die quasistationäre Verteilung des Modells. Abschnitt 3 verwendet die Methode von Brillouin, Kramers und Wentzel (BKW), um gültige Näherungen in den Zonen des Parameters x = n / N zu erhalten, in denen die Verteilung schnell variiert. Abschnitt 4 verwendet eine andere Annäherung in dem Bereich, in dem sich die Verteilung langsam ändert. Abschnitt 5 verwendet eine Diffusionsgleichung, um die beiden vorherigen Näherungen zu verbinden: Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen von Kummer und Tricomi ersetzen hier die Gauß-Fehlerfunktion, die insbesondere von (Meerson und Sasorov, 2008) verwendet wird. Abschnitt 6 schätzt den mit der quasistationären Verteilung verbundenen Eigenwert.

Da keine dieser Näherungen rigoros erhalten wurde, enthält Abschnitt 7 dennoch numerische Simulationen, die den numerischen Wert der Exponenten für das Exponentialgesetz im stark überkritischen Fall und für das Potenzgesetz im schwach überkritischen Fall zu bestätigen scheinen. Abschnitt 8 fügt einige Bemerkungen hinzu. Insbesondere im schwach überkritischen Regime vergleichen wir den Fall einer markovschen Umgebung und den einer periodischen Umgebung mit dem gleichen Zeitanteil in einem günstigen oder ungünstigen Zustand: Der erste führt zu einem Potenzgesetz für die mittlere Zeit bis zum Aussterben das zweite nach einem Exponentialgesetz. Abschnitt 9 betrachtet den Fall einer Markov-Kette mit einer endlichen Anzahl von Zuständen und erörtert andere Verallgemeinerungen.

2 Quasistationäre Verteilung

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich zum Zeitpunkt tn infizierte Personen in der Umgebung j befinden : $p_{n,j}(t)$. Wir haben dann

$$\frac{dp_{n,1}}{dt} = -\left[a_1n(1-\frac{n}{N}) + bn + q_1\right]p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\
+ a_1(n-1)(1-\frac{n-1}{N})p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \tag{4}$$

$$\frac{dp_{n,2}}{dt} = -\left[a_2n(1-\frac{n}{N}) + bn + q_2\right]p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\
+ a_2(n-1)(1-\frac{n-1}{N})p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \tag{5}$$

Lassen Sie uns definieren

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$: ein Spaltenvektor
- $A_n = \text{diag}[a_1n(1-\frac{n}{N}), a_2n(1-\frac{n}{N})]$: eine diagonale Matrix der Ordnung zwei
- $B_n = \text{diag}[bn, bn]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left(\frac{Q \mid *}{0 \mid R}\right).$$

Das System (4) - (5) hat die Form

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

Die Eigenwerte von M sind die von Q und die von R. Die Eigenwerte von Q sind 0 und $-(q_1 + q_2)$. Die Koeffizienten der Matrix R außerhalb der Diagonale sind positiv oder Null. Darüber hinaus ist die Matrix R nicht reduzierbar, wie wir anhand des zugehörigen Graphen sehen können. Eine Folgerung aus dem Satz von Perron und Frobenius (Smith, 1995, Folgerung 3.2) zeigt, dass die Matrix R einen reellen Eigenwert λ hat, der einfach, streng größer als der Realteil aller anderen Eigenwerte und mit einem zugehörigen Eigenvektor ist mit streng positiven Komponenten. Wenn **1** der Linienvektor [1,1,...,1] der Größe 2N ist, dann

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

Nach (Berman und Plemmons, 1994, Satz 6.2.3, L33) haben wir $\lambda < 0$. Wir wählen $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ ein Eigenvektor von M, der dem Eigenwert λ zugeordnet ist: $M\pi = \lambda \pi$. Mit anderen Worten,

$$\begin{aligned} \lambda \,\pi_{n,1} &= -\left[a_1 n (1 - \frac{n}{N}) + b \, n + q_1\right] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} \\ &+ a_1(n-1) (1 - \frac{n-1}{N}) \pi_{n-1,1} + q_2 \,\pi_{n,2} \\ \lambda \,\pi_{n,2} &= -\left[a_2 n (1 - \frac{n}{N}) + b \, n + q_2\right] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} \\ &+ a_2(n-1) (1 - \frac{n-1}{N}) \pi_{n-1,2} + q_1 \,\pi_{n,1}. \end{aligned}$$
(6)

Normalisieren wir den Eigenvektor, indem wir zum Beispiel auferlegen

$$rac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})=1.$$

Abbildung 1 zeigt $\pi_{n,1}$ und $\pi_{n,2}$ als Funktion von n/N mit $n \ge 1$ in zwei Fällen: ein Fall, in dem $R_0 > 1$ und $a_1 > a_2 > b$, ein Fall, in dem $R_0 > 1$ und $a_1 > b > a_2$. Der Eigenvektor π wird mit der Scilab-Software berechnet. Der Höhepunkt von $\pi_{n,1}$ liegt in der Nähe $x_1 = 1 - b/a_1$, wie Sie es erwarten würden, wenn Sie über die mittlere Feldgleichung für den Anteil *i* infizierter Personen nachdenken

$$rac{di}{dt}=a_1i(1-i)-bi.$$

Tatsächlich x_1 ist der einzige stabile Gleichgewichtszustand dieser Gleichung. Der Höhepunkt von $\pi_{n,2}$ liegt in der Nähe $x_2 = 1 - b/a_2$ wenn $a_2 > b$ und in der Nähe von x = 0 wenn $a_2 < b$.



Abbildung 1. Die Komponenten $\pi_{n,1}$ und $\pi_{n,2}$ mit $n \ge 1$ des Eigenvektors π als Funktion von n/N, wenn N = 100, $q_1 = 1$ und $q_2 = 1$. Andere Parameterwerte: a) $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$, b) $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$.

Lassen Sie uns definieren

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$

Das lineare System (1) - (2) kann in der Form geschrieben werden

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}),$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}).$$
(9)

Die Systeme (8) - (9) und (6) - (7) zeigen dies

$$-\mathbf{1}^*=R^*\hat{T},\quad\lambda\hat{\pi}=R\hat{\pi},$$

wobei der Stern * die Transposition von Vektoren oder Matrizen anzeigt. Wenn wir das übliche Punktprodukt nehmen, erhalten wir $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$. Also haben wir

$$-rac{1}{\lambda}=rac{\langle \hat{T},\hat{\pi}
angle}{\langle \mathbf{1}^{*},\hat{\pi}
angle}\,.$$

Mit anderen Worten, $-1/\lambda$ ist eine lineare Kombination von $(T_{n,j})$ mit $n \ge 1$ und j = 1, 2. Im Folgenden interessieren wir uns hauptsächlich für λ . Wir studieren $(T_{n,j})$ in Abschnitt 7 durch numerische Simulationen.

3. BKW-Näherung

Der Fall $x > x_1 = 1 - b/a_1$. Mit $R_0 > 1$, wir vermuten das $\lambda \to 0$ wenn $N \to +\infty$. Wir werden a posteriori, wie zum Beispiel (Meerson und Sasorov, 2008) für ein anderes Modell, überprüfen, ob dies tatsächlich der Fall ist. Die linke Seite von (6) - (7) kann somit vernachlässigt werden. Mit $x > x_1$ Suchen wir nach einer BKW-Näherung (Bender und Orszag, 1978) der Form

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = rac{c(x)}{N} \; e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

mit x = n/N. Eine Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 für S(x) und der Ordnung 1 für $\Sigma(x)$ schlägt vor, dass

$$\pi_{n\pm 1,1}\simeq e^{-NS(x)\mp S'(x)-rac{S''(x)}{2N}-\Sigma(x)\mprac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

Wir erhalten durch Ersetzen in (6) und Vereinfachen durch $e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$

$$egin{aligned} 0&\simeq a_1N(x-rac{1}{N})(1-x+rac{1}{N})e^{S'(x)-rac{S''(x)}{2N}+rac{S'(x)}{2N}}-a_1Nx(1-x)\ &+bN(x+rac{1}{N})e^{-S'(x)-rac{S'(x)}{2N}-rac{\Sigma'(x)}{N}}-bNx-q_1+q_2rac{c(x)}{N}\ . \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in O (N) geben

$$0\simeq Nx\Big[e^{S'(x)}-1\Big]\Big[a_1(1-x)-be^{-S'(x)}\Big]$$

Der erste Term in eckigen Klammern ist nur für konstante Funktionen null S(x). Wählen Sie die Lösung, mit der der zweite Term in eckigen Klammern abgebrochen wird

$$e^{S'(x)}=rac{b}{a_1(1-x)},$$

das heißt

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1-x) \log(1-x)$$

mit Ausnahme einer additiven Konstante. dies impliziert $S''(x) = \frac{1}{1-x}$. Funktion $\Sigma(x)$ wird mit den Ausdrücken in O(1) erhalten :

$$egin{aligned} &0\simeq a_1Nigg[x(1-x)+rac{2x-1}{N}igg]e^{S'(x)}igg[1+rac{S''(x)}{2N}+rac{\Sigma'(x)}{N}igg]-a_1Nx(1-x)\ &+bN(x+rac{1}{N})e^{-S'(x)}igg[1-rac{S''(x)}{2N}-rac{\Sigma'(x)}{N}igg]-bNx-q_1\,. \end{aligned}$$

Ersetzen S(x) durch seinen Ausdruck bekommen wir

$$\Sigma'(x) = rac{1}{x} - rac{1/2}{1-x} + rac{q_1}{a_1-b}igg(rac{1}{x-x_1} - rac{1}{x}igg)\,,
onumber \ \Sigma(x) = \sigma_1(x) = \logigg(x\,\sqrt{1-x}igg[rac{x-x_1}{x}igg]^{rac{q_1}{a_1-b}}igg)\,.$$

Funktion c(x) im $\pi_{n,2}$ wird aus (7) erhalten. Die Form von $\pi_{n,2}$ wurde gewählt, um das Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Ausdrücken zu gewährleisten. In der Tat gibt die höchste Ordnung

$$0 \simeq rac{c(x)}{N} \Big\{ Na_2 x (1-x) \Big[e^{S'(x)} - 1 \Big] + b N x \Big(e^{-S'(x)} - 1 \Big) \Big\} + q_1 + q_2 + q_2 + q_3 + q_4 +$$

Ersetzen S(x) durch seinen Ausdruck bekommen wir

$$c(x)\simeq rac{q_1}{(a_1-a_2)x(x-x_1)}\,.$$

Zusammenfassend vermuten wir für $x > x_1$,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \, e^{-Ns_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \, \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x(x - x_1)},$$
(10)

für eine bestimmte Konstante k_1 . Betrachten Sie insbesondere das Verhalten von $\pi_{n,1}$ und von $\pi_{n,2}$ zum $x > x_1$ und x in der Nähe von x_1 . Lassen Sie uns definieren $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$. Wir haben $s'_1(x_1) = 0$. Eine Taylor-Entwicklung gibt

$$s_1(x)\simeq s_1(x_1)+s_1''(x_1)(x-x_1)^2/2\simeq -c_1+rac{a_1}{2b}(x-x_1)^2,$$

Wir haben also

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2} x_1^{\frac{a_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1}(x-x_1)^{\frac{a_1}{a_1-b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1-a_2)x_1(x-x_1)}.$$
(11)

Der Fall $x < x_2 = 1 - b/a_2$ wenn $a_1 > a_2 > b$. Lassen Sie uns symmetrisch nach einer Lösung suchen, wenn $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = rac{c(x)}{N} \; e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad x < x_2 = 1 - b/a_2.$$

Das System (6) - (7) führt wie oben zu

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1-x) \log(1-x)$$

mit Ausnahme einer additiven Konstante, während

$$\Sigma(x)=\sigma_2(x)=\log\Biggl(x\,\sqrt{1-x}\biggl[rac{x_2-x}{x}\biggr]^{rac{q_2}{a_2-b}}\Biggr),\quad c(x)\simeqrac{q_2}{(a_1-a_2)x(x_2-x)}$$

Zusammenfassend vermuten wir für $x < x_2$,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \, e^{-N s_2(x) - \sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \, \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2) x(x_2 - x)},$$
(12)

für eine bestimmte Konstante k_2 . Mit $x < x_2$ und x in der Nähe von x_2 ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2 - x)^2} x_2^{\frac{a_2 - b}{2} - 1}}{\sqrt{1 - x_2} (x_2 - x)^{\frac{a_2}{a_2 - b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2) x_2(x_2 - x)}.$$
(13)

Die Abbildungen 2 und 3 zeigen $-(\log \pi_{n,1})/N$ und $-(\log \pi_{n,2})/N$ bezüglich n/N mit $1 \le n \le N$, $\pi_{n,i}$ wird mit dem System (6) - (7) berechnet. Die Figuren zeigen auch Annäherungen (10) und (12) in dunkelblau und rot. Die Konstante k_1 in (10) wird so gewählt, dass $\pi_{n,1}$ stimmt mit seiner Näherung für n = N-I überein . Die Konstante k_2 in (12) wird bestimmt durch k_1 wie in Abschnitt 5 unten erläutert.



Abbildung 2. Das Beispiel mit $a_1 > a_2 > b$. In schwarz unter den anderen Kurven: $-(\log \pi_{n,1})/N$ und $-(\log \pi_{n,2})/N$ bezüglich x = n/N. $\pi_{n,1}$: in dunkelblau, Annäherungen (10) wenn $x > x_1$ und (12) wenn $x < x_2$; in hellblauer, diffusiver Näherung (25) wenn $x \simeq x_1$. $\pi_{n,2}$: in rot, Annäherungen (10) wenn $x > x_1$ und (12) wenn $x < x_2$; in pink die diffusive Näherung (31) wenn $x \simeq x_2$.



Abbildung 3. Das Beispiel mit $a_1 > b > a_2$. In schwarz unter den anderen Kurven: $-(\log \pi_{n,1})/N$ und $-(\log \pi_{n,2})/N$ bezüglich x = n/N. $\pi_{n,1}$: in dunkelblau die Annäherung (10) wenn $x > x_1$; in grün, Näherung (20) wenn $x < x_1$; in hellblauer, diffusiver Näherung (25) wenn $x \simeq x_1$. $\pi_{n,2}$: in rot die Näherung (10) wenn $x > x_1$; in lila, Annäherung (19) wenn $x < x_1$; in rosa, diffusive Näherung (31) wenn $x \simeq x_1$.

4 Annäherung im Bereich langsamer Variation

Wir suchen eine Annäherung an $\pi_{n,1}$ und $\pi_{n,2}$ im $x_2 < x < x_1$ wenn $a_1 > a_2 > b$ und in $0 < x < x_1$ wenn $a_1 > b > a_2$. In diesen Intervallen S(x) = 0. Betrachten wir das System (6) - (7) und versuchen Sie direkt die kontinuierliche Approximation $\pi_{n,1} \simeq y(x)$, $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ mit x = n/N. Eine Taylor-Entwicklung gibt

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x\pm 1/N) \simeq y(x)\pm rac{y'(x)}{N} + rac{y''(x)}{2N^2}$$

Mit $\lambda \approx 0$ führt dies zur diffusiven Approximation

$$0 \simeq \frac{d}{dx} \left[(bx - a_1 x (1 - x))y \right] - q_1 y + q_2 z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} \left[(a_1 x (1 - x) + bx)y \right]$$
(14)

$$0 \simeq \frac{d}{dx} \left[(bx - a_2 x (1-x))z \right] - q_2 z + q_1 y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} \left[(a_2 x (1-x) + bx)z \right].$$
(15)

Durch Vernachlässigung von 1 / N erhalten wir die Gleichungen

$$0 \simeq \frac{d}{dx} \left[(bx - a_1 x (1 - x)) y(x) \right] - q_1 y(x) + q_2 z(x)$$
(16)

$$0 \simeq \frac{d}{dx} \left[(bx - a_2 x (1 - x)) z(x) \right] - q_2 z(x) + q_1 y(x) , \qquad (17)$$

die die gleiche Form haben wie die Gleichungen (29) - (30) von (Slatkin, 1978). Durch Hinzufügen der Gleichungen (16) und (17) finden wir

$$rac{d}{dx}ig[(bx-a_1x(1-x))y(x)+(bx-a_2x(1-x))z(x)ig]\simeq 0$$

Die Funktion zwischen eckigen Klammern ist daher konstant. Da x ein Faktor ist, deutet dies darauf hin $x \rightarrow 0$ dass diese Konstante Null ist:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0.$$
(18)

Dies ermöglicht es auszudrücken y(x) bezüglich z(x). Durch Ersetzen in (17) erhalten wir nach einigen Manipulationen

$$\frac{1}{z(x)}\frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1 x(1 - x)} + \frac{q_2}{bx - a_2 x(1 - x)} - \frac{b - a_2(1 - 2x)}{bx - a_2 x(1 - x)},$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2 x(1 - x)} \left(\frac{a_1(1 - x) - b}{x}\right)^{\frac{q_1}{\alpha_1 - b}} \left(\frac{b - a_2(1 - x)}{x}\right)^{\frac{q_2}{\alpha_2 - b}}$$
(19)

für eine Konstante C. Diese Annäherung ist in Abbildung 3 in lila dargestellt. Die Konstante C wird bestimmt durch k_1 wie in Abschnitt 5 unten gezeigt. Dann zeigen die Gleichungen (18) und (19) dies

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1 x (1-x) - b x} \left(\frac{a_1 (1-x) - b}{x}\right)^{\frac{a_1}{a_1 - b}} \left(\frac{b - a_2 (1-x)}{x}\right)^{\frac{a_2}{a_2 - b}}.$$
(20)

Diese Annäherung ist in Abbildung 3 grün dargestellt $x \simeq x_1$ mit $x < x_1$, wir erhalten

$$y(x) \sim rac{C}{a_1 x_1} \left(rac{a_1}{x_1}
ight)^{rac{q_1}{a_1-b}} \left(rac{b-a_2(1-x_1)}{x_1}
ight)^{rac{q_2}{a_2-b}} (x_1-x)^{rac{q_1}{a_1-b}-1}.$$
 (21)

Im Falle $a_1 > b > a_2$ finden wir für $x \approx 0$

$$y(x) \sim C \left(a_1 - b\right)^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1} \left(b - a_2\right)^{\frac{q_2}{a_2 - b}} x^{-1 + \frac{q_2}{a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}}$$
(22)

$$z(x) \sim C \left(a_1 - b \right)^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \left(b - a_2 \right)^{\frac{q_2}{a_2 - b} - 1} x^{-1 + \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}}.$$
(23)

Wir erinnern uns $R_0 = \frac{a_1q_2+a_2q_1}{b(q_1+q_2)} > 1 \Leftrightarrow \frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$ In diesem Fall. Insbesondere das Integral von z(x) in der Nachbarschaft von 0^+ ist konvergent. Im Falle $a_1 > a_2 > b$, dann zeigt (19)

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2 x_2} \left(\frac{a_1(1-x_2)-b}{x_2}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{a_2}{x_2}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x-x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}$$
(24)

in der Nähe von x_2 mit $x > x_2$.

5 Diffusionsnäherung in der Nähe x1 und x2

Die Situation in der Nähe x_1 . In der Nähe von $x = x_1$ und $x = x_2$ kann die Diffusion in (14) - (15) nicht mehr vernachlässigt werden. Analyse von Übergangszonen in x_1 und x_2 muss zulassen, dass die Konstante C in (21) und (24) mit den Konstanten verknüpft wird k_1 aus (10) und k_2 ab 12). Lassen Sie uns definieren $x = x_1 + \xi_1 / \sqrt{N}$. Dann kann der Koeffizient der Ableitung der Ordnung 1 in (14) durch eine Erweiterung von Taylor der Ordnung 1 angenähert werden

$$0\simeq (a_1-b)rac{d}{d\xi_1}[\xi_1y]-q_1y+q_2z+b(1-b/a_1)rac{d^2y}{d\xi_1^2}\,.$$

Wir vernachlässigen $q_2 z$ vor dem $q_1 y$ wenn $x \simeq x_1$::

$$0\simeq rac{b}{a_1}rac{d^2y}{d\xi_1^2}+\xi_1\,rac{dy}{d\xi_1}+igg(1-rac{q_1}{a_1-b}igg)y$$

Mit

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$$
(25)

Wir haben die Hermite-Differentialgleichung

$$0\simeq rac{1}{2}rac{d^2Y}{d\eta_1^2} - \eta_1rac{dY}{d\eta_1} - rac{q_1}{a_1-b}Y$$

Wir suchen nach einer Lösung in Form einer ganzen Reihe

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^\infty w_n \eta_1^n \,.$$

Wir erhalten die Wiederholungsrelation

$$w_{n+2} = rac{2(n+2lpha_1)}{(n+2)(n+1)}\,w_n\,,$$

mit $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$. Wir haben also zwei linear unabhängige Lösungen

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \, \Phi(lpha_1, rac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \, \eta_1 \, \Phi(lpha_1 + rac{1}{2}, rac{3}{2}; \eta_1^2) \, .$$

 γ_1 und γ_2 sind Konstanten und

$$\Phi(lpha,eta;z)=\sum_{n=0}^{\infty}rac{lpha^{(n)}z^n}{eta^{(n)}n!}, \quad lpha^{(0)}=1, \quad lpha^{(n)}=lpha(lpha+1)(lpha+2)\cdots(lpha+n-1)$$

ist die konfluente hypergeometrische Funktion von Kummer. Nach (Maroni, 1997, Gleichung (93)) haben wir $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta}$ wenn $z \to +\infty$, wobei Γ Eulers Gammafunktion ist. Wir haben also

$$Y(\eta_1)\sim e^{\eta_1^2}{\left|\eta_1
ight|^{2lpha_1-1}}\Bigg(rac{\gamma_1\,\Gamma(rac{1}{2})}{\Gamma(lpha_1)}-rac{\gamma_2\,\Gamma(rac{3}{2})}{\Gamma(lpha_1+rac{1}{2})}\Bigg),\quad\eta
ightarrow-\infty.$$

 $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ hat das gleiche asymptotische Verhalten wie (21) wenn $\eta_1 \to -\infty$, unter der Vorraussetzung, dass

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{\frac{q_1-b}{a_1-b}-1} \left(\frac{\gamma_1 \,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})}\right) = \frac{C \left(b-a_2(1-x_1)\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}.$$
(26)

Wenn im Gegenteil $\eta_1 \to +\infty$, (11) schlägt das vor $Y(\eta_1)$ muss sich wie eine bestimmte Konstante multipliziert mit verhalten $\eta_1^{-2\alpha_1}$. Die Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen (Maroni, 1997) zeigt, dass es notwendig ist, aufzuerlegen

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K$$
(27)

für eine bestimmte Konstante K, um ein solches asymptotisches Verhalten zu erhalten. In der Tat haben wir dann

$$Y(\eta_1) = K\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2)\right),\tag{28}$$

das heißt $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$ zum $\eta_1 > 0$. $\Psi(\alpha, \beta; z)$ ist die konfluente hypergeometrische Funktion von Tricomi, definiert durch

$$\Psi(lpha,eta;z) = rac{\Gamma(1-eta)}{\Gamma(lpha-eta+1)}\,\Phi(lpha,eta;z) + rac{\Gamma(eta-1)}{\Gamma(lpha)}\,z^{1-eta}\Phi(lpha-eta+1,2-eta;z)\,.$$

Nach (Maroni, 1997, Gleichung (90)) haben wir $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$ wenn $z \to +\infty$. Also haben wir $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$ wenn $\eta_1 \to +\infty$.

Das Äquivalent von $e^{-\eta_1^2}Y(\eta_1)$ stimmt dann mit (11) überein, vorausgesetzt, dass

$$K\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{-\frac{a_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{a_1}{a_1-b}-1}.$$
(29)

Zusammenfassend bestimmen die Beziehungen (26), (27) und (29) K, γ_1 , γ_2 und C bezüglich k_1 . Insbesondere weil $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gibt Gleichung (26)

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})} = \frac{C\left(b-a_2(1-x_1)\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}.$$
(30)

Eine alternative Form kann unter Verwendung der Legendre-Gauss-Formel erhalten werden $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}}\Gamma(2\alpha_1)$.

Die Situation in der Nähe x_2 . Im Falle $a_2 > b$ machen wir eine ähnliche Analyse mit (15) in der Nähe von $x = x_2 = 1 - b/a_2$. Wir vernachlässigen q_1y vor dem q_2z . Mit

$$x=x_2+rac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2=\xi_2\sqrt{rac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2)=e^{-\eta_2^2}Z(\eta_2), \quad lpha_2=rac{q_2/2}{a_2-b},$$

wir haben

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \,\Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \,\eta_2 \,\Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2). \tag{31}$$

 δ_1 und δ_2 sind Konstanten. Das Verhalten für $\eta_2 \to +\infty$ stimmt mit (24) überein, sofern

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{\frac{q_2}{2-b}-1} \left(\frac{\delta_1 \,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})}\right) = \frac{C \left[a_1(1-x_2) - b\right]^{\frac{q_1}{q_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} \,x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}} \,. \tag{32}$$

Lassen Sie uns definieren

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K}$$
(33)

für eine bestimmte Konstante \hat{K} (Beachten Sie das Minuszeichen für δ_2). Wir haben dann $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$ wenn $\eta_2 < 0$. Also haben wir $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$ wenn $\eta_2 \to -\infty$. Dies stimmt mit (13) überein, sofern

$$\hat{K}\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{-\frac{a_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{a_2}{a_2-b}-1}.$$
(34)

Wie oben geben (32) und (33) an

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi\,\hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})} = \frac{C\,[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{q_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}}\,x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,.$$
(35)

Also die Konstanten k_2 , \hat{K} , δ_1 und δ_2 werden durch die Konstante C bestimmt .

6 Der Eigenwert des Systems

Wir haben $M\pi = \lambda \pi$. Durch Addieren aller Linien dieses Gleichungssystems erhalten wir $\lambda \sum_{n=0}^{N} (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$. Aber $\lambda < 0$. Also haben wir

$$\sum_{n=0}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})=0.$$

Die ersten beiden Zeilen des Systems sind

$$egin{array}{lll} \lambda\,\pi_{0,1} = -q_1\,\pi_{0,1} + q_2\,\pi_{0,2} + b\,\pi_{1,1}\,, \ \lambda\,\pi_{0,2} = -q_2\,\pi_{0,2} + q_1\,\pi_{0,1} + b\,\pi_{1,2}\,. \end{array}$$

Indem wir sie hinzufügen, finden wir

$$\lambda = b \, \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \, \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^{N} (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})} \,. \tag{36}$$

Betrachten wir zunächst den Fall, in dem $a_1 > b > a_2$ mit $R_0 > 1$. So zeigt (19)

$$rac{1}{N}\sum_{n=1}^N\pi_{n,2}\simeq\int_0^{x_1}z(x)\,dx\simeq\kappa_1\,C.$$

 κ_1 ist eine positive Konstante, die unabhängig von N. Unter Verwendung der Tatsache, dass der Peak von $\pi_{n,1}$ liegt in der Nähe $x = n/N = x_1$ und Beziehungen (25), (28) und (30) finden wir

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) \, d\eta_1 \, \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 \, C \, N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}} \,, \tag{37}$$

bei dem die κ_j (oben und unten) sind immer noch positive Konstanten, die von N unabhängig sind . Der dominante Term für N groß im Nenner von (36) ist also der mit $\pi_{n,2}$. Im Zähler $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$ und $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$. y(x) und z(x) sind gegeben durch (22) - (23). Wir erhalten

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \, rac{(rac{1}{N})^{rac{q_2}{b-a_2}-rac{q_1}{a_1-b}-1}}{N} \simeq -\kappa_4 \, N^{-rac{q_2}{b-a_2}+rac{q_1}{a_1-b}}$$

Mit anderen Worten, $-1/\lambda$ steigt mit N als Potenzgesetz, dessen Exponent ist

$$\omega=rac{q_2}{b-a_2}-rac{q_1}{a_1-b}>0,$$

wie in der Einleitung angekündigt. Wir bemerken außerdem, dass ω gegen konvergiert + ∞ wenn a_2 konvergiert zu b durch niedrigere Werte.

Betrachten Sie nun den Fall, in dem $a_1 > a_2 > b$. Lassen Sie uns zur Vereinfachung die Notation einführen $f \approx g$ (Nicht zu verwechseln mit dem informellen Symbol \simeq oben verwendet) wenn $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$ wenn $N \rightarrow +\infty$. Bestimmtes $N^{\beta} \approx 1$ für alle β . Dann zeigt (12) mit x = I/N das $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$. Außerdem,

$$\pi_{1,2}pprox k_2\,e^{-Ns_2(1/N)}pprox k_2\,e^{-s_2'(0)}pprox k_2$$

Weiterhin ist der Peak von $\pi_{n,1}$ liegt in der Nähe $x = n/N = x_1$ während das von $\pi_{n,2}$ liegt in der Nähe x_2 . Somit ist (37) noch gültig und zeigt

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

während (31), (33) und (35) geben

$$rac{1}{N}\sum_{n=1}^N \pi_{n,2}\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2)\,d\eta_2\;rac{dx}{d\eta_2}\simeq \kappa_5rac{\hat{K}}{\sqrt{N}}\simeq \kappa_5\,C\,N^{-rac{q_2/2}{a_2-b}}pprox C$$

Aber (34) und (35) zeigen

$$Cpprox\hat{K}pprox k_2\,e^{Nc_2}$$

Somit gibt (36) $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$ und $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$. Schließlich, $-1/\lambda$ wächst ungefähr exponentiell mit einem Parameter c_2 .

7 Die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben

Das lineare System (8) - (9) kann mit der von (Artalejo et al., 2013) vorgestellten numerischen Methode gelöst werden. Das Verfahren verwendet nur quadratische Matrizen der Ordnung 2 und verringert die numerische Instabilität. Erinnern wir uns daran $q_1 = q_2 = 1$ und b = 2.

Erstes Beispiel: $a_1 > a_2 > b$. Lass uns nehmen $a_1 = 10$ und $a_2 = 5$. Abbildung 4a zeigt $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ bezüglich x = n/N. Abbildung 4b legt nahe, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben, beispielsweise bei N infizierten Personen in Umgebung 1, ungefähr exponentiell zunimmt: $T_{N,1} \approx e^{cN}$. Lineare Regression gibt $c \simeq 0.32$. Beachten Sie, dass $c_1 \simeq 0.81$ und $c_2 \simeq 0.32$, was darauf hindeutet $c = c_2$.



Abbildung 4. Der Fall $a_1 > a_2 > b. a$) $T_{n,1}$ [durchgezogene Linie] und $T_{n,2}$ [gepunktete Linie] abhängig von n/N wenn N = 100. b) log $T_{N,1}$ bezüglich N.

Zweites Beispiel : $a_1 > b > a_2$ und $R_0 > 1$. Lass uns nehmen $a_1 = 5$ und $a_2 = 1$. Damit $R_0 = 1.5 > 1$. Abbildung 5a zeigt $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ bezüglich x = n/N. Abbildung 5b zeigt log $T_{N,1}$ bezüglich log N. Wir bekommen eine gerade Linie, die ein Potenzgesetz vorschlägt $T \sim \kappa N^{\omega}$. Die durch lineare Regression erhaltene Steigung beträgt $\omega \simeq 0.67$. In diesem Fall haben wir $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, was gut der gemessenen Steigung entspricht.



Abbildung 5. Der Fall $a_1 > b > a_2$ mit $R_0 > 1$. a) $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ bezüglich x = n/N wenn N = 100. b) log $T_{N,1}$ bezüglich log N.

8 Hinweise

Vergleich mit dem periodischen Fall.

Um den Unterschied zwischen einer zufälligen Umgebung und einer periodischen Umgebung hervorzuheben, nehmen wir den Fall, in dem $a_1 = 5$ und $a_2 = 1$ während $q_1 = q_2 = 1$ und b = 2. Wir haben dann $u_1 = u_2 = 0.5$: Die Umgebung verbringt durchschnittlich die Hälfte der Zeit in Zustand 1, die andere Hälfte in Zustand 2. Abbildung 6 zeigt auf der einen Seite, wie $T_{N,1}$ erhöht sich als Funktion von N als Potenzgesetz. Betrachten Sie andererseits dasselbe SIS-Modell, jedoch in einer periodischen Umgebung (Bacaër, 2015): Wählen wir $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, $a(t) = a_1$ zum $0 < t < u_1T$, und $a(t) = a_2$ zum $u_1T < t < T$. Für dieses Modell $e^{\Lambda T}$ ist der Floquet-Multiplikator, der dem Extinktionsprozess zugeordnet ist. Abbildung 6 zeigt wie $-1/\Lambda$ wächst exponentiell mit N.



Abbildung 6. Durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben $T_{N,1}$ in einer zufälligen Umgebung und $-1/\Lambda$ in einer periodisch ähnlichen Umgebung.

Die mittleren Feldgleichungen. Es kann nützlich sein, sich daran zu erinnern (Bacaër und Ed-Darraz, 2014), dass die mittleren Feldgleichungen

$$egin{array}{l} rac{dI_1}{dt} = a_1 I_1 (1 - rac{I_1}{N}) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \ rac{dI_2}{dt} = a_2 I_2 (1 - rac{I_2}{N}) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1 \end{array}$$

Sobald sie in der Nähe des Gleichgewichtszustands (0,0) linearisiert sind, führen sie zur Jacobi-Matrix

$$egin{pmatrix} a_1-b-q_1 & q_2 \ q_1 & a_2-b-q_2 \end{pmatrix} \cdot$$

Aber wir können gleichzeitig haben

- · ein streng positiver Eigenwert, so dass das triviale Gleichgewicht instabil ist,
- $R_0 < 1$.

Eine weitere Grenze. Die erhaltenen Ergebnisse berücksichtigen die Parameter q_j , a_j und b sind fest, während N gegen unendlich konvergiert. Die Dinge sind offensichtlich anders, wenn zum Beispiel q_1 und q_2 konvergieren gegen unendlich mit einem konstanten Verhältnis q_1/q_2 . Das Modell nähert sich dann einem homogenisierten Modell in einer konstanten Umgebung mit einem gemittelten Kontaktparameter $\bar{a} = a_1u_1 + a_2u_2$.

Der unterkritische Fall. Wir haben den unterkritischen Fall nicht angesprochen $R_0 < 1$ mit $a_1 > b > a_2$ oder $b > a_1 > a_2$. Das Verhalten der durchschnittlichen Zeit bis zum Aussterben ist dann ungefähr das gleiche wie in einer konstanten Umgebung: Ausgehend von einem festen Teil der infizierten Bevölkerung liegt die durchschnittliche Zeit in der Größenordnung von log N (Doering et al., 2005). Ausgehend von einer infizierten Fraktion 1 / N konvergiert die durchschnittliche Zeit im Gegenteil gegen eine Grenze. Im Falle einer zufälligen Umgebung ist dies auch das, was digitale Simulationen vorschlagen.

9 Markov-Kette mit endlicher Anzahl von Zuständen

Mit *J* Zustände, denken Sie daran, dass der Infinitesimalgenerator *Q* ist so, dass $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^{J} Q_{i,j} \forall j$. Angenommen, diese Matrix*Q* ist irreduzibel und das $a_1 > a_2 > \cdots > a_J$. Im Falle $a_J > b$ dann steigt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben ungefähr exponentiell mit der Größe *N* der Bevölkerung mit einer Rate $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$. In der Tat ist das Aussterben in der Umgebung *J* am wahrscheinlichsten.

Wenn and ereseits $b > a_J$ und $R_0 > 1$, Hinweis $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ mit x = n/N. In der Nachbarschaft von x = 0 wird das System (16) - (17)

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k .$$
 (38)

Auf der Suche nach einer Lösung $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$ mit $\omega > 0$ und $\theta_j > 0$ für alle *j* finden wir

$$0\simeq \omega(b-a_j) heta_j+\sum_{k=1}^J Q_{j,k} heta_k\,,\quad 1\leq j\leq J_k$$

Mit den Notationen der Einleitung haben wir daher das Problem des verallgemeinerten Eigenwerts $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ mit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$.

Wir werden zeigen

$$\exists! \ \omega > 0, \quad Q heta = \omega (A - B) heta, \quad heta_j > 0 \ \forall j$$

D = A - B ist eine diagonale Matrix. Für jede reelle Zahl s,

$$\mu(s) = \max\{\mathfrak{R}(\lambda); \ \lambda \in \sigma(Q-sD)\}$$

Q - sD hat alle seine Koeffizienten außerhalb der Diagonale, die positiv oder Null sind. Außerdem ist diese Matrix nicht reduzierbar. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Perron und Frobenius (Smith, 1995, Folgerung 3.2), $\mu(s)$ ist ein einfacher Eigenwert von Q - sD (als dominanter Eigenwert bezeichnet) und es gibt einen Eigenvektor $\phi(s)$ alle deren Komponenten sind streng positiv, so dass

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

Dieser Eigenvektor ist bei der Normalisierung eindeutig

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

Nach der gleichen Folgerung ist die Existenz eines Vektors θ mit $\theta_j > 0$ $\forall j$ und $(Q - \omega D)\theta = 0$ tatsächlich beträgt $\mu(\omega) = 0$. Es geht also darum zu zeigen, dass die Gleichung $\mu(\omega) = 0$ mit $\omega > 0$ hat eine einzigartige Lösung.

In Bezug auf die Existenz stellen wir zunächst fest, dass der Infinitesimalgenerator Q entsprechen s = 0: wir haben $\mu(0) = 0$ und wir stellen fest $u = \phi(0)$ der Eigenvektor rechts. Linienvektor $\mathbf{1} = [1, ..., 1]$ ist ein Eigenvektor links von Q assoziiert mit dem Eigenwert 0. Wir haben also

$$\mathbf{1}u=\sum_{j=1}^J u_j=1.$$

Nach dem einfachen Eigenwert-Störungssatz ist die Funktion $\mu(s)$ ist differenzierbar in s = 0 und

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

Aber $R_0 > 1 \Leftrightarrow \mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^{J} (a_j - b)u_j > 0$. Also haben wir $\mu'(0) < 0$. Darüber hinaus haben wir

$$(Q/s-D)\phi(s)=(\mu(s)/s)\phi(s),\quad orall s>0.$$

Wir haben $Q/s - D \rightarrow -D$ wenn $s \rightarrow +\infty$. Durch die Kontinuität des Spektrums,

$$\mu(s)/s
ightarrow \max_i (-D_{j,j}) = \max_i (b-a_j) = b-a_J > 0.$$

Also haben wir $\mu(s) \to +\infty$ wenn $s \to +\infty$. weil $\mu(0) = 0$ und $\mu'(0) < 0$ schließen wir, dass es gibt $\omega > 0$ mit $\mu(\omega) = 0$.

Was die Einzigartigkeit betrifft, so ist zunächst die Funktion zu beachten $\mu(s)$ ist konvex. In der Tat für alle reellen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \text{ und } 0 < \varepsilon < 1$, wir sehen das $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$ ist der dominante Eigenwert der Matrix $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$. Nach einem Satz von (Cohen, 1981) ist dieser Eigenwert kleiner oder gleich $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$. Dies beweist die Konvexität. Nehmen wir jetzt an, dass es gibt $\omega_1 > \omega_2 > 0$ mit $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$. weil $\mu(0) = 0$ und weil $\mu(s)$ ist konvex, schließen wir $\mu(s) = 0$ zum $0 \le s \le \omega_1$. Dies widerspricht $\mu'(0) < 0$.

A - B ist eine invertierbare Matrix, wenn $a_j \neq b \ \forall j$. $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ also gleich $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega \theta$. Also ist ω der Eigenwert von $(A - B)^{-1}Q$ der Realteil davon ist der größte.

Schließlich wird Gleichung (36)

$$\lambda = -b \, rac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}} \, .$$

Im Zähler haben wir $\pi_{1,j} \simeq \theta_j (1/N)^{\omega-1}$. Im Nenner haben wir

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N heta_j \int_0^1 x^{\omega-1} \, dx.$$

Damit $-1/\lambda$ steigt mit N als N^{ω} .

Es ist zweifellos möglich, ein solches Ergebnis zu verallgemeinern, wenn die Umgebung beispielsweise durch eine stochastische Differentialgleichung bestimmt wird

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

Lassen Sie uns definieren L* der Differentialoperator

$$(L^*u)(\xi)=rac{\sigma^2}{2}rac{d^2u}{d\xi^2}-rac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

Wir nehmen das an $u(\xi)$ ist eine unveränderliche Wahrscheinlichkeit:

$$L^*u=0, \quad u>0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,d\xi=1$$

Im Fall von Langevins Gleichung haben wir also

$$f(\xi)=-k\,\xi,\quad k>0,\quad u(\xi)=\sqrt{rac{k}{\pi\sigma^2}}\,e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

Wir gehen davon aus, dass die Kontaktrate $a(\cdot)$ ist eine Funktion auf $\mathbb R$ mit $\min a(\cdot) < b$ und

$$R_0 = \left(\lim_{T o\infty}rac{1}{T}\int_0^T a(\xi(t))\,dt
ight)/b = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}a(\xi)\,u(\xi)\,d\xi
ight)/b > 1.$$

Die durchschnittliche Extinktionszeit nimmt mit N as zu N^{ω} und ω ist die einzige positive Zahl, für die der Differentialoperator gilt $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$ hat einen Haupteigenwert gleich 0. Für die Konvexität dieses Eigenwertes als Funktion von ω siehe (Kato, 1982). Beachten Sie, dass der Assistent linearer Operator ist

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

und $L\mathbf{1} = 0$ wenn $\mathbf{1}$ bezeichnet die konstante Funktion gleich 1.

10 Eine Umgebung, die sowohl periodisch als auch zufällig ist

Kehren wir zum Fall einer endlichen Menge von Umgebungen zurück. Wir nehmen nun an, dass der Infinitesimalgenerator Q(t)

- ist eine periodische Funktion der Periode ${\cal T}$
- ist eine stetige oder stückweise stetige Funktion,
- ist mindestens über ein Intervall von *t* irreduzibel .

Das System (4) - (5) nimmt die Form an $\frac{dP}{dt} = M(t)P$. Wenn Sie folgen (Bacaër, 2015), gibt es dann ein einzigartiges Paar (λ, π) mit

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \le n \le N, 1 \le j \le J}$ ist eine periodische Funktion der Periode $\mathcal T$

•
$$\lambda \pi(t) + rac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

• $rac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} \pi_{n,j}(t) = 1$

• $\pi_{n,j}(t) > 0, 1 \le n \le N, 1 \le j \le J.$

Außerdem,

$$\sum_{n=0}^N\sum_{j=1}^J\pi_{n,j}(t)=0.$$

Es gibt auch eine einzigartige Funktion \mathcal{T} -periodisch u(t) mit

$$rac{du}{dt}=Q(t)u(t),\quad u_j(t)>0,\quad \sum_{j=1}^J u_j(t)=1.$$

Als (Bacaër und Ed-Darraz, 2014) definieren wir

$$R_0 = (rac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}}\sum_{j=1}^J a_j u_j(t)\,dt)/b.$$

Wir vermuten, dass wenn $a_1 > \ldots > a_J > b$ dann steigt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben wieder exponentiell mit N mit einer Rate an

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

Wenn andererseits $a_J < b$ Aber $R_0 > 1$ die Annäherung $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t,x)$ führt zu verallgemeinern (38) in der Nähe von x = 0

$$rac{\partial y_j}{\partial t}\simeq (b-a_j)rac{\partial}{\partial x}(xy_j)+\sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t)y_k\,.$$

Eine Lösung der Form $y_j(t,x) = \theta_j(t)x^{\omega-1}$ mit einer Funktion $\theta(t) = (\theta_j(t)) \mathcal{T}$ -periodisch, muss überprüfen

$$rac{d heta}{dt} = (Q(t) - \omega D) heta(t)$$

Es gibt eine einzige reelle Zahl $\mu(\omega)$ für welche $e^{\mu(\omega)T}$ ist der dominante Floquet-Multiplikator des Systems

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

Diese Matrix ist eine periodische Funktion der Periode \mathcal{T} . Die Koeffizienten außerhalb der Diagonale sind positiv oder Null. Die Matrix ist über ein Intervall von *t* nicht reduzierbar. Wir können zeigen, dass es eine einzigartige gibt $\omega > 0$ mit $\mu(\omega) = 0$. Wir verwenden wie in Abschnitt 9

- die Konvexität von $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -rac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) \, dt < 0 ext{ wenn } R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \to +\infty$ wenn $a_I < b$.

Beachten Sie, dass die Konvexität von $\mu(\omega)$ wird durch einfache Verallgemeinerung des Arguments von (Cohen, 1981) demonstriert. Wir gebrauchen

- Die logarithmische Konvexität des Spektralradius von Matrizen mit Koeffizienten in der Menge der Null- oder logarithmisch konvexen Funktionen in ω wird notiert G
- S ist durch Addition, Multiplikation und Übergang zur Grenze stabil

(Kingman, 1961). Tatsächlich, Q(t) ist eine stückweise kontinuierliche periodische Funktion, die über eine Treppenfunktion erreicht werden kann. Q_k ist die ungefähre Matrix über das Intervall (τ_k, τ_{k+1}) zum k = 0, ..., K - 1 mit $\tau_0 = 0$ und $\tau_K = \mathcal{T}$. Wenn die Matrix Q(t) war diese Treppenfunktion, $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ wäre gleich dem spektralen Radius des Matrizenprodukts

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(au_K- au_{K-1})} imes \cdots imes e^{(Q_0-\omega D)(au_1- au_0)}$$

Nach (Cohen, 1981) hat jede dieser Matrizen ihre Koeffizienten in \mathfrak{S} . Das Produkt der Matrizen ist also auch mit Koeffizienten in \mathfrak{S} . Sein spektraler Radius ist in ω log-konvex.

weil

$$\lambda = -brac{\int_{0}^{\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{J}\pi_{1,j}(t)\,dt}{\int_{0}^{\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,j}(t)\,dt}$$

Wir schließen wie zuvor $-1/\lambda$ steigt wahrscheinlich mit $N \operatorname{als} N^{\omega}$.

Vielen Dank

Dieser Artikel wurde durch ein Treffen am Instituto de Ciencias Matemáticas in Madrid im Oktober 2014, durch Vorlesungen an der Universität Tlemcen im Mai 2015 und durch ein Seminar an der Universidade Nova de Lisboa im Juni 2015 angeregt.

Literaturhinweise

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. J Math Biol 67 : 799-831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. J Math Biol 69: 73-90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. J Math Biol 71: 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J Appl Probab 18: 19-30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. Proc Amer Math Soc 81: 657-658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes :
- exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. Multiscale Model Simul 3: 283-299 • Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system :
- different predictions between discrete and continuous models. Lett Math Phys 37: 285-292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. Phys Rev Lett 101: 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. Math Z 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. Quart J Math Oxford Ser (2) 12 : 283-284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. Am Nat 142 : 911-927
- All Nat 142; 911-927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. J Theor Biol 90: 213–239
- $\bullet \ \ Ludwig \ D \ (1976) \ A \ singular \ perturbation \ problem \ in \ the \ theory \ of \ population \ extinction. \ SIAM-AMS \ Proceedings \ 10: \ 87-104$
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise-driven unlimited population growth. Phys Rev E 78: 060103
- Nbeimsell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. Ecology 59: 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. Theor Popul Biol 19: 37-57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence