نموذج الستوكاستك SIS لوباء في بيئة عشوائية

.J. Math. Biol. 73 (2016) 847-866
http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037

Nicolas Bacaër

Bondy، France ،Institut de Recherche pour le Développement
Pierre and Marie Curie University، Les Cordeliers، Paris، France
nicolas.bacaer@ird.fr

ملخص

في بيئة عشوائية عبارة عن سلسلة ماركوف الزمنية المستمرة من دولتين ، فإن متوسط الوقت للانقراض من نموذج الاستوكاستك SIS للوباء يزداد ، في الحالة فوق الحرجة ، بشكل كبير فيما يتعلق بحجم السكان إذا كان كلاهما الدول مواتية ، ووفقًا لقانون السلطة إذا كانت إحدى الدول مواتية بينما كانت الأخرى غير مواتية للانتشار.

1 المقدمة

دع N يكون حجم السكان ، على افتراض أنه ثابت. في نموذج الستوكاستك SIS للوباء ، يكون كل فرد إما صحيًا (S) أو مصابًا ((I Nåsell ، 2011)). تخيل أن البيئة تتبع سلسلة ماركوف في وقت متواصل مع دولتين. q_j ، مع $j = 1$ أو 2 ، هو معدل الخروج من الحالة j. في البيئة j ، يكون معدل الاتصال لكل فرد $a_j > 0$. وإذا كان في لحظة ر عدد المصابين هو ن والبيئة ي ، واحتمال وجود عدوى جديدة بين ر و ر + دينارا ، مع دينارا متناه في الصغر، هو $a_j\, n(1-n/N)\, dt$. افترض أن معدل الشفاء $b > 0$ للفرد هو نفسه في كلتا البيئتين. احتمال وجود علاج جديد في السكان ثم $b\, n\, dt$ بين t و $t + dt$. تمت دراسة هذا النموذج من قبل (Artalejo et al.، 2013) ولكن ليس إلى الحد الذي يصبح فيه حجم N من السكان كبيرًا. علاوة على ذلك ، هناك حالة خاصة لعملية الولادة والوفاة في بيئة ماركوفية (Cogburn and Torrez، 1981).

دعونا نحدد

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1+q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1+q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1u_1 + a_2u_2}{b}.$$

Q هو المولد اللامتناهي ، بينما u_1 (ريب. u_2) هي نسبة الوقت المنقضي في البيئة 1 (استجابة 2). للنموذج الخطي ، أي العملية الخطية للولادة والموت في بيئة عشوائية من المعلمات a_j و b، (باقر وإد الدراز ، 2014) يلاحظ أنه من شبه المؤكد أن هناك انقراض إذا وفقط إذا $R_0 \le 1$. بالنسبة لنموذج SIS غير الخطي ، من ناحية أخرى ، هناك انقراض مهما كانت قيمة المعلمة R_0 . ومع ذلك ، عندما يكون عدد السكان N كبيرًا ، يكون متوسط الوقت للانقراض كبيرًا إذا $R_0 > 1$ وصغيرة إذا $R_0 < 1$. نحدد $T_{n,j}$ متوسط الوقت مع n المصابين في البداية في البيئة ي . ثم لدينا مع $1 \le n \le N$،

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1-n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1T_{n,2}}{a_1 n(1-n/N) + bn + q_1}, \tag{1}$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1-n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2T_{n,1}}{a_2 n(1-n/N) + bn + q_2}. \tag{2}$$

علاوة على ذلك $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$. الهدف من هذه المقالة هو الدراسة في الحالة فوق الحرجة ، وهذا يعني إذا $R_0 > 1$ ، سلوك متوسط الوقت حتى الانقراض عندما يصبح حجم السكان N كبيرًا.

في بيئة ثابتة بمعدل اتصال و مع $R_0 = \frac{a}{b} > 1$ (Doering et al. ، 2005 ، الجدول 1) يوضح أن متوسط وقت الانقراض من جزء مصاب من السكان $x = n/N$ يزيد عندما $N \to \infty$ ، بغض النظر عن x ، مثل $\frac{a}{(a-b)^2}\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\, e^{cN}$ مع

$$c = b/a - 1 - \log(b/a).$$

وبعبارة أخرى، فإن متوسط الوقت يتزايد أضعافا مضاعفة تقريبا مع N . (Bacaër، 2015) يقترح نتيجة مشابهة عندما تكون البيئة دورية ، حتى لو لم تكن هناك صيغة صريحة لمعلمة النمو ج .

في بيئة عشوائية فوق الحرجة ، أي مع $R_0 > 1$، تشير المقالة التالية إلى أنه يجب التمييز بين حالتين: حالة فوق الحرجة للغاية حيث $a_1 > a_2 > b$ وحالة ضعيفة للغاية حيث $a_1 > b > a_2$. في حالة فوق الحرجة للغاية حيث $a_1 > a_2 > b$ ، نفترض أن متوسط وقت الانقراض يزداد بشكل كبير مع N مع معلمة $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$. بتعبير أدق ، يتقارب لوغاريتم هذا الوقت ، مقسومًا على N ، علىc_2 . وبالتالي فإن السلوك المقارب هو نفسه كما لو كانت البيئة مغلقة في الحالة 2 ، وهذا يعني أن الأقل ملاءمة لانتشار الوباء والذي يحدث فيه الانقراض بشكل تفضيلي.

ومع ذلك، إذا $a_1 > b > a_2$ و $R_0 > 1$، ثم نفترض أن متوسط الوقت حتى الانقراض يزيد كما N^ω مع

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b} \,. \tag{3}$$

في هذه الحالة، $R_0 > 1 \Leftrightarrow \omega > 0$. بشكل حدسي ، يحدث من وقت لآخر أن يبقى المرء في الحالة 2 لفترة طويلة جدًا. احتمالية أن تكون هذه المدة أكبر من τ هي$e^{-q_2\tau}$. في الحالة 2 ، متوسط وقت الانقراض لـ N large هو من $\tau \simeq \frac{\log N}{b-a_2}$ (دورينج وآخرون ، 2005). يمكن تخمين ذلك أيضًا من معادلة شبه الانقراض$e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$. لذا فإن احتمال الانقراض خلال فترة في الحالة 2 موجود في النهاية $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$. هذا يشير إلى أن متوسط وقت الانقراض هو من حيث حجم العكسي ، أي $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$. وفقًا لتحليلنا ، فإن ترتيب الحجم هو في الواقعN^ω مع ω المعطى بواسطة (3).

لاحظ أيضًا أنه إذا q_1 و q_2 مضروبة في $1 + \varepsilon$ مع $\varepsilon > 0$، R_0 يبقى دون تغيير ولكن ω مضروبة في $1 + \varepsilon$: في هذا النموذج ، تميل زيادة التقلبية البيئية إلى زيادة متوسط وقت الانقراض.

هذا القانون في N^ω يبدو أنه قادر على التعميم في حالة البيئة مع حالات J إذا

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

نملك

$$R_0 = (\sum_{j=1}^{J} a_j u_j)/b$$

إذا Q هو مولد متناهية في الصغر، وإذا ش هي ناقلات الوحيد

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^{J} u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(بكار وإد الدراز ، 2014). دع A و B يدلان على المصفوفات القطرية$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_J)$ و $\mathrm{diag}(b, \ldots, b)$. النظر في الحد الطيفي

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda);\ \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\}.$$

$\sigma(\cdot)$ يدل على طيف مصفوفة و $\Re(\cdot)$الجزء الحقيقي من العدد المركب. نحن نعرض

$$\exists!\ \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

ثم نفترض أن متوسط الوقت للانقراض يزيد كما N^ω. في حالة معينة حيث $a_j \neq b\ \forall j$ ، الرقم simply هو ببساطة القيمة الذاتية لأكبر جزء حقيقي من المصفوفة $(A - B)^{-1}Q$. تم العثور على هذه المصفوفة والتعبير عن القيمة الذاتية ω المعطاة بواسطة (3) لـ $I = 2$ بالفعل في (سوير وسلاتكين ، 1981 ، المعادلتين (14) و (20)) لنموذج السكان دون العشوائية الديموغرافية في حالة دون الحرجة ($R_0 < 1$). في هذه الحالة، فإن متوسط الوقت للانقراض، ومع ذلك، ويزيد كما لوغاريتم N .

لقد وجد العديد من المؤلفين قانونًا للسلطة في الوقت المتوسط للانقراض في النماذج السكانية في بيئة عشوائية براونية (لودفيج ، 1976 ؛ لي ، 1981 ؛ لاند ، 1993). يستخدمون معادلة الانتشار كنقطة انطلاق. ومع ذلك ، فقد أظهر (Gaveau et al.، 1996) و (Doering et al.، 2005) أن هذه المعادلة تؤدي إلى صيغة غير دقيقة للمعلمة c . في الواقع ، لا تمثل هذه المعادلة دائمًا بشكل جيد ذيل التوزيع شبه الثابت ، وهو بالتحديد أهم جزء لدراسة عملية الانقراض. لاحظ ، مع ذلك ، أن (كامينيف وآخرون ، 2008) عالج مشكلة الانقراض للسكان في بيئة عشوائية مع ضوضاء ملونة باستخدام تكاملات المسار.

يقدم القسم 2 التوزيع شبه الثابت للنموذج. يستخدم القسم 3 طريقة Brillouin و Kramers و Wentzel (BKW) للحصول على تقديرات تقريبية صالحة في مناطق المعلمة $x = n / N$ حيث يتغير التوزيع بسرعة. يستخدم القسم 4 تقريبًا آخر في المنطقة حيث يتغير التوزيع ببطء. يستخدم القسم 5 معادلة الانتشار لربط التقريبين السابقين: استبدال وظائف الهندسة المتقاربة لـ Kummer و Tricomi هنا وظيفة خطأ Gauss المستخدمة بشكل خاص بواسطة (Meerson and Sasorov، 2008). يقدّر القسم 6 القيمة الذاتية المرتبطة بالتوزيع شبه الثابت.

لم يتم الحصول على أي من هذه التقريبات بشكل صارم ، يقدم القسم 7 مع ذلك المحاكاة العددية التي يبدو أنها تؤكد القيمة العددية للدعاة للقانون الأسي في الحالة فوق الحرجة بقوة ولقانون القوة في الحالة فوق الحرجة الضعيفة. القسم 8 يضيف بعض الملاحظات. على وجه الخصوص ، في النظام الضعيف للغاية ، نقارن حالة البيئة الماركوفية وحالة البيئة الدورية مع نفس نسبة الوقت في حالة مواتية أو غير مواتية: الأول يؤدي إلى قانون السلطة في الوقت المتوسط حتى الانقراض ، والثاني لقانون أسي. القسم 9 ينظر في حالة سلسلة ماركوف مع عدد محدود من الدول ويناقش التعميمات الأخرى.

2 توزيع شبه ثابت

ضع في اعتبارك احتمالية وجود عدد من المصابين في البيئة j ، في الوقت t: $p_{n,j}(t)$. لدينا بعد ذلك

$$\begin{aligned}\frac{dp_{n,1}}{dt} &= -\left[a_1 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_1\right]p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\ &\quad + a_1(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})p_{n-1,1} + q_2\,p_{n,2} \qquad (4)\\ \frac{dp_{n,2}}{dt} &= -\left[a_2 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_2\right]p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\ &\quad + a_2(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})p_{n-1,2} + q_1\,p_{n,1}. \qquad (5)\end{aligned}$$

دعونا نحدد

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{N,1}, p_{N,2})$: متجه عمود
- $A_n = \mathrm{diag}[a_1 n(1-\frac{n}{N}),\ a_2 n(1-\frac{n}{N})]$: مصفوفة قطرية من الرتبة الثانية
- $B_n = \mathrm{diag}[bn,\ bn]$
- $$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array}\right).$$

النظام (4) - (5) من الشكل

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

والقيم الذاتية لل M هي تلك Q وتلك R . والقيم الذاتية لل Q هي 0 و $-(q_1 + q_2)$. تكون معاملات المصفوفة R خارج القطر موجبة أو صفر. علاوة على ذلك ، المصفوفة R غير قابلة للاختزال ، كما نرى مع الرسم البياني المرتبط. النتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius (سميث ، 1995 ، النتيجة الطبيعية 3.2) تظهر أن المصفوفة R لها قيمة ذاتية حقيقية simple بسيطة ، أكبر بدقة من الجزء الحقيقي من جميع القيم الذاتية الأخرى ، ومع المتحدثة الذاتية المرتبطة بها بمكونات إيجابية للغاية. إذا كان $\mathbf{1}$ هو متجه الخط [1،1 ،... ، 1] بالحجم $2N$ ، إذن

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \ldots, 0, 0].$$

وفقًا لـ (Berman and Plemmons، 1994، Theorem 6.2.3، L33) ، لدينا $\lambda < 0$. يتم تحديد $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \ldots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ المتجه الذاتي لـ M المرتبط بالقيمة الذاتية λ: $M\pi = \lambda\pi$. بعبارات أخرى،

$$\lambda\,\pi_{n,1} = -\left[a_1 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_1\right]\pi_{n,1} + b(n+1)\pi_{n+1,1} + a_1(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})\pi_{n-1,1} + q_2\,\pi_{n,2} \tag{6}$$

$$\lambda\,\pi_{n,2} = -\left[a_2 n(1-\tfrac{n}{N}) + b\,n + q_2\right]\pi_{n,2} + b(n+1)\pi_{n+1,2} + a_2(n-1)(1-\tfrac{n-1}{N})\pi_{n-1,2} + q_1\,\pi_{n,1}. \tag{7}$$

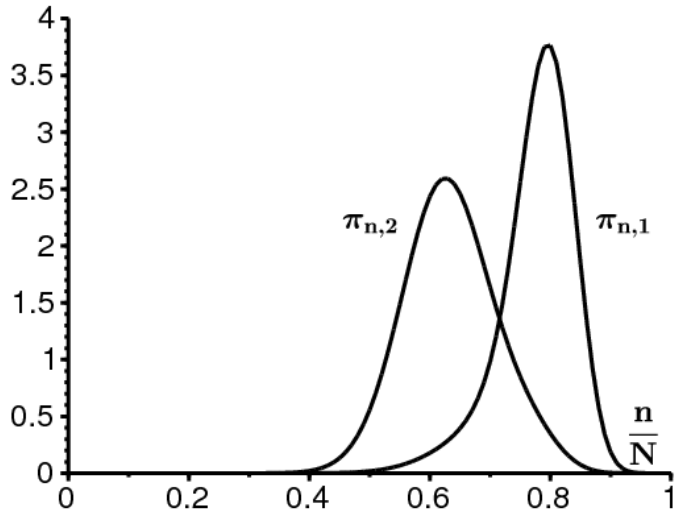
دعونا تطبيع المتجه الذاتي من خلال فرض سبيل المثال

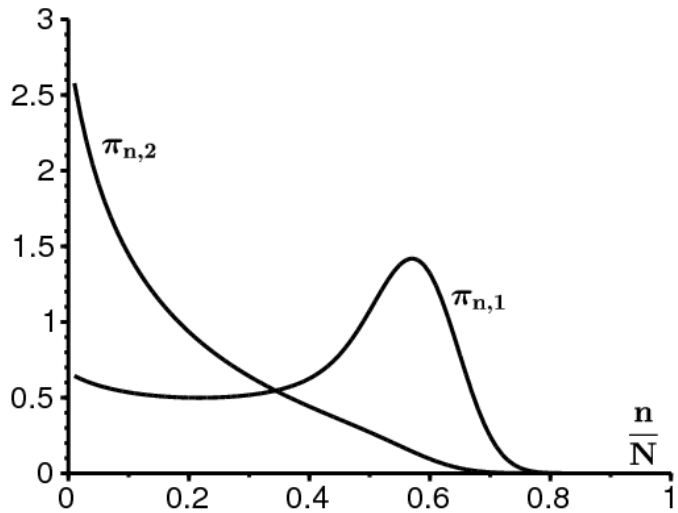
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2}) = 1.$$

يظهر الشكل 1 $\pi_{n,1}$ و $\pi_{n,2}$ كدالة n/N مع $n \geq 1$ في حالتين: حالة $R_0 > 1$ و $a_1 > a_2 > b$، حالة حيث $R_0 > 1$ و $a_1 > b > a_2$. يتم حساب المتجه الذاتي with مع برنامج Scilab. ذروة $\pi_{n,1}$ قريب من $x_1 = 1 - b/a_1$، كما تتوقعون عند التفكير في المعادلة الميدانية متوسط لنسبة ط المصابين

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

في الواقع x_1 هي حالة التوازن المستقرة الوحيدة لهذه المعادلة. ذروة $\pi_{n,2}$ قريب من $x_2 = 1 - b/a_2$ إذا $a_2 > b$ وقريبة من $x = 0$ إذا $a_2 < b$.





الشكل 1. المكونات $\pi_{n,1}$ و $\pi_{n,2}$ مع $n \geq 1$ من المتجه الذاتي π كدالة n/N عندما $N = 100$ ، $q_1 = 1$ و $q_2 = 1$. قيم المعلمات الأخرى: $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ ، ب) $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$.

دعونا نحدد

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \ldots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \ldots, T_{N,1}, T_{N,2})$.

يمكن كتابة النظام الخطي (1) - (2) في النموذج

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \tfrac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1})\,, \tag{8}$$
$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \tfrac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2})\,. \tag{9}$$

الأنظمة (8) - (9) و (6) - (7) تظهر ذلك

$$-\mathbf{1}^* = R^*\hat{T}, \quad \lambda\hat{\pi} = R\hat{\pi},$$

حيث يشير النجم * إلى تبديل المتجهات أو المصفوفات. من خلال أخذ منتج النقطة المعتاد ، نحصل على $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi}\rangle = \langle R^*\hat{T}, \hat{\pi}\rangle = \langle \hat{T}, R\hat{\pi}\rangle = \lambda\langle \hat{T}, \hat{\pi}\rangle$. اذا لدينا

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi}\rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi}\rangle}\,.$$

بعبارات أخرى، $-1/\lambda$ هو مزيج خطي من $(T_{n,j})$ مع $n \geq 1$ و $j = 1, 2$. في ما يلي ، نحن مهتمون بشكل رئيسي بـ λ. ندرس $(T_{n,j})$ في القسم 7 من خلال المحاكاة العددية.

3. تقريب BKW

القضية $x > x_1 = 1 - b/a_1$. مع $R_0 > 1$ ، نخمن ذلك $\lambda \to 0$ إذا $N \to +\infty$. سوف نتحقق من الخلفية ، كما فعلنا على سبيل المثال (Meerson and Sasorov، 2008) لنموذج مختلف ، وهذا هو الحال بالفعل. وهكذا يمكن إهمال الجانب الأيسر من (6) - (7). مع $x > x_1$ ، دعنا نبحث عن تقريب BKW (Bender and Orszag ، 1978) للنموذج

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N}\, e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

مع $x = n/N$. تطوير تايلور من أجل 2 ل$S(x)$ ومن أجل 1 ل $\Sigma(x)$ يقترح أن

$$\pi_{n\pm1,1} \simeq e^{-NS(x)\mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

نحصل عليها عن طريق استبدال (6) وتبسيط بواسطة $e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 \simeq\, & a_1 N(x - \tfrac{1}{N})(1 - x + \tfrac{1}{N}) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x(1-x) \\ & + bN(x + \tfrac{1}{N}) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - bNx - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}\,. \end{aligned}$$

التعبيرات في $O(N)$ تعطي

$$0 \simeq Nx\left[e^{S'(x)} - 1\right]\left[a_1(1-x) - be^{-S'(x)}\right].$$

المصطلح الأول بين قوسين معقوفين فارغ فقط للوظائف الثابتة $S(x)$. اختر الحل الذي يلغي المصطلح الثاني بين قوسين معقوفين

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1(1-x)},$$

ذلك بالقول

$$S(x) = s_1(x) = x\log(b/a_1) + x + (1-x)\log(1-x)$$

باستثناء ثابت مضافة. هذا يعني $S''(x) = \frac{1}{1-x}$. الوظيفة $\Sigma(x)$ يتم الحصول عليها بالتعابير الواردة في $O(1)$:

$$0 \simeq a_1 N\left[x(1-x)+\frac{2x-1}{N}\right]e^{S'(x)}\left[1+\frac{S''(x)}{2N}+\frac{\Sigma'(x)}{N}\right]-a_1Nx(1-x)$$
$$+bN(x+\tfrac{1}{N})e^{-S'(x)}\left[1-\frac{S''(x)}{2N}-\frac{\Sigma'(x)}{N}\right]-bNx-q_1\,.$$

بتعويض $S(x)$ من خلال التعبير ، نحصل

$$\Sigma'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1/2}{1-x}+\frac{q_1}{a_1-b}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x}\right),$$
$$\Sigma(x)=\sigma_1(x)=\log\left(x\sqrt{1-x}\left[\frac{x-x_1}{x}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}}\right).$$

الوظيفة $c(x)$ في $\pi_{n,2}$تم الحصول عليه من (7). شكل $\pi_{n,2}$ تم اختياره لضمان التوازن بين التعبيرات المختلفة. في الواقع ، يعطي أعلى ترتيب

$$0\simeq\frac{c(x)}{N}\left\{Na_2x(1-x)\left[e^{S'(x)}-1\right]+bNx\left(e^{-S'(x)}-1\right)\right\}+q_1\,.$$

بتعويض $S(x)$ من خلال التعبير ، نحصل

$$c(x)\simeq\frac{q_1}{(a_1-a_2)x(x-x_1)}\,.$$

باختصار ، نحن نتخمين $x>x_1$،

$$\pi_{n,1}\simeq k_1\,e^{-Ns_1(x)-\sigma_1(x)},\quad \pi_{n,2}\simeq\frac{q_1\,\pi_{n,1}}{N(a_1-a_2)x(x-x_1)}\,, \tag{10}$$

لثابت معين k_1. النظر على وجه الخصوص في سلوك$\pi_{n,1}$ وبناءا على $\pi_{n,2}$ إلى عن على $x>x_1$ و x قريب x_1. دعونا نحدد $c_1=b/a_1-1-\log(b/a_1)$. نملك$s_1'(x_1)=0$. يعطي تطوير تايلور

$$s_1(x)\simeq s_1(x_1)+s_1''(x_1)(x-x_1)^2/2\simeq -c_1+\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2.$$

لقد فعلنا ذلك

$$\pi_{n,1}\simeq k_1\frac{e^{Nc_1-N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2}\,x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1}\,(x-x_1)^{\frac{q_1}{a_1-b}}}\,,\quad \pi_{n,2}\simeq\frac{q_1\,\pi_{n,1}}{N(a_1-a_2)x_1(x-x_1)}\,. \tag{11}$$

القضية $x<x_2=1-b/a_2$ ***إذا*** $a_1>a_2>b$. بشكل متماثل ، دعونا نبحث عن حل إذا$a_2>b$

$$\pi_{n,2}=e^{-NS(x)-\Sigma(x)},\quad \pi_{n,1}=\frac{c(x)}{N}\,e^{-NS(x)-\Sigma(x)},\quad x<x_2=1-b/a_2.$$

النظام (6) - (7) يؤدي ، كما سبق ، إلى

$$S(x)=s_2(x)=x\log(b/a_2)+x+(1-x)\log(1-x)$$

باستثناء ثابت مضافة بينما

$$\Sigma(x)=\sigma_2(x)=\log\left(x\sqrt{1-x}\left[\frac{x_2-x}{x}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}}\right),\quad c(x)\simeq\frac{q_2}{(a_1-a_2)x(x_2-x)}\,.$$

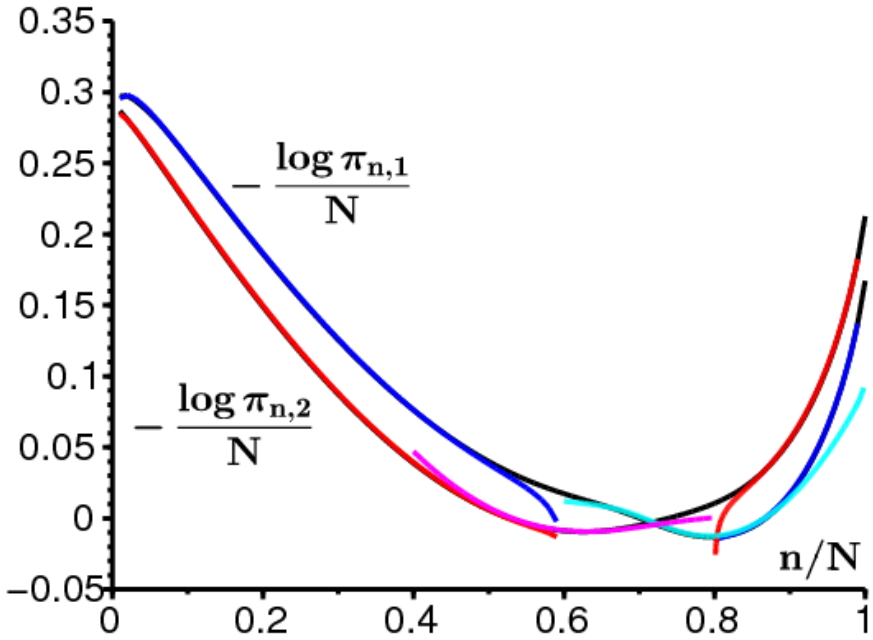
باختصار ، نحن نتخمين $x<x_2$،

$$\pi_{n,2} \simeq k_2\, e^{-Ns_2(x)-\sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2\, \pi_{n,2}}{N(a_1-a_2)x(x_2-x)}\,, \tag{12}$$

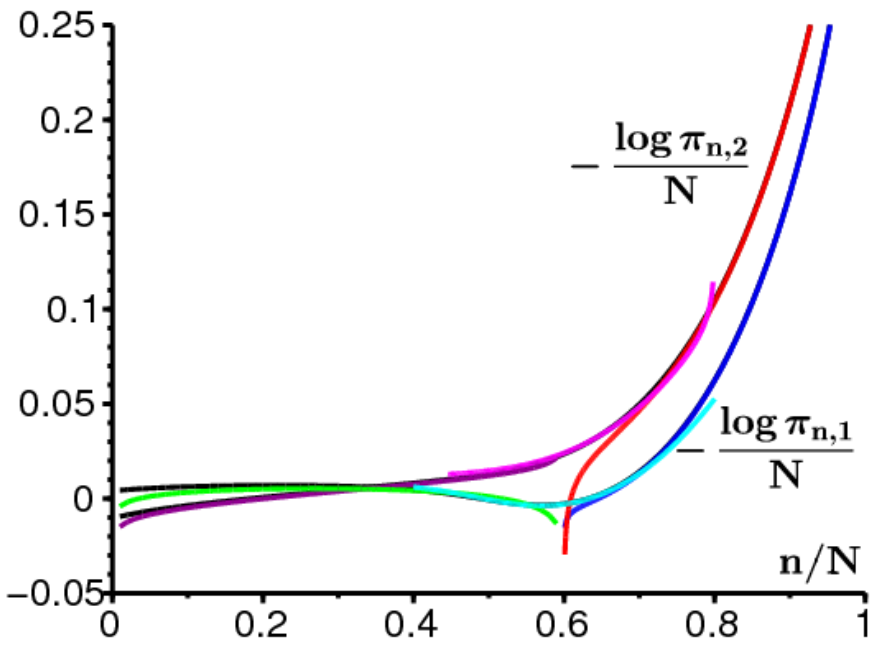
لثابت معين k_2. مع $x < x_2$ و x قريب x_2،

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2}\, x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2}\,(x_2-x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}\,, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2\, \pi_{n,2}}{N(a_1-a_2)x_2(x_2-x)}\,. \tag{13}$$

يوضح الشكلان 2 و 3 $-(\log \pi_{n,1})/N$ و $-(\log \pi_{n,2})/N$ من ناحية n/N مع $1 \le n \le N$, $\pi_{n,i}$ يتم حسابه باستخدام النظام (6) - (7). كما توضح الأشكال التقريبية (10) و (12) باللون الأزرق الداكن والأحمر. ثابت k_1 يتم اختيار (10) بحيث $\pi_{n,1}$ يتزامن مع تقريبه لـ $n = N\text{-}1$. ثابت k_2 في (12) يحددها k_1 كما هو موضح في القسم 5 أدناه.



الشكل 2. الشكل مع $a_1 > a_2 > b$. باللون الأسود ، تحت المنحنيات الأخرى: $-(\log \pi_{n,1})/N$ و $-(\log \pi_{n,2})/N$ من ناحية $x = n/N$.
$\pi_{n,1}$: باللون الأزرق الداكن ، تقريب (10) إذا $x > x_1$ و (12) إذا $x < x_2$; باللون الأزرق الفاتح ، التقريب المنتشر (25) إذا $x \simeq x_1$.
$\pi_{n,2}$: باللون الأحمر ، تقريب (10) إذا $x > x_1$ و (12) إذا $x < x_2$; باللون الوردي ، التقريب المنتشر (31) إذا $x \simeq x_2$.



الشكل 3. المثال مع $a_1 > b > a_2$. باللون الأسود ، تحت المنحنيات الأخرى: $-(\log \pi_{n,1})/N$ و $-(\log \pi_{n,2})/N$ من ناحية $x = n/N$.
$\pi_{n,1}$: باللون الأزرق الداكن ، التقريب (10) إذا $x > x_1$; باللون الأخضر ، تقريب (20) إذا $x < x_1$; باللون الأزرق الفاتح ، التقريب المنتشر (25) إذا $x \simeq x_1$.
$\pi_{n,2}$: باللون الأحمر ، التقريب (10) إذا $x > x_1$; باللون الأرجواني ، تقريب (19) إذا $x < x_1$; باللون الوردي ، التقريب المنتشر (31) إذا $x \simeq x_1$.

4 التقريب في مجال التباين البطيء

نحن نبحث عن تقريب $\pi_{n,1}$ و $\pi_{n,2}$ في $x_2 < x < x_1$ إذا $a_1 > a_2 > b$ و في $0 < x < x_1$ إذا $a_1 > b > a_2$. خلال هذه الفترات ، $S(x) = 0$. لنأخذ في الاعتبار النظام (6) - (7) ونحاول تقريبًا تقريبًا مستمرًا $\pi_{n,1} \simeq y(x)$ ، $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ مع $x = n/N$. يعطي تطوير تايلور

$$\pi_{n\pm1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}\,.$$

مع $\lambda \approx 0$ ، يؤدي هذا إلى تقريب الانتشار

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_1x(1-x))y\right] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N}\frac{d^2}{dx^2}\left[(a_1x(1-x) + bx)y\right] \tag{14}$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_2x(1-x))z\right] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N}\frac{d^2}{dx^2}\left[(a_2x(1-x) + bx)z\right]. \tag{15}$$

بإهمال $N/1$ ، نحصل على المعادلات

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_1x(1-x))y(x)\right] - q_1y(x) + q_2z(x) \tag{16}$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx}\left[(bx - a_2x(1-x))z(x)\right] - q_2z(x) + q_1y(x)\,, \tag{17}$$

وهي من نفس شكل المعادلات (29) - (30) من (Slatkin، 1978). بإضافة المعادلتين (16) و (17) نجد

$$\frac{d}{dx}\left[(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)\right] \simeq 0\,.$$

وبالتالي فإن الوظيفة بين الأقواس المربعة ثابتة. لأن x عاملاً ، هذا يوحي بالعمل $x \to 0$ أن هذا الثابت صفر:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0\,. \tag{18}$$

هذا يسمح بالتعبير $y(x)$ من ناحية $z(x)$. من خلال استبدال (17) ، نحصل على بعد قليل من التلاعب

$$\frac{1}{z(x)}\frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)}\,,$$
$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)}\left(\frac{a_1(1-x)-b}{x}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{b-a_2(1-x)}{x}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \tag{19}$$

بالنسبة لبعض مستمر C . يظهر هذا التقريب باللون الأرجواني في الشكل 3. يتم تحديد الثابت C بواسطة k_1 كما هو موضح في القسم 5 أدناه. ثم تظهر المعادلتان (18) و (19) ذلك

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx}\left(\frac{a_1(1-x)-b}{x}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{b-a_2(1-x)}{x}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}\,. \tag{20}$$

يظهر هذا التقريب باللون الأخضر في الشكل 3. إذا $x \simeq x_1$ مع $x < x_1$، نحصل

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1x_1}\left(\frac{a_1}{x_1}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{b-a_2(1-x_1)}{x_1}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}(x_1-x)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\,. \tag{21}$$

في الحالة $a_1 > b > a_2$ نجد ل x 0

$$y(x) \sim C\,(a_1-b)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\,(b-a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}}\,x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}} \tag{22}$$
$$z(x) \sim C\,(a_1-b)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\,(b-a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\,x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}}\,. \tag{23}$$

نحن نتذكر $\frac{q_1}{a_1-b} < \frac{q_2}{b-a_2} \Leftrightarrow R_0 = \frac{a_1q_2+a_2q_1}{b(q_1+q_2)} > 1$ في هذه الحالة. على وجه الخصوص ، لا يتجزأ من $z(x)$ في حي 0^+ متقارب. في الحالة $a_1 > a_2 > b$ ثم يظهر (19)

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2\,x_2}\left(\frac{a_1(1-x_2)-b}{x_2}\right)^{\frac{q_1}{a_1-b}}\left(\frac{a_2}{x_2}\right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}(x-x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \tag{24}$$

قريب من x_2 مع $x > x_2$.

5 تقريب ناشر x_1 و x_2

الوضع قريب x_1. قريب من $x = x_1$ و $x = x_2$، لم يعد بالإمكان تجاهل الانتشار في (14) - (15). تحليل المناطق الانتقالية في x_1 و x_2 يجب أن تجعل من الممكن ربط الثابت C في (21) و (24) بالثوابت k_1 من (10) و k_2 من (12). دعونا نحدد $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$. ثم يمكن تقريب معامل مشتق الطلب 1 في (14) من خلال توسيع تايلور من النظام 1

$$0 \simeq (a_1-b)\frac{d}{d\xi_1}[\xi_1 y] - q_1y + q_2z + b(1-b/a_1)\frac{d^2y}{d\xi_1^2}\,.$$

نحن نهمل q_2z أمام q_1y إذا $x \simeq x_1$:

$$0 \simeq \frac{b}{a_1}\frac{d^2y}{d\xi_1^2} + \xi_1\frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1-b}\right)y\,.$$

مع

$$\eta_1 = \xi_1\sqrt{\frac{a_1}{2b}}\,, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2}Y(\eta_1) \tag{25}$$

لدينا معادلة تفاضلية الهرميت

$$0 \simeq \tfrac{1}{2}\frac{d^2Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y\,.$$

نحن نبحث عن حل على شكل سلسلة كاملة

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n\,.$$

نحصل على علاقة التكرار

$$w_{n+2} = \frac{2(n+2\alpha_1)}{(n+2)(n+1)}\, w_n\,,$$

مع $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$. وبالتالي لدينا حلان مستقلان خطيا

$$Y(\eta_1) = \gamma_1\, \Phi(\alpha_1, \tfrac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2\, \eta_1\, \Phi(\alpha_1 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; \eta_1^2)\,.$$

γ_1 و γ_2 هي ثوابت و

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$$

هي وظيفة ملتف هندسية مفرطة من كومر. حسب (Maroni، 1997، المعادلة (93)) لدينا $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\, e^z\, z^{\alpha-\beta}$ إذا $z \to +\infty$، حيث Γ هي دالة جاما أويلر. لقد فعلنا ذلك

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1 - 1} \left(\frac{\gamma_1\, \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2\, \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta \to -\infty.$$

$y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ لديه نفس السلوك المقارب (21) عندما $\eta_1 \to -\infty$، بشرط

$$\left[\sqrt{\frac{N a_1}{2b}}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \left(\frac{\gamma_1\, \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2\, \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C\,(b - a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}}\; x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{26}$$

إذا كان على العكس $\eta_1 \to +\infty$، (11) يقترح ذلك $Y(\eta_1)$ يجب أن تتصرف على أنها ثابتة معينة مضروبة في $\eta_1^{-2\alpha_1}$. تُظهر نظرية وظائف الهندسة المتراكبة الملتفة (ماروني ، 1997) أنه من الضروري فرضها

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})}\, K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)}\, K \tag{27}$$

للحصول على K ثابت معين للحصول على مثل هذا السلوك المقارب. في الواقع ، لدينا بعد ذلك

$$Y(\eta_1) = K \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})}\, \Phi(\alpha_1, \tfrac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)}\, \eta_1\, \Phi(\alpha_1 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \tag{28}$$

ذلك بالقول $Y(\eta_1) = K\, \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$ إلى عن على $\eta_1 > 0$. $\Psi(\alpha, \beta; z)$ هي وظيفة ملتف للهندسة المفرطة لـ Tricomi التي تحددها

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)}\, \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta - 1)}{\Gamma(\alpha)}\, z^{1-\beta} \Phi(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta; z)\,.$$

حسب (Maroni، 1997، المعادلة (90)) لدينا $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$ إذا $z \to +\infty$. اذا لدينا $Y(\eta_1) \sim K\, \eta_1^{-2\alpha_1}$ إذا $\eta_1 \to +\infty$.

أي ما يعادل $e^{-\eta_1^2}Y(\eta_1)$ ثم يتزامن مع (11) بشرط ذلك

$$K\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1\,\frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}}\,x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\,. \tag{29}$$

وخلاصة القول ، العلاقات (26) و (27) و (29) تحدد K، γ_1، γ_2 و C من ناحية k_1. على وجه الخصوص ، لأن$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ، $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، المعادلة (26) تعطي

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}}\right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}\frac{2\pi\,K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2})} = \frac{C\,(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}}\,x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{30}$$

يمكن الحصول على نموذج بديل باستخدام صيغة Legendre-Gauss $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}}\Gamma(2\alpha_1)$.

الوضع قريب x_2. في الحالة $a_2 > b$ نقوم بتحليل مشابه مع (15) قريب من $x = x_2 = 1 - b/a_2$. نحن نهمل $q_1 y$ أمام $q_2 z$. مع

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2\sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2}Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

نملك

$$Z(\eta_2) = \delta_1\,\Phi(\alpha_2,\tfrac{1}{2};\eta_2^2) + \delta_2\,\eta_2\,\Phi(\alpha_2+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};\eta_2^2). \tag{31}$$

δ_1 و δ_2هي ثوابت. سلوك$\eta_2 \to +\infty$ يتزامن مع (24) بشرط أن

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\left(\frac{\delta_1\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})}\right) = \frac{C\,[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}}\,x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{32}$$

دعونا نحدد

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})}\,\hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)}\,\hat{K} \tag{33}$$

لثابت معين $\hat{K}$ (لاحظ علامة الطرح δ_2). لدينا بعد ذلك$Z(\eta_2) = \hat{K}\,\Psi(\alpha_2,\frac{1}{2};\eta_2^2)$ إذا $\eta_2 < 0$. اذا لدينا $e^{-\eta_2^2}Z(\eta_2) \sim \hat{K}\,e^{-\eta_2^2}|\eta_2|^{-2\alpha_2}$ إذا $\eta_2 \to -\infty$. يتزامن ذلك مع (13) بشرط أن

$$\hat{K}\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2\,\frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}}\,x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\,. \tag{34}$$

كما ورد أعلاه (32) و (33) يعطي

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}\frac{2\pi\,\hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2+\frac{1}{2})} = \frac{C\,[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}}\,x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}\,. \tag{35}$$

إذن الثوابت k_2، $\hat{K}$، δ_1 و δ_2هي التي تحدد ثابت C .

6 القيمة الذاتية للنظام

نملك $M\pi = \lambda\pi$. بإضافة جميع خطوط نظام المعادلات هذا نحصل عليه$\lambda\sum_{n=0}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2}) = 0$. لكن$\lambda < 0$. اذا لدينا

$$\sum_{n=0}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})=0.$$

أول سطرين من النظام

$$\begin{aligned}\lambda\,\pi_{0,1}&=-q_1\,\pi_{0,1}+q_2\,\pi_{0,2}+b\,\pi_{1,1}\,,\\ \lambda\,\pi_{0,2}&=-q_2\,\pi_{0,2}+q_1\,\pi_{0,1}+b\,\pi_{1,2}\,.\end{aligned}$$

من خلال إضافتها ، نجد

$$\lambda=b\,\frac{\pi_{1,1}+\pi_{1,2}}{\pi_{0,1}+\pi_{0,2}}=-b\,\frac{\pi_{1,1}+\pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^{N}(\pi_{n,1}+\pi_{n,2})}\,. \tag{36}$$

دعونا ننظر أولاً في الحالة حيث $a_1>b>a_2$ مع $R_0>1$. لذلك (19) يظهر

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,2}\simeq\int_0^{x_1}z(x)\,dx\simeq\kappa_1\,C.$$

κ_1غير مستقلة ثابت الإيجابي لل N . باستخدام حقيقة أن ذروة$\pi_{n,1}$ قريب من $x=n/N=x_1$ والعلاقات (25) و (28) و (30) نجد

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,1}\simeq\int_{-\infty}^{+\infty}y(\eta_1)\,d\eta_1\,\frac{dx}{d\eta_1}\simeq\kappa_2\frac{K}{\sqrt{N}}\simeq\kappa_3\,C\,N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}\,, \tag{37}$$

أين ال κ_j(فوق وتحت) لا تزال الثوابت الإيجابية، والتي هي مستقلة عن N . لذا فإن المصطلح السائد لـ N Large في مقام (36) هو المصطلح$\pi_{n,2}$. في البسط ،$\pi_{1,1}\simeq y(\frac{1}{N})$ و $\pi_{1,2}\simeq z(\frac{1}{N})$. $y(x)$ و $z(x)$تعطى من (22) - (23). نحصل

$$\lambda\simeq-\kappa_4\,\frac{(\frac{1}{N})^{\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{N}\simeq-\kappa_4\,N^{-\frac{q_2}{b-a_2}+\frac{q_1}{a_1-b}}\,.$$

بعبارات أخرى، $1/\lambda-$يزيد مع N كقانون سلطة ، الذي يكون أسه

$$\omega=\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}>0,$$

كما أعلن في المقدمة. علاوة على ذلك ، نلاحظ أن ω يتجه نحو$+\infty$ إذا a_2تتحول إلى b بقيم أقل.

الآن النظر في الحالة حيث $a_1>a_2>b$. للتبسيط ، دعنا نعرض الترميز$f\approx g$ (يجب عدم الخلط بينه وبين الرمز غير الرسمي $\simeq$ المستخدمة أعلاه) إذا $(\log f)/N-(\log g)/N\to 0$ إذا $N\to+\infty$. بالخصوص $N^{\beta}\approx 1$ للجميع β. ثم (12) مع س = 1 / ن يظهر ذلك$\pi_{1,1}\approx\pi_{1,2}$. علاوة على ذلك،

$$\pi_{1,2}\approx k_2\,e^{-Ns_2(1/N)}\approx k_2\,e^{-s_2'(0)}\approx k_2.$$

علاوة على ذلك ، ذروة $\pi_{n,1}$ قريب من $x=n/N=x_1$ بينما هذا $\pi_{n,2}$ قريب من x_2. وهكذا (37) لا تزال صالحة وتظهر

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,1}\approx C,$$

بينما (31) و (33) و (35) يعطون

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,2}\simeq\int_{-\infty}^{+\infty}z(\eta_2)\,d\eta_2\,\frac{dx}{d\eta_2}\simeq\kappa_5\frac{\hat{K}}{\sqrt{N}}\simeq\kappa_5\,C\,N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}}\approx C\,.$$

ولكن (34) و (35) تظهر

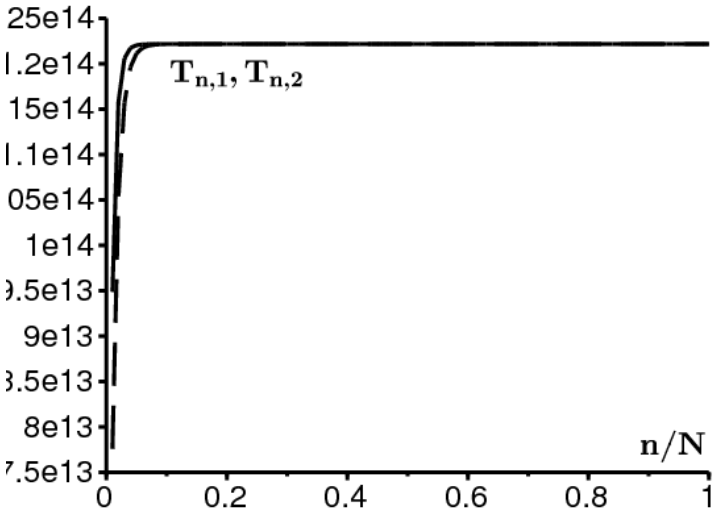
$$C\approx\hat{K}\approx k_2\,e^{Nc_2}.$$

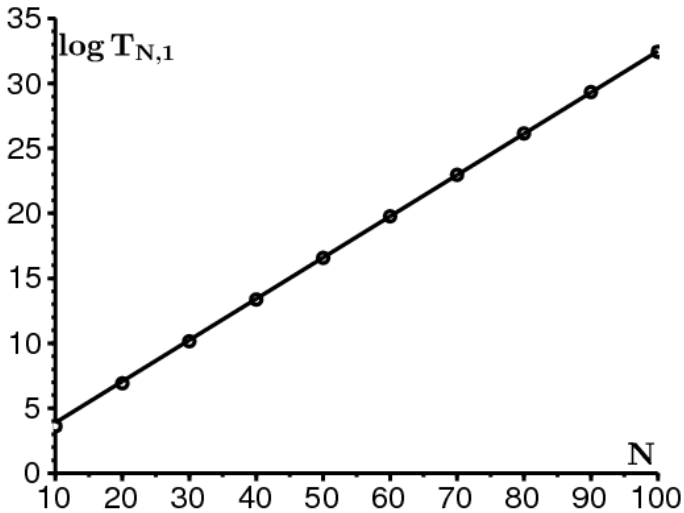
وهكذا (36) يعطي $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$ و $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$. أخيرا، $-1/\lambda$ ينمو بشكل كبير مع المعلمة c_2.

7 متوسط الوقت للانقراض

يمكن حل النظام الخطي (8) - (9) بالطريقة العددية المقدمة من (Artalejo et al.، 2013). تستخدم الطريقة مصفوفات مربعة فقط من الترتيب 2 وتقلل من عدم الاستقرار العددي. نذكر أن $q_1 = q_2 = 1$ و $b = 2$.

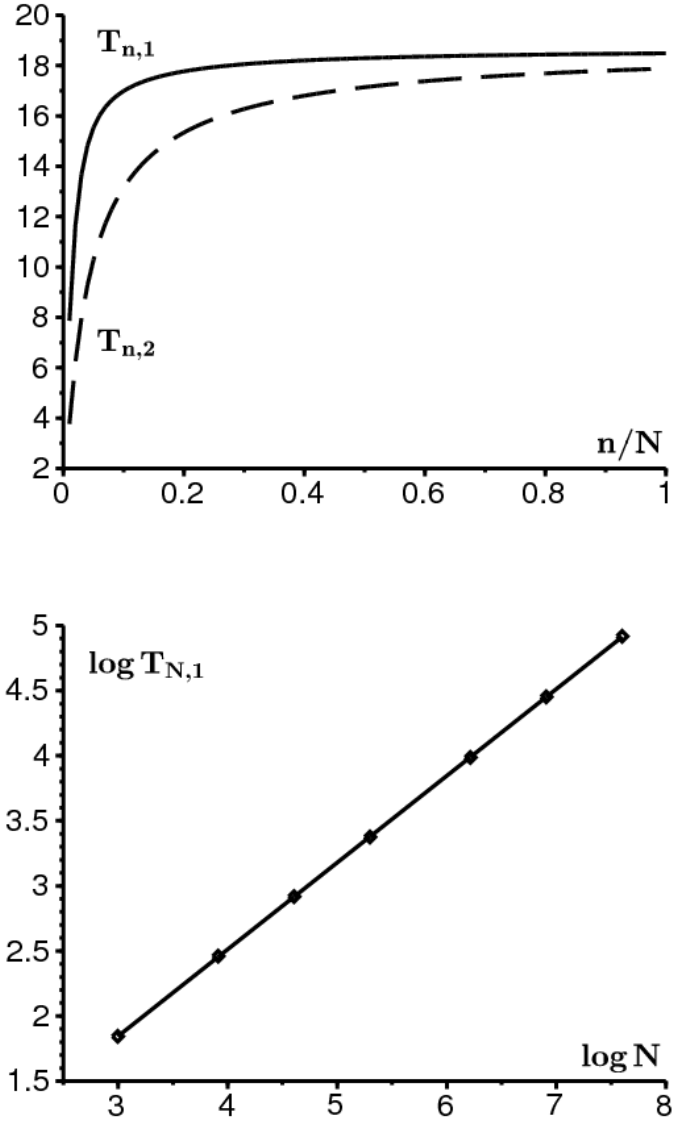
المثال الأول: $a_1 > a_2 > b$. لنأخذ $a_1 = 10$ و $a_2 = 5$. ويبين الشكل 4 أ $T_{n,1}$ و $T_{n,2}$ من ناحية $x = n/N$. يقترح الشكل 4 ب أن متوسط وقت الانقراض ، على سبيل المثال من المصابين بفيروس N في البيئة 1 ، يزداد بشكل كبير: $T_{N,1} \approx e^{cN}$. يعطي الانحدار الخطي $c \simeq 0.32$. لاحظ أن $c_1 \simeq 0.81$ و $c_2 \simeq 0.32$، مما يوحي بذلك $c = c_2$.





الرقم 4 الشكل $a_1 > a_2 > b$. $a)$ $T_{n,1}$ [خط صلب] و $T_{n,2}$ [خط منقط] اعتمادًا على n/N إذا $N = 100$. ب) $\log T_{N,1}$ من ناحية N.

المثال الثاني : $a_1 > b > a_2$ و $R_0 > 1$. لنأخذ $a_1 = 5$ و $a_2 = 1$. وبالتالي $R_0 = 1.5 > 1$. ويبين الشكل 5 أ $T_{n,1}$ و $T_{n,2}$ من ناحية $x = n/N$. ويبين الشكل 5 ب $\log T_{N,1}$ من ناحية $\log N$. نحصل على خط مستقيم يقترح قانون السلطة $T \sim \kappa N^{\omega}$. المنحدر ، الذي تم الحصول عليه عن طريق الانحدار الخطي ، هو $\omega \simeq 0.67$. في هذه الحالة ، لدينا $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$، والذي يتوافق بشكل جيد مع المنحدر المقاس.

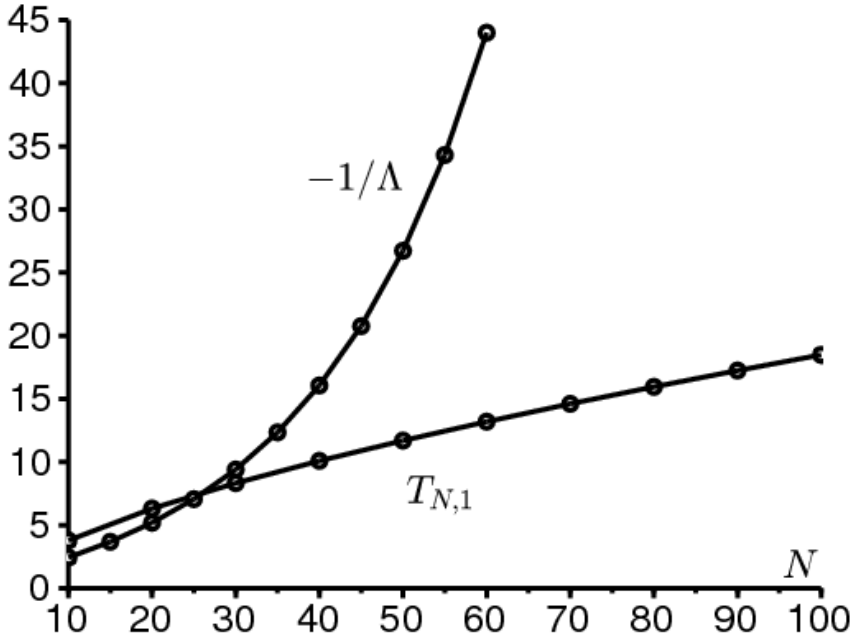


الرقم 5. الشكل $a_1 > b > a_2$ مع $R_0 > 1$. $a)$ $T_{n,1}$ و $T_{n,2}$ من ناحية $x = n/N$ إذا $N = 100$. ب) $\log T_{N,1}$ من ناحية $\log N$.

8 ملاحظات

مقارنة بالحالة الدورية.

لتسليط الضوء على الفرق بين بيئة عشوائية وبيئة دورية ، دعنا نأخذ الحالة $a_1 = 5$ و $a_2 = 1$، في حين $q_1 = q_2 = 1$ و $b = 2$. لدينا بعد ذلك$u_1 = u_2 = 0.5$: تنفق البيئة في المتوسط نصف الوقت في الحالة 1 ، والنصف الآخر في الحالة 2. يوضح الشكل 6 على جانب واحد كيف $T_{N,1}$يزيد كدالة لـ N كقانون سلطة. من ناحية أخرى ، ضع في اعتبارك نفس نموذج SIS ولكن في بيئة دورية (Bacaër، 2015): دعنا نختار $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ، $a(t) = a_1$ إلى عن على $0 < t < u_1T$ و$a(t) = a_2$ إلى عن على $u_1T < t < T$. بالنسبة لهذا النموذج ، $e^{\Lambda T}$هو مضاعف فلوكيت المرتبط بعملية الانقراض. يوضح الشكل 6 كيف$1/\Lambda -$ ينمو بشكل كبير مع N.



الشكل 6. متوسط الوقت للانقراض $T_{N,1}$ في بيئة عشوائية و $-1/\Lambda$ في بيئة شبه دورية.

معادلات المجال المتوسطة. قد يكون من المفيد أن نتذكر باتباع (Bacaër and Ed-Darraz، 2014) أن متوسط معادلات المجال

$$\frac{dI_1}{dt} = a_1 I_1(1 - \tfrac{I_1}{N}) - bI_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2$$
$$\frac{dI_2}{dt} = a_2 I_2(1 - \tfrac{I_2}{N}) - bI_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,$$

مرة واحدة خطية بالقرب من حالة التوازن (0،0) ، تؤدي إلى المصفوفة اليعقوبية

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

ولكن يمكن أن يكون لدينا في نفس الوقت

- قيمة ذاتية إيجابية تمامًا ، بحيث يكون التوازن التافه غير مستقر ،
- $R_0 < 1$.

حد آخر. النتائج التي تم الحصول عليها تعتبر أن المعلماتq_j ، a_j و bيتم إصلاحها بينما N تتقارب إلى ما لا نهاية. الأمور تختلف بشكل واضح إذا على سبيل المثال q_1 و q_2 تتلاقى إلى ما لا نهاية ، بنسبة ثابتة q_1/q_2. ثم يقترب النموذج من نموذج متجانس في بيئة ثابتة بمعامل اتصال متوسط$\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$.

القضية دون الحرجة. لم نعالج القضية دون الحرجة$R_0 < 1$ مع $a_1 > b > a_2$ أو $b > a_1 > a_2$. سلوك متوسط وقت الانقراض يكون تقريبًا هو نفسه كما هو الحال في بيئة ثابتة: بدءًا من جزء ثابت من السكان المصاب ، يكون متوسط الوقت من ترتيب $\log N$ (دورينج وآخرون ، 2005). بدءًا من جزء مصاب $N/1$ ، يتقارب متوسط الوقت على العكس إلى حد. في حالة البيئة العشوائية ، هذا أيضًا ما تقترحه المحاكاة العددية.

9 سلسلة ماركوف مع عدد محدود من الدول

مع J تذكر أن المولد اللامتناهي Q فى حد ذاته $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^{J} Q_{i,j}\ \forall j$. افترض أن هذه المصفوفة$Q$ غير قابل للاختزال وذاك $a_1 > a_2 > \cdots > a_J$. في الحالة $a_J > b$ ، ثم يزيد متوسط وقت الانقراض بشكل كبير تقريبًا مع حجم N من السكان ، بمعدل $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$. والواقع أن الانقراض هو على الأرجح في البيئة J.

إذا ، من ناحية أخرى $b > a_J$ و $R_0 > 1$، ملحوظة $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ مع $x = n/N$. في حي $x = 0$ يصبح النظام (16) - (17)

$$0 \simeq (b-a_j)\frac{d}{dx}(x\,y_j) + \sum_{k=1}^{J} Q_{j,k} y_k\,. \tag{38}$$

البحث عن حل $y_j = \theta_j\, x^{\omega-1}$ مع $\omega > 0$ و $\theta_j > 0$ لكل j ، نجد

$$0 \simeq \omega(b-a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^{J} Q_{j,k}\theta_k\,, \quad 1 \le j \le J.$$

مع تدوينات المقدمة ، لدينا مشكلة القيمة الذاتية المعممة $Q\theta = \omega(A-B)\theta$ مع $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_J)$.

ونحن سوف تظهر

$$\exists!\ \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A-B)\theta, \quad \theta_j > 0\ \forall j.$$

$D = A - B$ هي مصفوفة قطرية. لأي عدد حقيقي s ،

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda);\ \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$ كل معاملاته خارج القطر تكون موجبة أو صفرية. بالإضافة إلى ذلك ، هذه المصفوفة غير قابلة للاختزال. وفقًا للنتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius (سميث ، 1995 ، النتيجة الطبيعية 3.2) ، $\mu(s)$ هو قيمة eigenvalue بسيطة $Q - sD$ (تسمى القيمة الذاتية السائدة) وهناك متجه ذاتي $\phi(s)$ جميع مكوناتها إيجابية للغاية

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

هذا eigenvector فريد من نوعه مع التطبيع

$$\sum_{j=1}^{J} \phi_j(s) = 1.$$

وفقًا للنتيجة الطبيعية نفسها ، وجود ناقل θ مع $\theta_j > 0\ \forall j$ و $(Q - \omega D)\theta = 0$ في الواقع يساوي $\mu(\omega) = 0$. وبالتالي فإن السؤال هو إظهار أن المعادلة $\mu(\omega) = 0$ مع $\omega > 0$ لديها حل فريد.

فيما يتعلق بالوجود ، نلاحظ أولاً أن المولد اللامتناهي Q تتوافق مع $s = 0$: نملك $\mu(0) = 0$ ونلاحظ $u = \phi(0)$ المتجه الذاتي على اليمين. خط متجه $\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]$ هو المتجه الذاتي على يسار Q المرتبطة eigenvalue 0. وهكذا لدينا

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^{J} u_j = 1.$$

وفقا لنظرية اضطراب القيمة الذاتية البسيطة ، الوظيفة $\mu(s)$ يختلف في $s = 0$ و

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

لكن $R_0 > 1 \Leftrightarrow \mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^{J}(a_j - b)u_j > 0$. اذا لدينا $\mu'(0) < 0$. بالإضافة إلى ذلك ، لدينا

$$(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s), \quad \forall s > 0.$$

نملك $Q/s - D \to -D$ إذا $s \to +\infty$. من خلال استمرارية الطيف ،

$$\mu(s)/s \to \max_j(-D_{j,j}) = \max_j(b - a_j) = b - a_J > 0.$$

اذا لدينا $\mu(s) \to +\infty$ إذا $s \to +\infty$. لان $\mu(0) = 0$ و $\mu'(0) < 0$، نستنتج أن هناك $\omega > 0$ مع $\mu(\omega) = 0$.

أما بالنسبة إلى التفرد ، فلنلاحظ أولاً أن الوظيفة $\mu(s)$ هو محدب. في الواقع ، لجميع الأرقام الحقيقية ω_1 ، ω_2 و $0 < \varepsilon < 1$، نحن نرى ذلك $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1-\varepsilon)\omega_2)$ هو القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1-\varepsilon)\omega_2 D$. وفقا لنظرية (كوهين ، 1981) ، فإن هذه القيمة الذاتية أقل من أو تساوي $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1-\varepsilon)\mu(\omega_2)$. هذا يثبت التحدب. افترض الآن أن هناك $\omega_1 > \omega_2 > 0$ مع

$\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$. لان$\mu(0) = 0$ ولأن $\mu(s)$ هو محدب ، نستنتج $\mu(s) = 0$ إلى عن على $0 \le s \le \omega_1$. هذا يتناقض $\mu'(0) < 0$.

$A - B$ هي مصفوفة عكسية إذا $a_j \neq b \ \forall j$. $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ وبالتالي يساوي $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\,\theta$. إذن ω هي القيمة الذاتية لـ$(A - B)^{-1}Q$ الجزء الحقيقي منها هو الأكبر.

وأخيراً تصبح المعادلة (36)

$$\lambda = -b\,\frac{\sum_{j=1}^{J}\pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,j}}\,.$$

في البسط ، لدينا $\pi_{1,j} \simeq \theta_j(1/N)^{\omega-1}$. في المقام ، لدينا

$$\sum_{n=1}^{N}\pi_{n,j} \simeq N\theta_j\int_0^1 x^{\omega-1}\,dx.$$

وبالتالي $1/\lambda$ − يزيد مع N باسمN^{ω}.

من الممكن بلا شك تعميم مثل هذه النتيجة إذا كانت البيئة محكومة مثلاً بمعادلة تفاضلية عشوائية

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

دعونا نحدد L^* عامل التفاضل

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

نحن نفترض ذلك $u(\xi)$ هو احتمال ثابت:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,d\xi = 1.$$

لذا ، في حالة معادلة لانجفين ، لدينا

$$f(\xi) = -k\,\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}}\,e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

نفترض أن معدل الاتصال $a(\cdot)$ هي وظيفة قيد التشغيل $\mathbb{R}$ مع $\min a(\cdot) < b$ و

$$R_0 = \left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a(\xi(t))\,dt\right)/b = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi)\,u(\xi)\,d\xi\right)/b > 1.$$

يزداد متوسط وقت الانقراض مع $N^{\omega}N$ as و ω هو الرقم الموجب الوحيد الذي يستخدمه عامل التفاضل $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$ له قيمة eigenvalue تساوي 0. لتحدب هذه القيمة الذاتية كدالة لـ ωانظر (كاتو ، 1982). لاحظ أن العامل الخطي المساعد هو

$$L = \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi)\frac{d}{d\xi}$$

و $L\mathbf{1} = 0$ إذا $\mathbf{1}$ يدل على دالة ثابتة تساوي 1.

10 بيئة دورية وعشوائية

لنعد إلى حالة مجموعة محدودة من البيئات. نفترض الآن أن المولد اللامتناهي$Q(t)$

- هي وظيفة دورية للفترة $\mathcal{T}$
- هي وظيفة مستمرة أو مجزأة ،

- غير قابل للاختزال على الأقل على مدى t .

يأخذ النظام (4) - (5) الشكل $\frac{dP}{dt} = M(t)P$. باتباع (Bacaër ، 2015) ، ثم هناك زوجين فريدان(λ, π) مع

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0\le n\le N, 1\le j\le J}$ هي وظيفة دورية للفترة $\mathcal{T}$
- $$\lambda\pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$
- $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\pi_{n,j}(t) = 1$$
- $\pi_{n,j}(t) > 0$، $1 \le n \le N$، $1 \le j \le J$.

علاوة على ذلك،

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{J}\pi_{n,j}(t) = 0.$$

هناك أيضا وظيفة فريدة $\mathcal{T}$غير دوري $u(t)$ مع

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^{J} u_j(t) = 1.$$

بصفتنا (Bacaër and Ed-Darraz، 2014) ، نحدد

$$R_0 = (\frac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{J} a_j u_j(t)\,dt)/b.$$

نخمن أنه إذا $a_1 > \ldots > a_J > b$، ثم متوسط الوقت للانقراض لا يزال يزيد بشكل كبير مع N ، بمعدل

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

إذا ، من ناحية أخرى $a_J < b$ لكن $R_0 > 1$التقريب $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t,x)$ يؤدي إلى التعميم (38) في محيط $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j)\frac{\partial}{\partial x}(xy_j) + \sum_{k=1}^{J} Q_{j,k}(t)y_k\,.$$

حل النموذج $y_j(t,x) = \theta_j(t)x^{\omega-1}$، مع وظيفة $\theta(t) = (\theta_j(t))$ $\mathcal{T}$، يجب أن تحقق

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t)\,.$$

هناك رقم حقيقي واحد $\mu(\omega)$ التي $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ هو المضاعف المهيمن فلوكيت للنظام

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

هذه المصفوفة هي وظيفة دورية للفترة $\mathcal{T}$. المعاملات خارج القطر موجبة أو صفرية. المصفوفة غير قابلة للاختزال على مدى t . يمكننا أن نظهر أن هناك فريدة من نوعها$\omega > 0$ مع $\mu(\omega) = 0$. نستخدم كما هو الحال في القسم 9

- محدب $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}}\int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1}Du(t)\,dt < 0$ إذا $R_0 < 1$

- $\mu(\omega) \to +\infty$ إذا $a_J < b$.

لاحظ أن محدب $\mu(\omega)$يتجلى ذلك ببساطة في تعميم حجة (كوهين ، 1981). نستعمل

- التقارب اللوغاريتري لنصف قطر الطيف من المصفوفات مع المعامِلات في مجموعة الدوال الصفرية أو الدائرية المحدبة في ω ، لاحظ $\mathfrak{S}$
- $\mathfrak{S}$ مستقر عن طريق الجمع والضرب والانتقال إلى الحد

(كينجمان ، 1961). في الواقع،$Q(t)$ هي وظيفة دورية مستمرة متقطعة ، يمكن تناولها من خلال وظيفة الخطوة. Q_k هي المصفوفة التقريبية خلال الفترة (τ_k, τ_{k+1}) إلى عن على $k = 0, \ldots, K-1$مع $\tau_0 = 0$ و $\tau_K = \mathcal{T}$. إذا كانت المصفوفة$Q(t)$ كانت هذه وظيفة الدرج ، $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ ستكون مساوية لنصف قطر الطيف لمنتج المصفوفات

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \cdots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

وفقًا لـ (Cohen، 1981) ، فإن كل من هذه المصفوفات لها معاملاتها في $\mathfrak{S}$. لذا فإن منتج المصفوفات هو أيضا مع معاملات في$\mathfrak{S}$. نصف قطرها الطيفي هو محدب لوغاريتم في ω.

لان

$$\lambda = -b \frac{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{J} \pi_{1,j}(t)\, dt}{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=1}^{N} \pi_{n,j}(t)\, dt} ,$$

نستنتج كما كان من قبل $1/\lambda$–ربما يزيد مع N باسمN^{ω}.

شكر

تم تحفيز هذه المقالة من خلال اجتماع في معهد *Ciencias Matemáticas* في مدريد في أكتوبر 2014 ، من خلال محاضرات في جامعة تلمسان في مايو 2015 وندوة في *جامعة نوفا دي لشبونة* في يونيو 2015.

المراجع الببليوغرافية

- Artalejo JR, Economou A, Lopez–Herrero MJ (2013)
  Stochastic epidemic models with random environment :
  quasi–stationarity, extinction and final size. J Math Biol 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed–Darraz A (2014)
  On linear birth–and–death processes in a random environment. J Math Biol 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment.
  J Math Biol 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers.
  McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences.
  Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981)
  Birth and death processes with random environments in continuous time.
  J Appl Probab 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix.
  Proc Amer Math Soc 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes :
  exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation.
  Multiscale Model Simul 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system :
  different predictions between discrete and continuous models. Lett Math Phys 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008)
  How colored environmental noise affects population extinction. Phys Rev Lett 101 : 268103
- Kato T (1982)
  Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type.

Math Z 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices.
  Quart J Math Oxford Ser (2) 12 : 283–284
- Lande R (1993)
  Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random c
  Am Nat 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment.
  J Theor Biol 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction.
  SIAM–AMS Proceedings 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel.
  Éditions Techniques de l′Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise–driven unlimited population growth.
  Phys Rev E 78 : 060103
- Nالىsell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model.
  Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment.
  Ecology 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size.
  Theor Popul Biol 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence