

随机环境中流行病的SIS随机模型

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866

<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, 法国邦迪

皮埃尔和玛丽居里大学, 法国

巴黎科迪耶尔市 nicolas.bacaer@ird.fr

总结

在随机状态下, 即处于两个状态连续时间内的马尔可夫链, 在超临界情况下, 流行病的SIS随机模型灭绝的平均时间相对于种群数量呈指数增长。状态是有利的, 并且根据幂定律, 如果其中一个状态是有利的, 而另一种状态则不利于传播。

1引言

设 N 为人口规模, 假定为常数。在SIS流行病的随机模型中, 每个人都是健康的(S)或被感染的(I) (Nåsell, 2011)。想象一下, 环境在两个时间连续的时间内遵循马尔可夫链。 q_j ($j = 1, 2$) 是状态 j 的退出率。在环境 j 中, 每个人的接触率是 $a_j > 0$ 。如果在 t 瞬间, 被感染的人数为 n , 环境为 j , 则在 t 和 $t + dt$ 之间 (dt 无限小) 发生新感染的概率为 $a_j n(1 - n/N) dt$ 。假设一个人的治愈率 $b > 0$ 在两种环境下都相同。那么, 在人群中重新治愈的可能性为 $bn dt$ 在 t 和 $t + dt$ 之间。(Artalejo et al., 2013) 已经研究了该模型, 但并未达到人口规模 N 变大的程度。此外, 它是马尔可夫环境中生与死过程的特例 (Cogburn and Torrez, 1981)。

让我们定义

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

所以 Q 是无穷小的生成器, 而 u_1 (分别 u_2) 是在环境1 (resp. 2) 中花费的时间比例。对于线性模型, 即参数随机环境中的出生和死亡的线性过程 a_j 和 b , (Bacaër和Ed-Darraz, 2014年) 指出, 几乎可以肯定的是, 当且仅当 $R_0 \leq 1$ 。另一方面, 对于非线性SIS模型, 无论参数值如何, 都将消失。 R_0 。然而, 当人口 N 大, 平均时间灭绝巨大的, 如果 $R_0 > 1$ 如果小 $R_0 < 1$ 。如果 $T_{n,j}$ 是环境 j 中最初有 n 个感染者的平均时间, 然后是 $1 \leq n \leq N$,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

另外 $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$ 。本文的目的是研究超临界情况, 即是否 $R_0 > 1$, 是种群数量 N 变大之前到灭绝的平均时间的行为。

在与接触率在稳定的环境是有 $R_0 = \frac{a}{b} > 1$ (多林等人, 2005, 表1) 示出了平均时间的消光从人口感染分数开始 $X = N/N$ 时增加 $N \rightarrow \infty$ 与 x 无关, 例如 $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$, 在哪里 $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ 。换言之, 平均时间与生长几乎呈指数 \tilde{N} 。(Bacaër, 2015) 提出了一个类似的结果, 即环境是周期性的, 即使没有明确的增长参数 c 公式。

在超临界随机环境中，即 $R_0 > 1$ ，以下文章建议应区分两种情况：一种高度超临界的情况，其中 $a_1 > a_2 > b$ 还有一个超临界的情况 $a_1 > b > a_2$ 。在高度超临界的情况下 $a_1 > a_2 > b$ ，我们推测，到灭绝的平均时间随着 N 与参数的增加成指数增长。 $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$ 。更确切地说，该平均时间的对数除以 N ，收敛为 c_2 。因此，渐近行为与环境在状态2中处于受阻状态相同，也就是说，最不利于流行病传播的环境和优先发生灭绝的环境。

但是，如果 $a_1 > b > a_2$ 和 $R_0 > 1$ ，那么我们推测灭绝的平均时间随着 N^ω 与

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

在这种情况下， $R_0 > 1$ 相当于 $\omega > 0$ 。凭直觉，有时会长时间处于状态2。该持续时间大于 τ 的概率为 $e^{-q_2\tau}$ 。在状态2中， N 大的平均消光时间约为 $\tau \simeq \frac{\log N}{b - a_2}$ (Doering等, 2005)；这也可以从拟灭绝方程中猜出 $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$ 。因此，最终在状态2的某个时期内灭绝的概率约为 $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$ 。这表明灭绝的平均时间是倒数的数量级，即 $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$ 。根据我们的分析，数量级实际上是 N^ω 用 (3) 给出的 ω 。

另请注意，如果 q_1 和 q_2 乘以 $1 + \varepsilon$ 与 $\varepsilon > 0$ ，然后 R_0 保持不变，但 ω 乘以 $1 + \varepsilon$ ：在此模型中，环境变异性增加会延长平均灭绝时间。

这项法律 N^ω 似乎能够在具有 J 状态的环境下进行概括

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

我们有

$$R_0 = \left(\sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

如果 Q 是无穷小生成器并且 u 是唯一的向量

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(Bacaër和Ed-Darraz, 2014年)。令 A 和 B 表示对角矩阵 $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$ 和 $\text{diag}(b, \dots, b)$ 。考虑光谱范围

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

在哪里 $\sigma(\cdot)$ 表示矩阵的光谱，并且 $\Re(\cdot)$ 复数的实部。我们展示

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

然后，我们推测灭绝的平均时间随着 N^ω 。在特定情况下 $a_j \neq b$ 对于所有 j ，数 ω 只是矩阵最大实部的特征值 $(A - B)^{-1}Q$ 。其自己的值的这种矩阵和表达由 ω (3) 给定的我 = 2 已经在 (锯工和斯莱特金, 1981, 方程 (14) 和 (20)) 在没有人口统计随机性群模型亚临界情况 ($R_0 < 1$)；在这种情况下，平均时间直至消光然而随着所述对数 \tilde{N} 。

一些作者发现了布朗随机环境下种群模型中平均灭绝时间的幂定律 (Ludwig, 1976；Leigh, 1981；Lande, 1993)。他们以扩散方程为起点。但是，(Gaveau等, 1996) 和 (Doering等, 2005) 表明，该方程导致参数 c 的公式不精确。确实，这个方程并不总是很好地表示准平稳分布的尾部，而这恰恰是研究灭绝过程的最重要部分。但是请注意，(Kamenev等人, 2008) 使用路径积分解决了随机环境中具有色噪声的种群的灭绝问题。

第2节介绍了模型的准平稳分布。第3节使用布里渊，克莱默斯和温策尔 (BKW) 的方法在参数 $x = n/N$ 的区域中获得有效的近似值，其中分布迅速变化。第4节在分布变化缓慢的区域中使用了另一个近似值。第5节使用扩散方程来连接之前的两个近似值：Kummer和Tricomi的合流超几何函数在这里取代了特别由 (Meerson和Sasorov, 2008) 使用的高斯误差函数。第6节估计与准平稳分布相关的特征值。

尚未严格获得这些近似值，但第7节仍提供了数值模拟，该数值模拟似乎证实了在强超临界情况下的指数定律和在弱超临界情况下的幂定律的指数值。第8节增加了一些说明。特别是，我们在弱超临界状态下比较了马氏环境和周期环境处于相同时间比例处于有利或不利状态的情况：第一种情况导致平均时间的幂定律直到灭绝，第二次成为指数定律。第9节考虑了状态有限的马尔可夫链的情况，并讨论了其他概括。

2 准平稳分布

考虑在时间 t ，在环境中存在 n 个感染者的概率： $p_{n,j}(t)$ 。所以

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - \left[a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] p_{n,1} + b(n+1) p_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - \left[a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] p_{n,2} + b(n+1) p_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

让我们定义

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$: 列向量
- $A_n = \text{diag}[a_1 n (1 - \frac{n}{N}), a_2 n (1 - \frac{n}{N})]$: 二阶对角矩阵
- $B_n = \text{diag}[b n, b n]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

系统 (4) - (5) 的形式为

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

的本征值中号是那些 Q 和那些的 \tilde{r} 。 Q 的特征值是 0 和 $-(q_1 + q_2)$ 。 对角线外部的矩阵 R 的系数为正或零。此外，矩阵 R 是不可约的，正如我们在关联图上所看到的。 Perron 和 Frobenius 定理的推论 (Smith, 1995, 推论 3.2) 表明，矩阵 R 的实特征值 λ 很简单，严格大于所有其他特征值的实部分，并且具有相关的特征向量具有严格的积极成分。如果 $\mathbf{1}$ 是大小为 $2N$ 的线向量 $[1, 1, \dots, 1]$ ，则

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

根据 (Berman and Plemmons, 1994, Theorem 6.2.3, L33)，我们有 $\lambda < 0$ 。我们选择

$\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ 与特征值 λ 相关的 M 的特征向量： $M\pi = \lambda\pi$ 。换句话说，

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,1} = & - \left[a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,2} = & - \left[a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

让我们通过施加例如来归一化特征向量

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

图1显示 $\pi_{n,1}$ 和 $\pi_{n,2}$ 根据 N/N 到 $n \geq 1$ 有两种情况： $R_0 > 1$ 和 $a_1 > a_2 > b$ 在这种情况下 $R_0 > 1$ 和 $a_1 > b > a_2$ 。特征向量 π 是使用 Scilab 软件计算的。的高峰 $\pi_{n,1}$ 接近 $x_1 = 1 - b/a_1$ 就像您在考虑感染者比例 i 的平均场方程时所期望的

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1 - i) - bi.$$

的确 x_1 是该方程的唯一稳定平衡状态。的高峰 $\pi_{n,2}$ 接近 $x_2 = 1 - b/a_2$ 如果 $a_2 > b$ 并靠近 $x = 0$ 如果 $a_2 < b$ 。

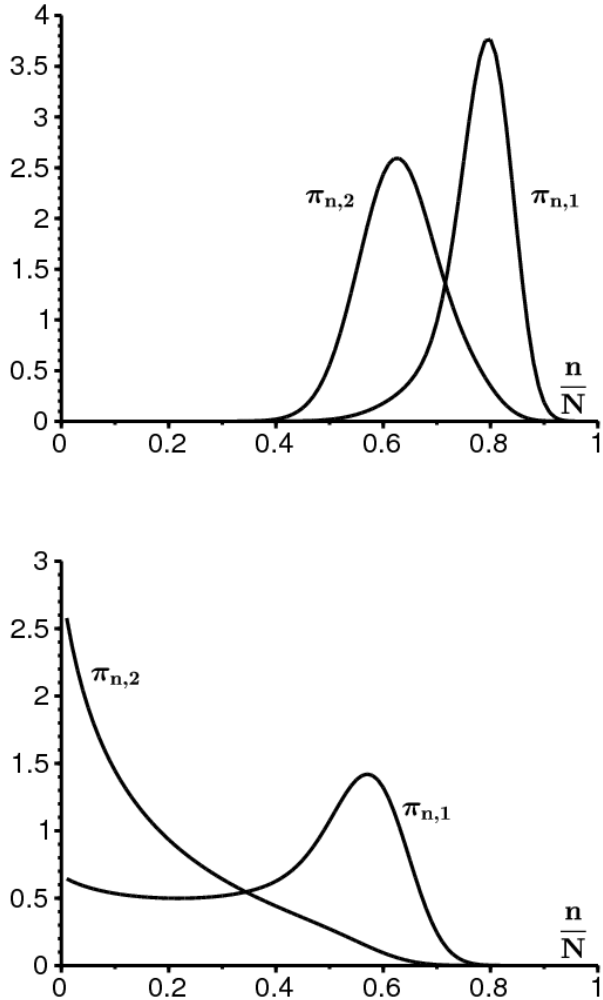


图1. 组件 $\pi_{n,1}$ 和 $\pi_{n,2}$ 为 $n \geq 1$ 当 $N = 100$ 时，特征向量 π 作为 n/N 的函数， $q_1 = 1$ 和 $q_2 = 1$ 。其他参数值：a) $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ ，b) $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$ 。

让我们定义

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$ 。

线性系统 (1) - (2) 可以写为

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

系统 (8) - (9) 和 (6) - (7) 显示

$$-1^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

其中星号*表示向量或矩阵的转置。通过采用通常的点积，我们得到 $\langle -1^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$ 。所以

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

换句话说， $-1/\lambda$ 是...的线性组合 ($T_{n,j}$) 为 $n \geq 1$ 和 $j = 1, 2$ 。在下文中，我们主要对 λ 感兴趣。我们学习 ($T_{n,j}$) 在第7节中通过数值模拟。

3. BKW近似

案子 $x > x_1 = 1 - b/a_1$ 。用 $R_0 > 1$ ，我们推测 $\lambda \rightarrow 0$ 如果 $N \rightarrow +\infty$ 。我们将验证后验，例如对于另一种模型 (Meerson和Sasorov, 2008)，确实如此。因此，可以忽略 (6) - (7) 的左侧。对于 $x > x_1$ ，让我们寻找形式的BKW近似值 (Bender和Orszag, 1978年)

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

在哪里 $x = n/N$ 。2阶泰勒展开 $S(x)$ 并为1的订单 $\Sigma(x)$ 建议

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

我们通过替换 (6) 并简化为 $e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}. \end{aligned}$$

$O(N)$ 中的表达式给出

$$0 \simeq N x \left[e^{S'(x)} - 1 \right] \left[a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

方括号中的第一项仅对于常数函数为空 $S(x)$ 。选择取消方括号中第二项的解决方案

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

那就是说

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

除了加性常数。这意味着 $S''(x) = \frac{1}{1-x}$ 。功能 $\Sigma(x)$ 用 $O(1)$ 中的表达式获得：

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left[x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1. \end{aligned}$$

通过更换 $S(x)$ 通过表达，我们得到

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right), \\ \Sigma(x) &= \sigma_1(x) = \log \left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right). \end{aligned}$$

功能 $c(x)$ 在 $\pi_{n,2}$ 从 (7) 获得。形式 $\pi_{n,2}$ 被选择来平衡不同的表情。确实，最高顺序

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ N a_2 x (1 - x) \left[e^{S'(x)} - 1 \right] + b N x \left(e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

通过更换 $S(x)$ 通过表达, 我们得到

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2)x(x - x_1)}.$$

总而言之, 我们推测 $x > x_1$,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-Ns_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x(x - x_1)}, \quad (10)$$

一定的常数 k_1 。特别考虑以下行为 $\pi_{n,1}$ 和的 $\pi_{n,2}$ 为 $x > x_1$ 和 x 接近 x_1 。让我们定义 $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$ 。我们有 $s'_1(x_1) = 0$ 。泰勒的发展给

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s''_1(x_1)(x - x_1)^2/2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b}(x - x_1)^2.$$

所以

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1} (x-x_1)^{\frac{q_1}{a_1-b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x_1(x - x_1)}. \quad (11)$$

案子 $x < x_2 = 1 - b/a_2$ **如果** $a_1 > a_2 > b$ 。对称地, 让我们寻找一个解决方案 $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

为 $x < x_2 = 1 - b/a_2$ 。系统 (6) - (7) 如上所述

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

除了加常数,

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log\left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x_2 - x}{x}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}}\right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

总而言之, 我们推测 $x < x_2$,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x) - \sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

一定的常数 k_2 。对于 $x < x_2$ 和 x 接近 x_2 ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2} (x_2-x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

图2和3显示 $-(\log \pi_{n,1})/N$ 和 $-(\log \pi_{n,2})/N$ 取决于 n/N 为 $1 \leq n \leq N$, 与 $\pi_{n,i}$ 使用系统 (6) - (7) 计算。该图还以深蓝色和红色显示了近似值 (10) 和 (12)。常数 k_1 选择 (10) 中的 $\pi_{n,1}$ 与 $n = N-1$ 的近似值一致。常数 k_2 在 (12) 中由 k_1 如下文第5节所述。

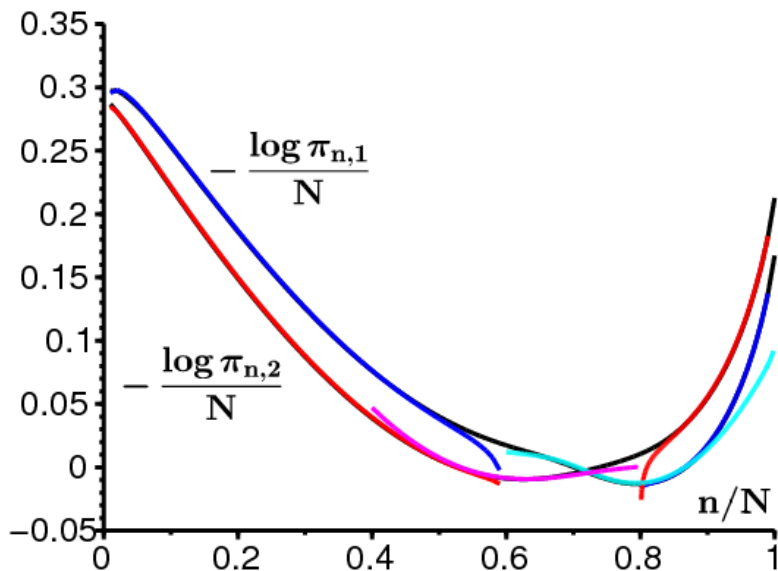


图2. 示例 $a_1 > a_2 > b$ 。黑色，在其他曲线下： $-(\log \pi_{n,1})/N$ 和 $-(\log \pi_{n,2})/N$ 取决于 $x = n/N$ 。
 对于 $\pi_{n,1}$ ：深蓝色时，近似值 (10) $x > x_1$ 和 (12) $x < x_2$ ；浅蓝色，扩散近似 (25) 为 $x \simeq x_1$ 。
 对于 $\pi_{n,2}$ ：以红色表示，近似值 (10) 为 $x > x_1$ 和 (12) $x < x_2$ ；用粉红色表示的扩散近似 (31) $x \simeq x_2$ 。

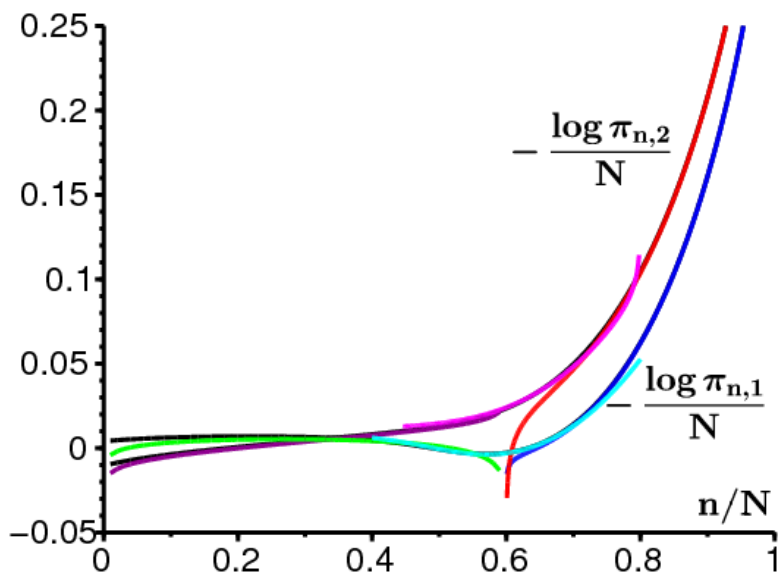


图3. 示例 $a_1 > b > a_2$ 。黑色，在其他曲线下： $-(\log \pi_{n,1})/N$ 和 $-(\log \pi_{n,2})/N$ 取决于 $x = n/N$ 。
 对于 $\pi_{n,1}$ ：深蓝色时，近似值 (10) 为 $x > x_1$ ；绿色，近似值 (20) 为 $x < x_1$ ；浅蓝色，扩散近似 (25) 为 $x \simeq x_1$ 。
 对于 $\pi_{n,2}$ ：以红色表示，近似值为 (10) $x > x_1$ ；紫色，近似 (19) 为 $x < x_1$ ；用粉红色，扩散近似 (31) 表示 $x \simeq x_1$ 。

4 缓慢变化区域中的近似值

我们正在寻找的近似值 $\pi_{n,1}$ 和 $\pi_{n,2}$ 为 $x_2 < x < x_1$ 如果 $a_1 > a_2 > b$ 和为 $0 < x < x_1$ 如果 $a_1 > b > a_2$ 。在这些时间间隔内， $S(x) = 0$ 。让我们考虑系统 (6) - (7)，然后直接尝试连续逼近 $\pi_{n,1} \simeq y(x)$ ， $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ ，带有 $x = n/N$ 。泰勒的发展给

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

在 $\lambda \approx 0$ 的情况下, 导致扩散近似

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

通过忽略 $1/N$, 我们得到方程

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

它们的形式与 (Slatkin, 1978) 的方程式 (29) - (30) 相同。通过添加方程式 (16) 和 (17), 我们发现

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

因此, 方括号之间的功能是恒定的。由于 x 是一个因素, 因此建议这样做 $x \rightarrow 0$ 该常数为零:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

这可以表达 $y(x)$ 取决于 $z(x)$ 。通过替换 (17), 我们经过几次操作即可获得

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} &\simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)}, \\ z(x) &\simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \end{aligned} \quad (19)$$

对于某一常数 C 。该近似值在图3中以紫色显示。常数 C 由下式确定: k_1 如以下第5节所示。然后, 式 (18) 和 (19) 表明

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

此近似值在图3中以绿色显示。 $x \simeq x_1$ 与 $x < x_1$, 我们得到

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1x_1} \left(\frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (21)$$

如果 $a_1 > b > a_2$, 我们发现了 $X \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

请记住 $R_0 = \frac{a_1q_2 + a_2q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$ 相当于 $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$ 在这种情况下。特别是 $z(x)$ 在附近 0^+ 是收敛的。如果 $a_1 > a_2 > b$, 然后 (19) 显示

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2x_2} \left(\frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \quad (24)$$

接近 x_2 与 $x > x_2$ 。

5附近的扩散近似 x_1 和 x_2

附近的情况 x_1 。接近 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ ，(14) - (15) 中的扩散将不再被忽略。分析过渡带 x_1 和 x_2 必须允许将 (21) 和 (24) 中的常数 C 与常数链接 k_1 从 (10) 开始 k_2 从 (12)。让我们定义 $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$ 。然后，可以通过阶数为1的泰勒展开式来近似 (14) 中阶数为1的导数的系数

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

我们忽略了 $q_2 z$ 在前面 $q_1 y$ 如果 $x \simeq x_1$ ：

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b}\right) y.$$

用

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

我们有Hermite微分方程

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

我们正在寻找一个完整系列的解决方案

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

我们获得递归关系

$$w_{n+2} = \frac{2(n + 2\alpha_1)}{(n + 2)(n + 1)} w_n,$$

在哪里 $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1 - b}$ 。因此，我们有两个线性独立的解决方案

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

在哪里 γ_1 和 γ_2 是常数，

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$$

是Kummer的合流超几何函数。根据 (Maroni, 1997, 方程 (93))，我们有 $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha - \beta}$ 如果 $z \rightarrow +\infty$ ，其中 Γ 是欧拉的伽玛函数。所以

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1 - 1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

所以 $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ 具有与 (21) 相同的渐近行为 $\eta_1 \rightarrow -\infty$ ，前提是

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C (b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2 - b}}}{a_1^{1 - \frac{q_1}{a_1 - b}} x_1^{1 + \frac{q_1}{a_1 - b} + \frac{q_2}{a_2 - b}}}. \quad (26)$$

如果相反 $\eta_1 \rightarrow +\infty$ ，(11) 建议 $Y(\eta_1)$ 必须表现为某个常数乘以 $\eta_1^{-2\alpha_1}$ 。融合超几何函数的理论 (Maroni, 1997) 表明有必要施加

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

对于某个常数 K 以获得这种渐近行为。确实，我们然后有

$$Y(\eta_1) = K \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

那就是说 $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$ 为 $\eta_1 > 0$ ，在哪里 $\Psi(\alpha, \beta; z)$ 是Tricomi的合流超几何函数，定义为

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

根据 (Maroni, 1997, 方程 (90))，我们有 $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$ 如果 $z \rightarrow +\infty$ 。所以 $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$ 如果 $\eta_1 \rightarrow +\infty$ 。

相当于 $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ 然后与 (11) 相符，条件是

$$K \left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

总之，关系 (26)，(27) 和 (29) 确定 K ， γ_1 ， γ_2 和 C 取决于 k_1 。特别是因为 $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ， $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 和 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ，方程 (26) 给出

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

可以使用Legendre-Gauss公式获得替代形式 $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$ 。

附近的情况 x_2 。 如果 $a_2 > b$ ，我们对 (15) 接近 $x = x_2 = 1 - b/a_2$ 。我们忽略了 $q_1 y$ 在前面 $q_2 z$ 。如果

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

所以

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

在哪里 δ_1 和 δ_2 是常数。的行为 $\eta_2 \rightarrow +\infty$ 符合 (24)，只要

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left(\frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

让我们定义

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

一定的常数 \hat{K} (请注意减号 δ_2)。所以 $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$ 如果 $\eta_2 < 0$ 。所以 $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$ 为 $\eta_2 \rightarrow -\infty$ 。这与 (13) 一致，只要

$$\hat{K} \left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

如上所述，(32) 和 (33) 给出

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C [a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

所以常数 k_2 , \hat{K} , δ_1 和 δ_2 由常数决定 C 。

6个人价值

请记住 $M\pi = \lambda\pi$ 。通过将方程组的所有线相加，我们得到 $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$ 。但是 $\lambda < 0$ 。所以

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

系统的前两行是

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}. \end{aligned}$$

通过添加它们，我们发现

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

让我们首先考虑一下 $a_1 > b > a_2$ 与 $R_0 > 1$ 。因此 (19) 显示

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

在哪里 κ_1 是一个独立于 N 。利用事实， $\pi_{n,1}$ 接近 $x = n/N = x_1$ 和关系 (25)，(28) 和 (30)，我们发现

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

在哪里 κ_j (上方和下方) 仍正的常数，它们是独立的 \tilde{N} 。因此在 (36) 的分母中 N 大的主导项是 $\pi_{n,2}$ 。在分子中 $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$ 和 $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$ 在哪里 $y(x)$ 和 $z(x)$ 由 (22) - (23) 给出，我们得到

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

换句话说， $-1/\lambda$ 以 N 作为幂定律增加，其指数为

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

如简介中所宣布。此外，我们注意到 ω 趋于 $+\infty$ 如果 a_2 通过较低的值收敛到 b 。

现在考虑这种情况 $a_1 > a_2 > b$ 。为了简化，让我们介绍一下符号 $f \approx g$ (不要与非正式符号混淆 \simeq 在上面使用) 如果 $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$ 如果 $N \rightarrow +\infty$ 。特别是 $N^\beta \approx 1$ 对于所有 β 。然后 $x = 1/N$ 的 (12) 表示 $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$ 。另外，

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s'_2(0)} \approx k_2.$$

此外， $\pi_{n,1}$ 接近 $x = n/N = x_1$ 而 $\pi_{n,2}$ 接近 x_2 。因此 (37) 仍然有效并显示

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

而 (31) , (33) 和 (35) 给出

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

但是 (34) 和 (35) 显示

$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

因此 (36) 给出 $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$ 和 $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$ 。最后, $-1/\lambda$ 随参数大致呈指数增长 c_2 。

7 平均灭绝时间

线性系统 (8) - (9) 可以用 (Artalejo et al. , 2013) 提出的数值方法求解。该方法仅使用2阶方阵, 并减少了数值不稳定性。请记住 $q_1 = q_2 = 1$ 和 $b = 2$ 。

第一个例子: $a_1 > a_2 > b$ 。让我们来 $a_1 = 10$ 和 $a_2 = 5$ 。图4a显示 $T_{n,1}$ 和 $T_{n,2}$ 取决于 $x = n/N$ 。图4b表明, 灭绝的平均时间 (例如, 从环境1中的 N 个感染者开始) 大致呈指数增长: $T_{N,1} \approx e^{cN}$ 。线性回归给出 $c \simeq 0.32$ 。注意 $c_1 \simeq 0.81$ 和 $c_2 \simeq 0.32$, 这表明 $c = c_2$ 。

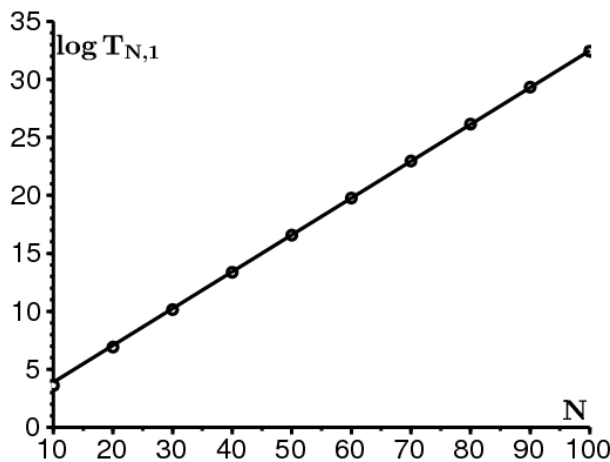
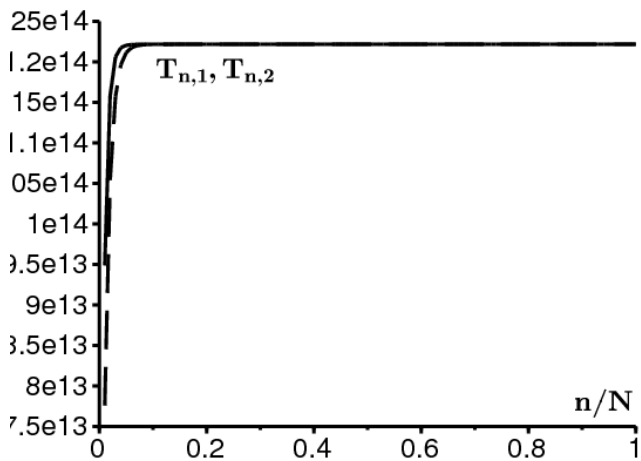


图4. 案例 $a_1 > a_2 > b$ 。 a) $T_{n,1}$ [实线] 和 $T_{n,2}$ [虚线] 取决于 n/N 如果 $N = 100$ 。 b) $\log T_{N,1}$ 取决于 N

第二个例子: $a_1 > b > a_2$ 和 $R_0 > 1$ 。让我们来 $a_1 = 5$ 和 $a_2 = 1$ 。所以 $R_0 = 1.5 > 1$ 。图5a显示 $T_{n,1}$ 和 $T_{n,2}$ 取决于 $x = n/N$ 。图5b显示 $\log T_{N,1}$ 取决于 $\log N$ 。我们得到一条直线, 表示幂律 $T \sim \kappa N^\omega$ 。通过线性回归获得的

斜率是 $\omega \simeq 0.67$ 。在这种情况下，我们有 $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，它与测得的斜率非常吻合。

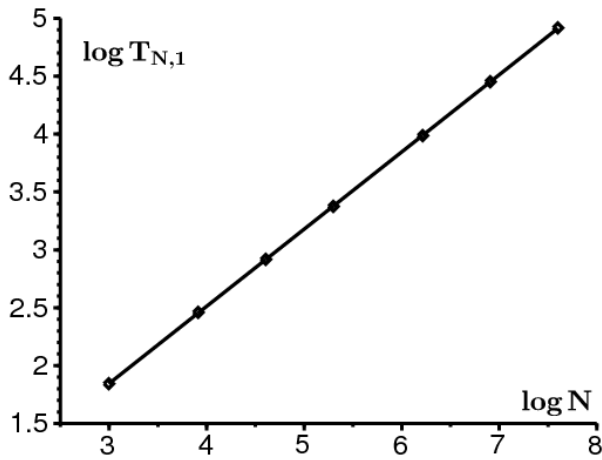
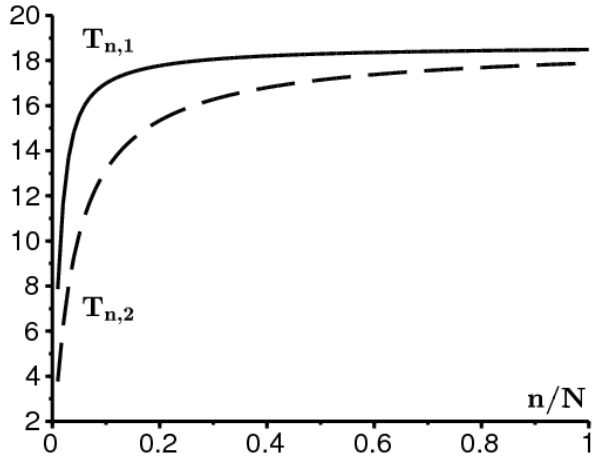


图5. 案例 $a_1 > b > a_2$ 与 $R_0 > 1$ 。a) $T_{n,1}$ 和 $T_{n,2}$ 取决于 $x = n/N$ 如果 $N = 100$ 。b) $\log T_{N,1}$ 取决于 $\log N$ 。

8笔记

与定期案例的比较。

为了强调随机环境和周期性环境之间的区别，让我们以 $a_1 = 5$ 和 $a_2 = 1$ ，而 $q_1 = q_2 = 1$ 和 $b = 2$ 。所以 $u_1 = u_2 = 0.5$ ：环境在状态1下平均花费一半的时间，在状态2下另一半。图6一方面显示了如何 $T_{N,1}$ 随 N 作为幂律的函数而增加。另一方面，考虑相同的SIS模型，但是在周期性环境中 (Bacaër, 2015年)：让我们选择 $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ， $a(t) = a_1$ 为 $0 < t < u_1 T$ 和 $a(t) = a_2$ 为 $u_1 T < t < T$ 。对于此模型， $e^{\Lambda T}$ 是与灭绝过程相关的浮球乘数。图6显示了 $-1/\Lambda$ 与成倍增长 N 。

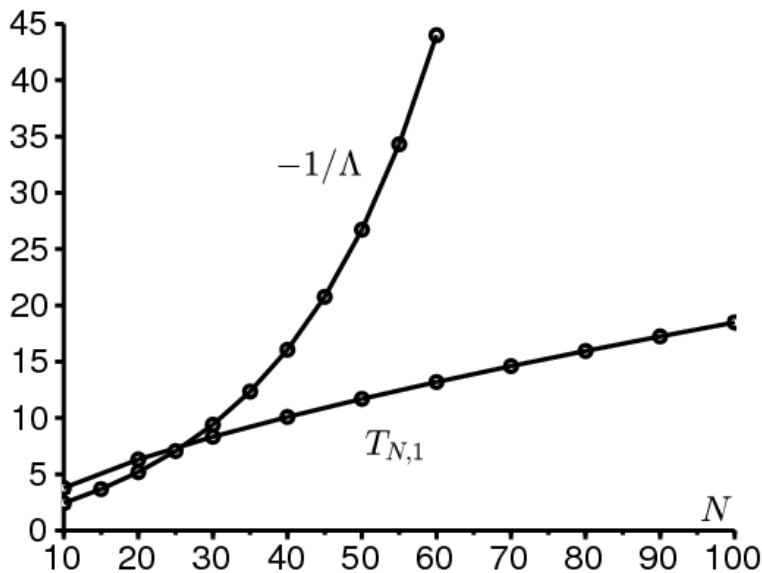


图6.平均灭绝时间 $T_{N,1}$ 在随机环境中 $-1/\Lambda$ 在周期性类似的环境中。

平均场方程。 追忆 (Bacaër和Ed-Darraz, 2014年) 平均场方程可能会有用

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1, \end{aligned}$$

一旦在平衡态 $(0,0)$ 附近线性化, 则导致雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

但是我们可以同时拥有

- 严格为正的 eigenvalue, 因此平凡平衡不稳定,
- $R_0 < 1$.

另一个限制。 获得的结果考虑到参数 q_j , a_j 和 b 当 N 收敛到无穷大时固定。例如, 事情显然是不同的 q_1 和 q_2 以恒定比率收敛到无穷大 q_1/q_2 。然后, 该模型使用平均接触参数来逼近在恒定环境中均质化的模型

$$\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2.$$

亚临界情况。 我们没有解决亚临界情况 $R_0 < 1$ 与 $a_1 > b > a_2$ 否则 $b > a_1 > a_2$ 。因此, 平均灭绝时间的行为与在恒定环境中的行为大致相同: 从被感染人口的固定比例开始, 平均时间约为 $\log N$ (Doering等, 2005)。从感染分数 I/N , 平均时间反过来收敛到极限。在随机环境下, 这也是数字仿真所建议的。

9个状态数有限的马尔可夫链

用 J 状态, 请记住, 无穷小生成器 Q 就是这样 $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$ 为了一切 j 。假设这个矩阵 Q 是不可约的 $a_1 > a_2 > \dots > a_J$ 。如果 $a_J > b$, 那么灭绝的平均时间会随着人口数量 N 的增加而呈指数增长, $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$ 。实际上, 在环境 J 中最有可能灭绝。

另一方面, 如果 $b > a_J$ 和 $R_0 > 1$, 注意 $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ 与 $x = n/N$ 。在附近 $x = 0$, 系统 (16) - (17) 变为

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

寻找解决方案 $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$ 与 $\omega > 0$ 和 $\theta_j > 0$ 对于所有 j , 我们发现

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

为 $1 \leq j \leq J$ 。因此, 有了引言的符号, 我们就有了广义特征值的问题 $Q\theta = \omega(A - B)\theta$, 带有 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ 。

我们将展示

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$ 是对角矩阵。对于任何实数 s ,

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$ 在对角线之外的所有系数为正或为零。另外, 该矩阵是不可约的。根据 Perron 和 Frobenius 定理的推论 (Smith, 1995, 推论 3.2), $\mu(s)$ 是简单特征值 $Q - sD$ (称为主导特征值), 并且有一个特征向量 $\phi(s)$ 所有其成分都严格为正, 使得

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

该特征向量在归一化时是唯一的

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

根据同一个推论, 向量的存在 θ 与 $\theta_j > 0$ 为了一切 j 和 $(Q - \omega D)\theta = 0$ 实际上等于 $\mu(\omega) = 0$ 。因此, 有一个问题表明 $\mu(\omega) = 0$ 与 $\omega > 0$ 有一个独特的解决方案。

关于存在, 我们首先注意到无穷小生成器 Q 对应于 $s = 0$: 我们有 $\mu(0) = 0$ 我们注意到 $u = \phi(0)$ 右边的特征向量。线向量 $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$ 是左侧的特征向量 Q 与特征值 0 相关联。因此

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

根据简单的特征值摄动定理, 函数 $\mu(s)$ 在...上有区别 $s = 0$ 和

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

但是 $R_0 > 1$ 相当于 $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$ 。所以 $\mu'(0) < 0$ 。另外, 我们有 $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$ 为了一切 $s > 0$ 。如果 $s \rightarrow +\infty$, 我们有 $Q/s - D \rightarrow -D$ 。通过频谱的连续性,

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j (-D_{j,j}) = \max_j (b - a_j) = b - a_J > 0.$$

所以 $\mu(s) \rightarrow +\infty$ 如果 $s \rightarrow +\infty$ 。因为 $\mu(0) = 0$ 和 $\mu'(0) < 0$, 我们推断有 $\omega > 0$ 与 $\mu(\omega) = 0$ 。

至于唯一性, 首先要注意的是 $\mu(s)$ 是凸的。确实, 对于所有实数 ω_1, ω_2 和 $0 < \varepsilon < 1$, 我们看到 $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$ 是矩阵的主导特征值 $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$ 。根据 (Cohen, 1981) 的一个定理, 该特征值小于或等于 $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$ 。这证明了凸性。假设现在有 $\omega_1 > \omega_2 > 0$ 与 $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$ 。因为 $\mu(0) = 0$ 而且因为 $\mu(s)$ 是凸的, 我们推论 $\mu(s) = 0$ 为 $0 \leq s \leq \omega_1$ 。这矛盾 $\mu'(0) < 0$ 。

$A - B$ 是一个可逆矩阵, 如果 $a_j \neq b$ 对于所有 j 。所以 $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ 相当于 $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$ 。所以 ω 是...的特征值 $(A - B)^{-1}Q$ 真正的部分是最大的。

最终方程 (36) 变为

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

在分子中，我们有 $\pi_{1,j} \simeq \theta_j (1/N)^{\omega-1}$ 。在分母中，我们有

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N \theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

所以 $-1/\lambda$ 用增 \tilde{N} 如 N^ω 。

如果环境是由例如随机微分方程控制的，那么毫无疑问可以概括这样的结果

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

让我们定义 L^* 微分算子

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} (f(\xi)u(\xi)).$$

我们假设 $u(\xi)$ 是不变的概率：

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

因此，在Langevin方程的情况下，

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

我们假设接触率 $a(\cdot)$ 是一个功能 \mathbb{R} 与 $\min a(\cdot) < b$ 和

$$R_0 = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

随着时间的灭火介质增加 \tilde{N} 如 N^ω ，在哪里 ω 是微分算子唯一的正数 $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$ 具有一个等于0的主特征值。由于该特征值的凸性是 ω ，参见（Kato, 1982）。请注意， L^* 是

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

和 $L1 = 0$ 如果 1 表示等于1的常数函数。

10 周期性且随机的环境

让我们回到有限的一组环境的情况。现在我们假设无穷小生成器 $Q(t)$

- 是周期的周期函数 \mathcal{T}
- 是连续或分段连续函数，
- 至少在 τ 的间隔内是不可约的。

系统 (4) - (5) 采用以下形式 $\frac{dP}{dt} = M(t)P$ 。接下来（Bacaër, 2015年），然后有一对夫妇 (λ, π) 与

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$ 是周期的周期函数 \mathcal{T}

- $$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

- $$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$

- $\pi_{n,j}(t) > 0$ 为 $1 \leq n \leq N$ 和 $1 \leq j \leq J$ 。

另外,

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

还有一个独特的功能 \mathcal{T} 周期的 $u(t)$ 与

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

作为 (Bacaër和Ed-Darraz, 2014年), 我们定义

$$R_0 = \left(\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

我们推测, 如果 $a_1 > \dots > a_J > b$, 那么灭绝的平均时间又随着 N 呈指数增长

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

另一方面, 如果 $a_J < b$ 但是 $R_0 > 1$, 近似值 $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$ 导致将 (38) 推广到 $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

形式的解决方案 $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$, 具有功能 $\theta(t) = (\theta_j(t))$ \mathcal{T} -定期, 必须检查

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

有一个实数 $\mu(\omega)$ 为此 $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ 是系统的主要Floquet乘数

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

该矩阵是周期的周期函数 \mathcal{T} 。对角线之外的系数为正或零。矩阵在 t 的间隔内不可约。我们可以证明有一个独特的 $\omega > 0$ 与 $\mu(\omega) = 0$ 。我们在第9节中使用

- 的凸性 $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$ 如果 $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$ 如果 $a_J < b$ 。

请注意, $\mu(\omega)$ 通过简单地概括 (Cohen, 1981) 的论证就可以证明这一点。我们用

- 系数为零或对数凸函数在 ω 中的矩阵的谱半径的对数凸度, \mathcal{G}
- \mathcal{G} 通过加, 乘和过渡到极限而稳定

(金曼, 1961年)。的确 $Q(t)$ 是分段连续周期函数, 可以通过阶跃函数来实现。 Q_k 是区间上的近似矩阵 (τ_k, τ_{k+1}) 为 $k = 0, \dots, K-1$, 带有 $\tau_0 = 0$ 和 $\tau_K = \mathcal{T}$ 。如果 $Q(t)$ 这个楼梯功能是 $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ 等于矩阵乘积的谱半径

$$e^{(Q_{K-1} - \omega D)(\tau_K - \tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0 - \omega D)(\tau_1 - \tau_0)}.$$

根据 (Cohen, 1981), 这些矩阵中的每一个都有其系数 \mathfrak{G} 。因此, 矩阵的乘积也具有 \mathfrak{G} 。其光谱半径为 ω 的对数凸。

因为

$$\lambda = -b \frac{\int_0^T \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

我们像以前一样得出结论 $-1/\lambda$ 可能与成长 \tilde{n} 作为 N^ω 。

致谢

这篇文章受到2014年10月在马德里 *Ciencias Matemáticas* 研究所举行的会议, 2015年5月在特莱姆森大学的演讲以及2015年6月在新星大学里斯本举办的研讨会的启发。

参考文献

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herreó MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. *Am Nat* 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. *J Theor Biol* 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. *SIAM-AMS Proceedings* 10 : 87–104
- Maroni P (1997) *Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel*. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise-driven unlimited population growth. *Phys Rev E* 78 : 060103
- Nåsell I (2011) *Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model*. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. *Ecology* 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. *Theor Popul Biol* 19 : 37–57
- Smith HL (1995) *Monotone dynamical systems*. American Mathematical Society, Providence