

O modelo estocástico do SIS para uma epidemia em um ambiente aleatório

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866.
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, França
Universidade Pierre e Marie Curie, Les Cordeliers, Paris, França
nicolas.bacaer@ird.fr

Sumário

Em um ambiente aleatório, que é uma cadeia de Markov em tempo contínuo de dois estados, o tempo médio de extinção do modelo estocástico do SIS para uma epidemia aumenta, no caso supercrítico, exponencialmente em relação ao tamanho da população, se ambos os estados são favoráveis e, de acordo com a lei do poder, se um deles é favorável enquanto o outro é desfavorável à propagação.

1 Introdução

Seja N o tamanho da população, assumido como constante. No modelo estocástico do SIS para uma epidemia, cada indivíduo é saudável (S) ou infectado (I) (Nåsell, 2011). Imagine que o ambiente siga uma cadeia de Markov em tempo contínuo com dois estados. q_j ($j = 1, 2$) é a taxa de saída do estado j . No ambiente j , a taxa de contato de cada indivíduo é $a_j > 0$. Se em um instante t o número de pessoas infectadas for n e o ambiente for j , a probabilidade de ocorrer uma nova infecção entre t e $t + dt$, com dt infinitamente pequeno, será $a_j n(1 - n/N) dt$. Suponha que a taxa de recuperação $b > 0$ de um indivíduo seja a mesma nos dois ambientes. A probabilidade de uma nova cura na população é então $bn dt$ entre t e $t + dt$. Esse modelo foi estudado por (Artalejo et al., 2013), mas não na medida em que o tamanho N da população se torna grande. Além disso, é um caso especial do processo de nascimento e morte em um ambiente markoviano (Cogburn e Torrez, 1981).

Vamos definir

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

Então Q é o gerador infinitesimal, enquanto u_1 (resp. u_2) é a proporção de tempo gasto no ambiente 1 (resp. 2). Para o modelo linearizado, ou seja, o processo linear de nascimento e morte em um ambiente aleatório de parâmetros a_j e b (Bacaër e Ed-Darraz, 2014) observa que quase certamente há extinção se e somente se $R_0 \leq 1$. Para o modelo SIS não linear, por outro lado, existe extinção, qualquer que seja o valor do parâmetro R_0 . No entanto, quando a população N é grande, o tempo médio de extinção é grande se $R_0 > 1$ e pequeno se $R_0 < 1$. Se $T_{n,j}$ é o tempo médio com inicialmente n pessoas infectadas no ambiente j , depois para $1 \leq n \leq N$,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

Além disso $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$. O objetivo deste artigo é estudar no caso supercrítico, ou seja, se $R_0 > 1$, o comportamento do tempo médio até a extinção, quando o tamanho da população N se torna grande.

Em um ambiente constante com uma taxa de contato a com $R_0 = \frac{a}{b} > 1$ (Doering et al., 2005, Tabela 1) mostra que o tempo médio para extinção de uma fração infectada da população $x = n/N$ aumenta quando $N \rightarrow \infty$, independentemente de x , como $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ onde $c = b/a - 1 - \log(b/a)$. Em outras palavras, o tempo médio está crescendo quase exponencialmente com N . (Bacaër, 2015) sugere um resultado semelhante quando o ambiente é periódico, mesmo que não exista uma fórmula explícita para o parâmetro de crescimento c .

Em um ambiente aleatório supercrítico, ou seja, com $R_0 > 1$, o artigo a seguir sugere que dois casos devem ser distinguidos: um caso altamente supercrítico em que $a_1 > a_2 > b$ e um caso fracamente supercrítico em que $a_1 > b > a_2$. No caso altamente supercrítico em que $a_1 > a_2 > b$, conjecturamos que o tempo médio até a extinção aumenta aproximadamente exponencialmente com N com um parâmetro $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$. Mais exatamente, o logaritmo desse tempo médio, dividido por N , converge para c_2 . O comportamento assintótico é, portanto, o mesmo que se o ambiente permanecesse bloqueado no estado 2, ou seja, o que é menos favorável à propagação da epidemia e aquele em que a extinção ocorre preferencialmente.

No entanto, se $a_1 > b > a_2$ e $R_0 > 1$, então conjecturamos que o tempo médio para extinção aumenta à medida que N^ω com

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

Nesse caso, $R_0 > 1$ é equivalente a $\omega > 0$. Intuitivamente, acontece de tempos em tempos que alguém permanece no estado 2 por um período muito longo. A probabilidade de que essa duração seja maior que τ é $e^{-q_2\tau}$. No estado 2, o tempo médio de extinção para N grande é da ordem de $\tau \simeq \frac{\log N}{b - a_2}$ (Doering et al., 2005); isso também pode ser adivinhado a partir da equação de quase extinção $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$. Então, finalmente, a probabilidade de extinção durante um período no estado 2 é da ordem de $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$. Isso sugere que o tempo médio de extinção é da ordem de magnitude do inverso, ou seja, $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$. De acordo com nossa análise, a ordem de magnitude é realmente N^ω com ω dado por (3).

Observe também que se q_1 e q_2 são multiplicados por $1 + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$ então R_0 permanece inalterado, mas ω é multiplicado por $1 + \varepsilon$: neste modelo, o aumento da variabilidade ambiental tende a aumentar o tempo médio de extinção.

Esta lei em N^ω parece ser capaz de generalizar no caso de um ambiente com J estados se

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

Nós temos

$$R_0 = \left(\sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

se Q é o gerador infinitesimal e se u é o único vetor com

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(Bacaër e Ed-Darraz, 2014). Seja A e B denotam as matrizes diagonais $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$ e $\text{diag}(b, \dots, b)$. Considere o limite espectral

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

onde $\sigma(\cdot)$ denota o espectro de uma matriz e $\Re(\cdot)$ a parte real de um número complexo. Nós mostramos

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

Em seguida, conjecturamos que o tempo médio de extinção aumenta à medida que N^ω . No caso particular em que $a_j \neq b$ para todo j , o número ω é simplesmente o autovalor da maior parte real da matriz $(A - B)^{-1}Q$. Essa matriz e a expressão de seu autovalor ω dado por (3) para $I = 2$ já são encontradas (Sawyer e Slatkin, 1981, equações (14) e (20)) para um modelo populacional sem estocástica demográfica na região. caso subcrítico ($R_0 < 1$); neste caso, o tempo médio até à extinção no entanto aumenta como o logaritmo de N .

Vários autores encontraram uma lei do poder para o tempo médio de extinção em modelos populacionais em um ambiente aleatório browniano (Ludwig, 1976; Leigh, 1981; Lande, 1993). Eles usam uma equação de difusão como ponto de partida. Entretanto (Gaveau et al., 1996) e (Doering et al., 2005) mostraram que essa equação leva a uma fórmula inexata para o parâmetro c . De fato, essa equação nem sempre representa bem a cauda da distribuição quase-estacionária, que é precisamente a parte mais importante para estudar o processo de extinção. Observe no entanto que (Kamenev et al., 2008) abordaram o problema de extinção para populações em um ambiente aleatório com ruído colorido usando integrais de caminho.

A seção 2 apresenta a distribuição quase-estacionária do modelo. A Seção 3 usa o método de Brillouin, Kramers e Wentzel (BKW) para obter aproximações válidas nas zonas do parâmetro $x = n/N$ onde a distribuição varia rapidamente. A Seção 4 usa outra aproximação na área em que a distribuição varia lentamente. A Seção 5 usa uma equação de difusão para conectar as duas aproximações anteriores: as funções hipergeométricas confluentes de Kummer e Tricomi substituem aqui a função de erro de Gauss usada em particular por (Meerson e Sasorov, 2008). A Seção 6 estima o valor próprio associado à distribuição quase-estacionária.

Nenhuma dessas aproximações foi rigorosamente obtida. A seção 7, no entanto, apresenta simulações numéricas que parecem confirmar o valor numérico dos expoentes para a lei exponencial no caso fortemente supercrítico e para a lei do poder no caso fracamente supercrítico. A seção 8 adiciona algumas observações. Em particular, comparamos no regime fracamente supercrítico o caso de um ambiente markoviano e de um ambiente periódico com a mesma proporção de tempo em um estado favorável ou desfavorável: o primeiro leva a uma lei de energia nesse meio tempo até a extinção, o segundo a uma lei exponencial. A Seção 9 considera o caso de uma cadeia de Markov com um número finito de estados e discute outras generalizações.

2 Distribuição quase-estacionária

Considere a probabilidade de n pessoas infectadas, no ambiente j , no momento t : $p_{n,j}(t)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - [a_1 n (1 - \frac{n}{N}) + b n + q_1] p_{n,1} + b(n+1) p_{n+1,1} \\ & + a_1 (n-1) (1 - \frac{n-1}{N}) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - [a_2 n (1 - \frac{n}{N}) + b n + q_2] p_{n,2} + b(n+1) p_{n+1,2} \\ & + a_2 (n-1) (1 - \frac{n-1}{N}) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Vamos definir

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$: um vetor de coluna
- $A_n = \text{diag}[a_1 n (1 - \frac{n}{N}), a_2 n (1 - \frac{n}{N})]$: uma matriz diagonal de ordem dois
- $B_n = \text{diag}[b n, b n]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

O sistema (4) - (5) tem a forma

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

Os valores próprios de H são aqueles de Q e os de R . Os autovalores de Q são 0 e $-(q_1 + q_2)$. Os coeficientes da matriz R fora da diagonal são positivos ou zero. Além disso, a matriz R é irredutível, como podemos ver no gráfico associado. Um corolário do teorema de Perron e Frobenius (Smith, 1995, corolário 3.2) mostra que a matriz R tem um autovalor real λ que é simples, estritamente maior que a parte real de todos os outros autovalores e com um autovetor associado com componentes estritamente positivos. Se $\mathbf{1}$ é o vetor de linha $[1, 1, \dots, 1]$ do tamanho $2N$, então

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

De acordo com (Berman e Plemmons, 1994, Teorema 6.2.3, L33), temos $\lambda < 0$. Nós escolhemos

$\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ um vetor próprio de M associado ao valor próprio λ : $M\pi = \lambda\pi$. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,1} = & - [a_1 n (1 - \frac{n}{N}) + b n + q_1] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} \\ & + a_1 (n-1) (1 - \frac{n-1}{N}) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,2} = & - [a_2 n (1 - \frac{n}{N}) + b n + q_2] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} \\ & + a_2 (n-1) (1 - \frac{n-1}{N}) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Vamos normalizar o vetor próprio, impondo, por exemplo,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

A figura 1 mostra $\pi_{n,1}$ e $\pi_{n,2}$ em função de n/N para $n \geq 1$ em dois casos: um caso em que $R_0 > 1$ e $a_1 > a_2 > b$, um caso em que $R_0 > 1$ e $a_1 > b > a_2$. O vetor próprio π é calculado com o software Scilab. O pico de $\pi_{n,1}$ está perto de $x_1 = 1 - b/a_1$, como seria de esperar ao pensar na equação média do campo para a proporção i de pessoas infectadas

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

De fato x_1 é o único estado de equilíbrio estável dessa equação. O pico de $\pi_{n,2}$ está perto de $x_2 = 1 - b/a_2$ se $a_2 > b$ e perto de $x = 0$ se $a_2 < b$.

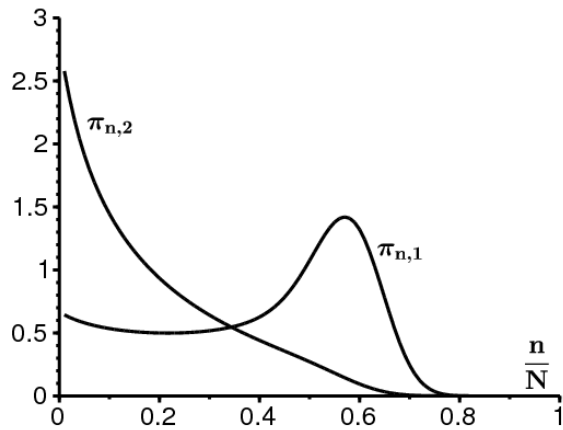
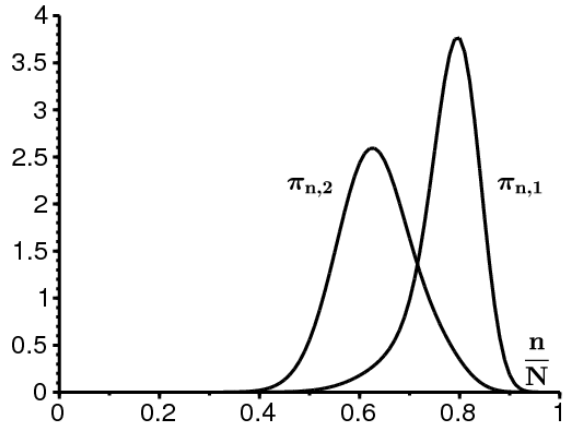


Figura 1. Os componentes $\pi_{n,1}$ e $\pi_{n,2}$ para $n \geq 1$ do vetor próprio π em função de n/N quando $N = 100$, $q_1 = 1$ e $q_2 = 1$. Outros valores de parâmetros: a) $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ b) $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$.

Vamos definir

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$.

O sistema linear (1) - (2) pode ser escrito na forma

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

Os sistemas (8) - (9) e (6) - (7) mostram que

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

onde a estrela * indica a transposição de vetores ou matrizes. Ao usar o produto pontual usual, obtemos $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$. Então

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

Em outras palavras, $-1/\lambda$ é uma combinação linear de $(T_{n,j})$ para $n \geq 1$ e $j = 1, 2$. A seguir, estamos interessados principalmente em λ . Nós estudamos $(T_{n,j})$ na seção 7 através de simulações numéricas.

3. Aproximação BKW

O caso $x > x_1 = 1 - b/a_1$. Com $R_0 > 1$, conjecturamos que $\lambda \rightarrow 0$ se $N \rightarrow +\infty$. Verificaremos a posteriori, como fez por exemplo (Meerson e Sasorov, 2008) para um modelo diferente, que esse é realmente o caso. O lado esquerdo de (6) - (7) pode ser negligenciado. Para $x > x_1$, vamos procurar uma aproximação BKW (Bender e Orszag, 1978) da forma

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

onde $x = n/N$. Um desenvolvimento de Taylor da ordem 2 para $S(x)$ e da ordem 1 para $\Sigma(x)$ sugere que

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

Obtemos substituindo em (6) e simplificando por $e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}. \end{aligned}$$

As expressões em $O(N)$ dão

$$0 \simeq N x \left[e^{S'(x)} - 1 \right] \left[a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

O primeiro termo entre colchetes é nulo apenas para funções constantes $S(x)$. Escolha a solução que cancela o segundo termo entre colchetes

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

isto é dizer

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

exceto por uma constante aditiva. Isso implica $S''(x) = \frac{1}{1-x}$. A função $\Sigma(x)$ é obtido com as expressões em $O(1)$:

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left[x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1. \end{aligned}$$

Substituindo $S(x)$ pela sua expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right), \\ \Sigma(x) &= \sigma_1(x) = \log \left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right). \end{aligned}$$

A função $c(x)$ em $\pi_{n,2}$ é obtido de (7). A forma de $\pi_{n,2}$ foi escolhido para equilibrar as diferentes expressões. De fato, a ordem mais alta dá

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ N a_2 x (1 - x) \left[e^{S'(x)} - 1 \right] + b N x \left(e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

Substituindo $S(x)$ pela sua expressão, obtemos

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2) x (x - x_1)}.$$

Em resumo, conjecturamos por $x > x_1$,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-N s_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N (a_1 - a_2) x (x - x_1)}, \quad (10)$$

por uma certa constante k_1 . Considere em particular o comportamento de $\pi_{n,1}$ e de $\pi_{n,2}$ para $x > x_1$ e x perto de x_1 . Vamos definir $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$. Nós temos $s'_1(x_1) = 0$. Um desenvolvimento de Taylor dá

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s''_1(x_1) (x - x_1)^2 / 2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b} (x - x_1)^2.$$

Então

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{N c_1 - N \frac{a_1}{2b} (x - x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1}}{\sqrt{1 - x_1} (x - x_1)^{\frac{q_1}{a_1 - b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N (a_1 - a_2) x_1 (x - x_1)}. \quad (11)$$

O caso $x < x_2 = 1 - b/a_2$ se $a_1 > a_2 > b$. Simetricamente, vamos procurar uma solução se $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

para $x < x_2 = 1 - b/a_2$. O sistema (6) - (7) leva, como acima, a

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

exceto por uma constante aditiva, enquanto

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log \left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x_2 - x}{x} \right]^{\frac{q_2}{a_2 - b}} \right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

Em resumo, conjecturamos por $x < x_2$,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x)-\sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

por uma certa constante k_2 . Para $x < x_2$ e x perto de x_2 ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2 - x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2 - b} - 1}}{\sqrt{1 - x_2} (x_2 - x)^{\frac{q_2}{a_2 - b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

As figuras 2 e 3 mostram $-(\log \pi_{n,1})/N$ e $-(\log \pi_{n,2})/N$ dependendo de n/N para $1 \leq n \leq N$, com $\pi_{n,i}$ calculado usando o sistema (6) - (7). As figuras também mostram as aproximações (10) e (12) em azul escuro e vermelho. A constante k_1 em (10) é escolhido para que $\pi_{n,1}$ coincida com a sua aproximação para $n = N-1$. A constante k_2 em (12) é determinado por k_1 conforme explicado na seção 5 abaixo.

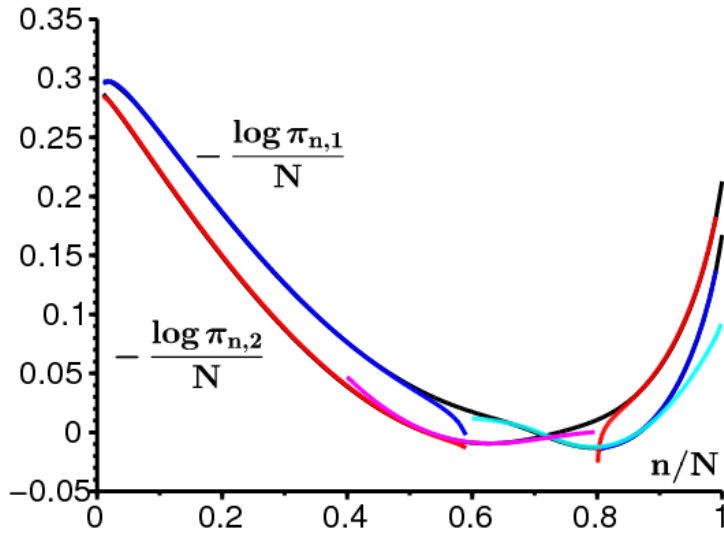


Figura 2. O exemplo com $a_1 > a_2 > b$. Em preto, sob as outras curvas: $-(\log \pi_{n,1})/N$ e $-(\log \pi_{n,2})/N$ dependendo de $x = n/N$.

Para $\pi_{n,1}$: em azul escuro, aproximações (10) para $x > x_1$ e (12) para $x < x_2$; em azul claro, aproximação difusiva (25) para $x \simeq x_1$.

Para $\pi_{n,2}$: em vermelho, aproximações (10) para $x > x_1$ e (12) para $x < x_2$; em rosa, a aproximação difusiva (31) para $x \simeq x_2$.

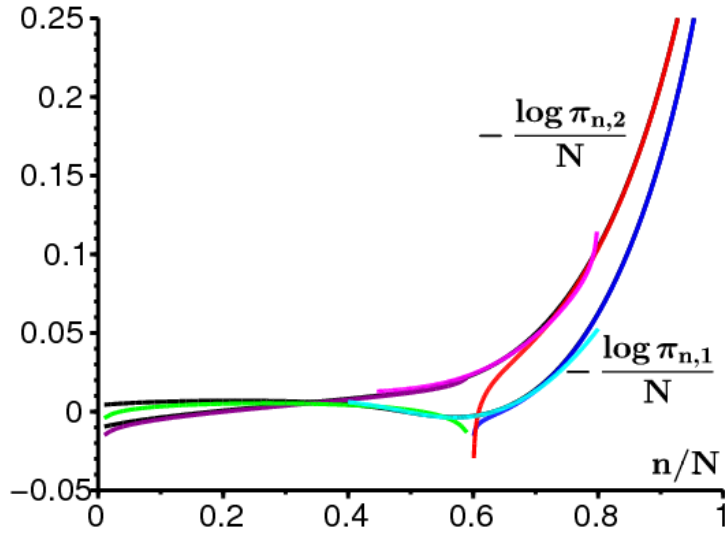


Figura 3. O exemplo com $a_1 > b > a_2$. Em preto, sob as outras curvas: $-(\log \pi_{n,1})/N$ e $-(\log \pi_{n,2})/N$ dependendo de $x = n/N$.

Para $\pi_{n,1}$: em azul escuro, a aproximação (10) para $x > x_1$; em verde, aproximação (20) para $x < x_1$; em azul claro, aproximação difusiva (25) para $x \simeq x_1$.

Para $\pi_{n,2}$: em vermelho, a aproximação (10) para $x > x_1$; em roxo, aproximação (19) para $x < x_1$; em rosa, aproximação difusiva (31) para $x \simeq x_1$.

4 Aproximação na área de variação lenta

Estamos procurando uma aproximação de $\pi_{n,1}$ e $\pi_{n,2}$ para $x_2 < x < x_1$ se $a_1 > a_2 > b$ e para $0 < x < x_1$ se $a_1 > b > a_2$. Durante esses intervalos, $S(x) = 0$. Vamos considerar o sistema (6) - (7) e tentar diretamente a aproximação contínua $\pi_{n,1} \simeq y(x)$, $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ com $x = n/N$. Um desenvolvimento de Taylor dá

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

Com $\lambda \approx 0$, isso leva à aproximação difusiva

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

Negligenciando $1/N$, obtemos as equações

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

que são da mesma forma que as equações (29) - (30) de (Slatkin, 1978). Adicionando as equações (16) e (17), encontramos

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

A função entre colchetes é, portanto, constante. Como x é um fator, isso sugere fazer $x \rightarrow 0$ que essa constante é zero:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

Isso permite expressar $y(x)$ dependendo de $z(x)$. Substituindo em (17), obtemos após algumas manipulações

$$\frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)},$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \quad (19)$$

para alguns constante C . Essa aproximação é mostrada em roxo na Figura 3. A constante C é determinada por k_1 como mostrado na seção 5 abaixo. Então as equações (18) e (19) mostram que

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1 x(1-x) - bx} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

Essa aproximação é mostrada em verde na Figura 3. Se $x \simeq x_1$ com $x < x_1$, nós obtemos

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1 x_1} \left(\frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}. \quad (21)$$

Se $a_1 > b > a_2$, encontramos para $x \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

Lembre-se disso $R_0 = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$ é equivalente a $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$ neste caso. Em particular, a integral de $z(x)$ nas proximidades de 0^+ é convergente. Se $a_1 > a_2 > b$, então (19) mostra

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2 x_2} \left(\frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} \quad (24)$$

perto de x_2 com $x > x_2$.

5 Aproximação difusa perto x_1 e x_2

A situação perto x_1 . Perto de $x = x_1$ e $x = x_2$, a difusão em (14) - (15) não pode mais ser negligenciada. Análise de zonas de transição em x_1 e x_2 deve permitir que a constante C em (21) e (24) seja ligada às constantes k_1 de (10) e k_2 de (12). Vamos definir $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$. Então o coeficiente da derivada da ordem 1 em (14) pode ser aproximado por uma expansão de Taylor da ordem 1

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

Nós negligenciamos $q_2 z$ na frente $q_1 y$ se $x \simeq x_1$:

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b}\right) y.$$

Com

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

nós temos a equação diferencial Hermite

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

Estamos procurando uma solução na forma de uma série inteira

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

Obtemos a relação de recorrência

$$w_{n+2} = \frac{2(n + 2\alpha_1)}{(n + 2)(n + 1)} w_n,$$

onde $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$. Portanto, temos duas soluções linearmente independentes

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

onde γ_1 e γ_2 são constantes e

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$$

é a função hipergeométrica confluyente de Kummer. De acordo com (Maroni, 1997, equação (93)), temos $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta}$ se $z \rightarrow +\infty$, onde Γ é a função gama de Euler. Então

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1-1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

Então $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ tem o mesmo comportamento assintótico que (21) quando $\eta_1 \rightarrow -\infty$, desde que

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (26)$$

Se pelo contrário $\eta_1 \rightarrow +\infty$, (11) sugere que $Y(\eta_1)$ deve se comportar como uma certa constante multiplicada por $\eta_1^{-2\alpha_1}$. A teoria das funções hipergeométricas confluentes (Maroni, 1997) mostra que é necessário impor

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

para uma certa constante K obter esse comportamento assintótico. De fato, temos então

$$Y(\eta_1) = K \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

isto é dizer $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$ para $\eta_1 > 0$ onde $\Psi(\alpha, \beta; z)$ é a função hipergeométrica confluyente de Tricomi definida por

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

De acordo com (Maroni, 1997, equação (90)), temos $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$ se $z \rightarrow +\infty$. Então $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$ se $\eta_1 \rightarrow +\infty$.

O equivalente a $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ coincide com (11) desde que

$$K \left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

Em resumo, as relações (26), (27) e (29) determinam K , γ_1 , γ_2 e C dependendo de k_1 . Em particular, porque $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, a equação (26) fornece

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

Uma forma alternativa pode ser obtida usando a fórmula Legendre-Gauss $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$.

A situação perto x_2 . Se $a_2 > b$, fazemos uma análise semelhante com (15) próximo a $x = x_2 = 1 - b/a_2$. Nós negligenciamos $q_1 y$ na frente $q_2 z$. Se

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

tão

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes. O comportamento para $\eta_2 \rightarrow +\infty$ coincide com (24) desde que

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left(\frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

Vamos definir

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

por uma certa constante \hat{K} (observe o sinal de menos para δ_2) Então $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$ se $\eta_2 < 0$. Então $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$ para $\eta_2 \rightarrow -\infty$. Isso coincide com (13), desde que

$$\hat{K} \left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

Como acima, (32) e (33) dão

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C [a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

Então as constantes k_2 , \hat{K} , δ_1 e δ_2 são determinados pela constante C .

6 Valor próprio

Lembre-se disso $M\pi = \lambda\pi$. Adicionando todas as linhas deste sistema de equações, obtemos $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$. Mas $\lambda < 0$. Então

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

As duas primeiras linhas do sistema são

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}. \end{aligned}$$

Ao adicioná-los, encontramos

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

Vamos primeiro considerar o caso em que $a_1 > b > a_2$ com $R_0 > 1$. Então (19) mostra

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

onde κ_1 é uma constante positiva independente de N . Usando o fato de que o pico de $\pi_{n,1}$ está perto de $x = n/N = x_1$ e relações (25), (28) e (30), encontramos

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

onde κ_j (Acima e abaixo) ainda são constantes positivas, que são independentes da N . Portanto, o termo dominante para N grande no denominador de (36) é aquele com $\pi_{n,2}$. No numerador, $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$ e $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$ onde $y(x)$ e $z(x)$ são dadas por (22) - (23), obtemos que

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{(\frac{1}{N})^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

Em outras palavras, $-1/\lambda$ aumenta com N como lei de potência, cujo expoente é

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

conforme anunciado na introdução. Notamos ainda que ω converge para $+\infty$ se a_2 converge para b por valores mais baixos.

Agora considere o caso em que $a_1 > a_2 > b$. Para simplificar, vamos apresentar a notação $f \approx g$ (não confunda com o símbolo informal \simeq usado acima) se $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$ se $N \rightarrow +\infty$. Em particular $N^\beta \approx 1$ para todos os β . Então (12) com $x = l/N$ mostra que $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$. Além disso,

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s_2'(0)} \approx k_2.$$

Além disso, o pico de $\pi_{n,1}$ está perto de $x = n/N = x_1$ enquanto o de $\pi_{n,2}$ está perto de x_2 . Assim (37) ainda é válido e mostra

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

enquanto (31), (33) e (35) fornecem

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

Mas (34) e (35) mostram

$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

Assim (36) dá $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$ e $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$. Finalmente, $-1/\lambda$ cresce aproximadamente exponencialmente com um parâmetro c_2 .

7 O tempo médio para extinção

O sistema linear (8) - (9) pode ser resolvido com o método numérico apresentado por (Artalejo et al., 2013). O método usa apenas matrizes quadradas da ordem 2 e reduz a instabilidade numérica. Lembre-se disso $q_1 = q_2 = 1$ e $b = 2$.

Primeiro exemplo: $a_1 > a_2 > b$. Vamos dar $a_1 = 10$ e $a_2 = 5$. A Figura 4a mostra $T_{n,1}$ e $T_{n,2}$ dependendo de $x = n/N$. A Figura 4b sugere que o tempo médio de extinção, começando por exemplo com N infectados no ambiente 1, aumenta aproximadamente exponencialmente: $T_{N,1} \approx e^{cN}$. A regressão linear fornece $c \simeq 0.32$. Note que $c_1 \simeq 0.81$ e $c_2 \simeq 0.32$, o que sugere que $c = c_2$.

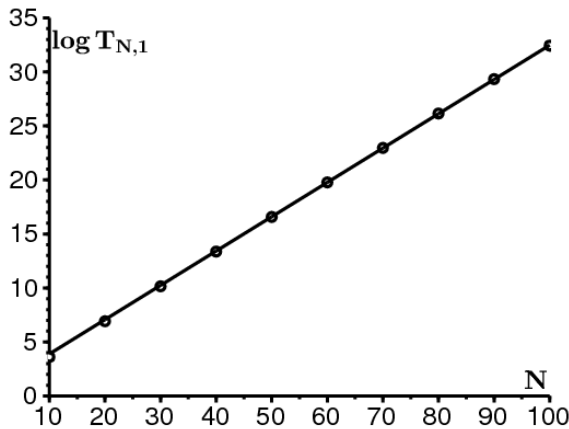
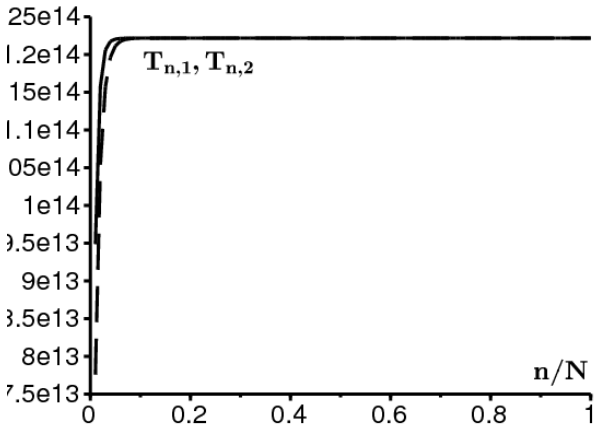


Figura 4. O caso $a_1 > a_2 > b$. a) $T_{n,1}$ [linha sólida] e $T_{n,2}$ [linha pontilhada] dependendo da n/N se $N = 100$. b) $\log T_{N,1}$ dependendo de N .

Segundo exemplo: $a_1 > b > a_2$ e $R_0 > 1$. Vamos dar $a_1 = 5$ e $a_2 = 1$. Então $R_0 = 1.5 > 1$. A Figura 5a mostra $T_{n,1}$ e $T_{n,2}$ dependendo de $x = n/N$. A Figura 5b mostra $\log T_{N,1}$ dependendo de $\log N$. Temos uma linha reta sugerindo uma lei de energia

$T \sim \kappa N^\omega$. A inclinação, obtida por regressão linear, é $\omega \simeq 0.67$. Nesse caso, temos $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, que corresponde bem à inclinação medida.

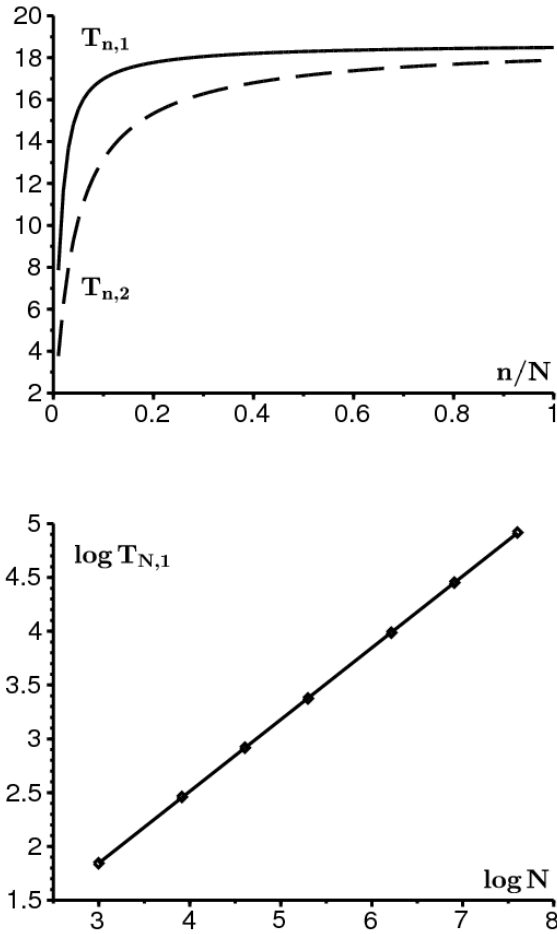


Figura 5. O caso $a_1 > b > a_2$ com $R_0 > 1$. a) $T_{n,1}$ e $T_{n,2}$ dependendo de $x = n/N$ se $N = 100$. b) $\log T_{N,1}$ dependendo de $\log N$.

8 notas

Comparação com o caso periódico.

Para destacar a diferença entre um ambiente aleatório e um ambiente periódico, vamos considerar o caso em que $a_1 = 5$ e $a_2 = 1$ enquanto $q_1 = q_2 = 1$ e $b = 2$. Então $u_1 = u_2 = 0.5$: o ambiente gasta em média metade do tempo no estado 1, a outra metade no estado 2. A Figura 6 mostra de um lado como $T_{N,1}$ aumenta em função de N como uma lei de potência. Por outro lado, considere o mesmo modelo de SIS, mas em um ambiente periódico (Bacaër, 2015): vamos escolher $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, $a(t) = a_1$ para $0 < t < u_1 T$ e $a(t) = a_2$ para $u_1 T < t < T$. Para este modelo, $e^{\Lambda T}$ é o multiplicador Floquet associado ao processo de extinção. A Figura 6 mostra como $-1/\Lambda$ cresce exponencialmente com N .

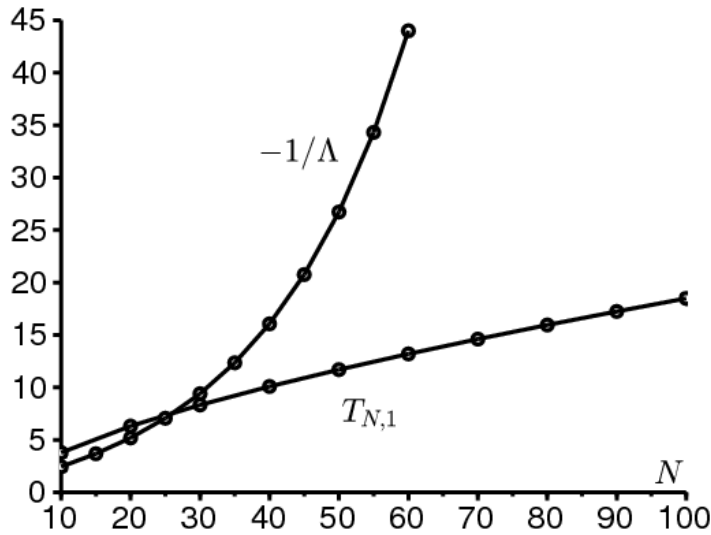


Figura 6. Tempo médio para extinção $T_{N,1}$ em um ambiente aleatório e $-1/\Lambda$ em um ambiente periódico semelhante.

As equações médias do campo. Pode ser útil lembrar, seguindo (Bacaër e Ed-Darraz, 2014) que as equações médias do campo

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,\end{aligned}$$

uma vez linearizado próximo ao estado de equilíbrio $(0,0)$, leva à matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

Mas podemos ter ao mesmo tempo

- um autovalor estritamente positivo, de modo que o equilíbrio trivial seja instável,
- $R_0 < 1$.

Outro limite. Os resultados obtidos consideram que os parâmetros q_j , a_j e b são fixos enquanto N converge para o infinito. As coisas são obviamente diferentes se, por exemplo, q_1 e q_2 convergem para o infinito, com uma proporção constante q_1/q_2 . O modelo então se aproxima de um modelo homogeneizado em um ambiente constante com um parâmetro de contato médio $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$.

O caso subcrítico. Não abordamos o caso subcrítico $R_0 < 1$ com $a_1 > b > a_2$ ou então $b > a_1 > a_2$. O comportamento do tempo médio de extinção é aproximadamente o mesmo que em um ambiente constante: a partir de uma fração fixa da população infectada, o tempo médio é da ordem de $\log N$ (Doering et al., 2005). A partir de uma fração infectada I/N , o tempo médio converge, pelo contrário, para um limite. No caso de um ambiente aleatório, é também isso que as simulações digitais sugerem.

9 cadeia de Markov com número finito de estados

Com J estados, lembre-se de que o gerador infinitesimal Q é tal que $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$ por tudo j . Suponha que essa matriz Q é irreduzível e que $a_1 > a_2 > \dots > a_J$. Se $a_J > b$, o tempo médio de extinção aumenta aproximadamente exponencialmente com o tamanho N da população, com uma taxa $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$. É realmente no ambiente J que a extinção é mais provável.

Se, por outro lado, $b > a_J$ e $R_0 > 1$ nota $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ com $x = n/N$. Nas proximidades de $x = 0$, o sistema (16) - (17) torna-se

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

Procurando uma solução $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$ com $\omega > 0$ e $\theta_j > 0$ para todos j , encontramos

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

para $1 \leq j \leq J$. Com as anotações da introdução, temos, portanto, o problema de autovalor generalizado $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ com $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$.

Vamos mostrar

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$ é uma matriz diagonal. Para qualquer número real s ,

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$ tem todos os seus coeficientes fora da diagonal positivos ou nulos. Além disso, essa matriz é irredutível. De acordo com um corolário do teorema de Perron e Frobenius (Smith, 1995, corolário 3.2), $\mu(s)$ é um autovalor simples de $Q - sD$ (chamado valor próprio dominante) e existe um vetor próprio $\phi(s)$ cujos componentes são estritamente positivos, de modo que

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

Esse autovetor é único com a normalização

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

De acordo com o mesmo corolário, a existência de um vetor θ com $\theta_j > 0$ por tudo j e $(Q - \omega D)\theta = 0$ na verdade equivale a $\mu(\omega) = 0$. Trata-se, portanto, de mostrar que a equação $\mu(\omega) = 0$ com $\omega > 0$ tem uma solução única.

Em relação à existência, notamos primeiro que o gerador infinitesimal Q corresponde a $s = 0$: nós temos $\mu(0) = 0$ e notamos $u = \phi(0)$ o vetor próprio à direita. Vetor de linha $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$ é um vetor próprio à esquerda de Q associado ao valor próprio 0. Assim,

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

De acordo com o teorema da perturbação do autovalor simples, a função $\mu(s)$ é diferenciável em $s = 0$ e

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

Mas $R_0 > 1$ é equivalente a $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$. Então $\mu'(0) < 0$. Além disso, temos $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$ por tudo $s > 0$. Se $s \rightarrow +\infty$ nós temos $Q/s - D \rightarrow -D$. Pela continuidade do espectro,

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j(-D_{j,j}) = \max_j(b - a_j) = b - a_J > 0.$$

Então $\mu(s) \rightarrow +\infty$ se $s \rightarrow +\infty$. Porque $\mu(0) = 0$ e $\mu'(0) < 0$, deduzimos que existe $\omega > 0$ com $\mu(\omega) = 0$.

Quanto à singularidade, observe primeiro que a função $\mu(s)$ é convexo. De fato, para todos os números reais ω_1, ω_2 e $0 < \varepsilon < 1$, nós vemos isso $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$ é o autovalor dominante da matriz $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$. De acordo com um teorema de (Cohen, 1981), esse valor próprio é menor ou igual a $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$. Isso prova a convexidade. Suponha agora que exista $\omega_1 > \omega_2 > 0$ com $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$. Porque $\mu(0) = 0$ e porque $\mu(s)$ é convexo, deduzimos $\mu(s) = 0$ para $0 \leq s \leq \omega_1$. Isso contradiz $\mu'(0) < 0$.

$A - B$ é uma matriz invertível se $a_j \neq b$ para todos j . Então $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ é equivalente a $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$. Então ω é o autovalor de $(A - B)^{-1}Q$ cuja parte real é a maior.

Finalmente, a equação (36) torna-se

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

No numerador, temos $\pi_{1,j} \simeq \theta_j(1/N)^{\omega-1}$. No denominador, temos

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

Então $-1/\lambda$ aumenta com N como N^ω .

É sem dúvida possível generalizar esse resultado se o ambiente for governado, por exemplo, por uma equação diferencial estocástica

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

Vamos definir L^* o operador diferencial

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

Assumimos que $u(\xi)$ é uma probabilidade invariável:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

Então, no caso da equação de Langevin, temos

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

Assumimos que a taxa de contato $a(\cdot)$ é uma função \mathbb{R} com $\min a(\cdot) < b$ e

$$R_0 = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

O tempo médio de extinção aumenta com N como N^ω onde ω é o único número positivo para o qual o operador diferencial $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$ tem um autovalor principal igual a 0. Para a convexidade desse autovalor em função de ω , ver (Kato, 1982). Observe que o operador assistente do L^* é

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

e $L\mathbf{1} = 0$ se $\mathbf{1}$ denota a função constante igual a 1.

10 Um ambiente periódico e aleatório

Voltemos ao caso de um conjunto finito de ambientes. Agora assumimos que o gerador infinitesimal $Q(t)$

- é uma função periódica do período \mathcal{T}
- é uma função contínua ou contínua por partes,
- é irredutível pelo menos durante um intervalo de t .

O sistema (4) - (5) assume a forma $\frac{dP}{dt} = M(t)P$. A seguir (Bacaër, 2015), há então um único casal (λ, π) com

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$ é uma função periódica do período \mathcal{T}

$$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$

- $\pi_{n,j}(t) > 0$ para $1 \leq n \leq N$ e $1 \leq j \leq J$.

Além disso,

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

Há também uma função única \mathcal{T} -periódica $u(t)$ com

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

Como (Bacaër e Ed-Darraz, 2014), definimos

$$R_0 = \left(\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

Conjecturamos que se $a_1 > \dots > a_J > b$, o tempo médio para extinção aumenta novamente exponencialmente com N , com uma taxa

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

Se, por outro lado, $a_J < b$ mas $R_0 > 1$, a aproximação $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$ leva a generalizar (38) nas proximidades de $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

Uma solução do formulário $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$, com uma função $\theta(t) = (\theta_j(t))$ \mathcal{T} periódico, deve verificar

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

Existe um único número real $\mu(\omega)$ para qual $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ é o multiplicador Floquet dominante do sistema

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

Essa matriz é uma função periódica do período \mathcal{T} . Os coeficientes fora da diagonal são positivos ou zero. A matriz é irredutível ao longo de um intervalo de t . Podemos mostrar que existe uma única $\omega > 0$ com $\mu(\omega) = 0$. Usamos como na seção 9

- a convexidade de $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$ se $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$ se $a_J < b$.

Observe que a convexidade de $\mu(\omega)$ é demonstrado simplesmente generalizando o argumento de (Cohen, 1981). Nós usamos

- a log-convexidade do raio espectral de matrizes com coeficientes no conjunto de funções zero ou log-convexas em ω , observada \mathfrak{S}
- \mathfrak{S} é estável por adição, multiplicação e transição para o limite

(Kingman, 1961). De fato, $Q(t)$ é uma função periódica contínua por partes, que pode ser abordada por uma função de etapa. Q_k é a matriz aproximada ao longo do intervalo (τ_k, τ_{k+1}) para $k = 0, \dots, K-1$ com $\tau_0 = 0$ e $\tau_K = \mathcal{T}$. Se $Q(t)$ foi essa função de escada, $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ seria igual ao raio espectral do produto das matrizes

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

Segundo (Cohen, 1981), cada uma dessas matrizes tem seus coeficientes em \mathfrak{S} . Portanto, o produto das matrizes também possui coeficientes em \mathfrak{S} . Seu raio espectral é log-convexo em ω .

Porque

$$\lambda = -b \frac{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

concluimos como antes $-1/\lambda$ provavelmente aumenta com N como N^ω .

Agradecimentos

Este artigo foi estimulado por uma reunião no *Instituto de Ciências Matemáticas* de Madri em outubro de 2014, por palestras na Universidade de Tlemcen em maio de 2015 e por um seminário na *Universidade Nova de Lisboa* em junho de 2015.

Referências

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299

- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. *Am Nat* 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. *J Theor Biol* 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. *SIAM–AMS Proceedings* 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise–driven unlimited population growth. *Phys Rev E* 78 : 060103
- Nåsell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. *Ecology* 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. *Theor Popul Biol* 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence