

# Het SIS-stochastisch model voor een epidemie in een willekeurige omgeving

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, Frankrijk  
Pierre en Marie Curie University, Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk  
nicolas.bacaer@ird.fr

## Overzicht

In een willekeurige omgeving die een Markov-keten is in een continue tijd met twee staten, neemt de gemiddelde tijd tot uitsterven van het SIS-stochastische model voor een epidemie, in het superkritische geval, exponentieel toe met betrekking tot de populatiegrootte als beide staten zijn gunstig, en volgens een machtswet als een van de staten gunstig is, terwijl de andere ongunstig is voor voortplanting.

## 1 Inleiding

Laat  $N$  de populatiegrootte zijn, verondersteld constant te zijn. In het SIS-stochastisch model voor een epidemie is elk individu ofwel gezond (S) of geïnfecteerd (I) (Näsell, 2011). Stel je voor dat de omgeving een Markov-keten volgt in continue tijd met twee staten.  $q_j$  ( $j = 1, 2$ ) is het uitstappercentage van staat  $j$ . In omgeving  $j$  is het contactpercentage van elk individu  $a_j > 0$ . Als op een bepaald moment  $t$  het aantal geïnfecteerde personen  $n$  is en de omgeving  $j$  is, is de kans op een nieuwe infectie tussen  $t$  en  $t + dt$ , met  $dt$  oneindig klein,  $a_j n(1 - n/N) dt$ . Stel dat de genezingsnelheid  $b > 0$  van een individu in beide omgevingen hetzelfde is. De kans op een nieuwe genezing bij de bevolking is dan  $b n dt$  tussen  $t$  en  $t + dt$ . Dit model is onderzocht door (Artalejo et al., 2013) maar niet in die mate dat de grootte  $N$  van de populatie groot wordt. Het is bovendien een bijzonder geval van het geboorte- en sterfproces in een Markoviaanse omgeving (Cogburn en Torrez, 1981).

Laten we definiëren

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

Dus  $Q$  is de oneindig kleine generator, terwijl  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) is het deel van de tijd doorgebracht in omgeving 1 (resp. 2). Voor het gelineariseerde model, namelijk het lineaire proces van geboorte en dood in een willekeurige omgeving van parameters  $a_j$  en  $b$ , (Bacaër en Ed-Darraz, 2014) merkt op dat er bijna zeker uitsterving is als en alleen als  $R_0 \leq 1$ . Voor het niet-lineaire SIS-model daarentegen is er uitsterven ongeacht de waarde van de parameter  $R_0$ . Als de populatie  $N$  echter groot is, is de gemiddelde tijd tot uitsterven groot als  $R_0 > 1$  en klein als  $R_0 < 1$ . Als  $T_{n,j}$  is de gemiddelde tijd met aanvankelijk  $n$  geïnfecteerde mensen in de omgeving  $j$ , dan voor  $1 \leq n \leq N$ ,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + b n T_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + b n + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + b n T_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + b n + q_2}. \quad (2)$$

Bovendien  $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$ . Het doel van dit artikel is om te studeren in het superkritische geval, dat wil zeggen of  $R_0 > 1$ , het gedrag van de gemiddelde tijd tot uitsterven wanneer de populatiegrootte  $N$  groot wordt.

In een constante omgeving met een contact rate  $a$  met  $R_0 = \frac{a}{b} > 1$  (Doering et al., 2005, tabel 1) laat zien dat de gemiddelde tijd tot uitsterven van een geïnfecteerde fractie van de populatie  $x = n/N$  toeneemt wanneer  $N \rightarrow \infty$ , onafhankelijk van  $x$ , zoals  $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ , waar  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ . Met andere woorden, is de gemiddelde tijd die groeit bijna exponentieel met  $N$ . (Bacaër, 2015) suggereert een vergelijkbaar resultaat wanneer de omgeving periodiek is, zelfs als er geen expliciete formule is voor de groeiparameter  $c$ .

In een superkritische willekeurige omgeving, d.w.z. met  $R_0 > 1$ , suggereert het volgende artikel dat twee gevallen moeten worden onderscheiden: een zeer superkritisch geval waar  $a_1 > a_2 > b$  en een zwak superkritisch geval waar  $a_1 > b > a_2$ . In het zeer superkritische geval waar  $a_1 > a_2 > b$ , we veronderstellen dat de gemiddelde tijd tot uitsterven ongeveer exponentieel toeneemt met  $N$  met een parameter  $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$ . Om precies te zijn, de logaritme van deze gemiddelde tijd, gedeeld door  $N$ , convergeert naar  $c_2$ . Het asymptotische gedrag is dus hetzelfde als wanneer de omgeving geblokkeerd zou blijven in toestand 2, dat wil zeggen datgene wat het minst gunstig is voor de verspreiding van de epidemie en dat waarbij uitsterven bij voorkeur plaatsvindt.

Maar als  $a_1 > b > a_2$  en  $R_0 > 1$ , dan vermoeden we dat de gemiddelde tijd tot uitsterven toeneemt als  $N^\omega$  met

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

In dit geval  $R_0 > 1$  is gelijk aan  $\omega > 0$ . Intuïtief gebeurt het van tijd tot tijd dat men heel lang in toestand 2 blijft. De kans dat deze duur groter is dan  $\tau$  is  $e^{-q_2 \tau}$ . In toestand 2 is de gemiddelde extinctietijd voor  $N$  groot in de orde van grootte van  $\tau \simeq \frac{\log N}{b - a_2}$  (Doering et al., 2005); dit kan ook worden geraden uit de quasi-extinctievergelijking  $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$ . Dus uiteindelijk is de kans op uitsterven gedurende een periode in toestand 2 van de orde van grootte  $e^{-q_2 \tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$ . Dit suggereert dat de gemiddelde tijd tot uitsterven in de orde van grootte van het omgekeerde ligt, d.w.z.  $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$ . Volgens onze analyse is de orde van grootte eigenlijk  $N^\omega$  met  $\omega$  gegeven door (3).

Merk ook op dat als  $q_1$  en  $q_2$  worden vermenigvuldigd met  $1 + \varepsilon$  met  $\varepsilon > 0$ , dus  $R_0$  blijft ongewijzigd maar  $\omega$  wordt vermenigvuldigd met  $1 + \varepsilon$ : in dit model heeft een grotere variabiliteit in de omgeving de neiging de gemiddelde extinctietijd te verlengen.

Deze wet in  $N^\omega$  lijkt te kunnen generaliseren in het geval van een omgeving met  $J$ - staten als

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

Men heeft

$$R_0 = \left( \sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

als  $Q$  de oneindig kleine generator is en als  $u$  de enige vector is met

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(Bacaër en Ed-Darraz, 2014). Laat  $A$  en  $B$  de diagonale matrices aanduiden  $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$  en  $\text{diag}(b, \dots, b)$ . Beschouw de spectraal gebonden

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

waar  $\sigma(\cdot)$  geeft het spectrum van een matrix aan en  $\Re(\cdot)$  het echte deel van een complex getal. We laten zien

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

Vervolgens vermoeden we dat de gemiddelde tijd tot uitsterven toeneemt als  $N^\omega$ . In het specifieke geval waar  $a_j \neq b$  voor alle  $j$  is het getal simply gewoon de eigenwaarde van het grootste reële deel van de matrix  $(A - B)^{-1}Q$ . Deze matrix en de uitdrukking van de eigenwaarde  $\omega$  gegeven door (3) voor  $I = 2$  zijn al gevonden in (Sawyer en Slatkin, 1981, vergelijkingen (14) en (20)) voor een populatiemodel zonder demografische stochasticiteit in de subkritisch geval ( $R_0 < 1$ ); In dit geval is de gemiddelde tijd tot de beëindiging verhoogt echter de logaritme van  $N$ .

Verscheidende auteurs hebben een machtswet gevonden voor het uitsterven van populatiemodellen in een Brownse willekeurige omgeving (Ludwig, 1976; Leigh, 1981; Lande, 1993). Ze gebruiken een diffusievergelijking als uitgangspunt. Echter (Gaveau et al., 1996) en (Doering et al., 2005) hebben aangetoond dat deze vergelijking leidt tot een onnauwkeurige formule voor de parameter  $c$ . Deze vergelijking vertegenwoordigt inderdaad niet altijd goed de staart van de quasi-stationaire verdeling, wat precies het belangrijkste onderdeel is om het uitstervingsproces te bestuderen. Merk echter op dat (Kamenev et al., 2008) het probleem van uitsterven voor populaties in een willekeurige omgeving met gekleurde ruis aanpakken met behulp van padintegralen.

Hoofdstuk 2 presenteert de quasi-stationaire verdeling van het model. Sectie 3 gebruikt de methode van Brillouin, Kramers en Wentzel (BKW) om geldige benaderingen te verkrijgen in de zones van de parameter  $x = n / N$  waar de verdeling snel varieert. Paragraaf 4 gebruikt een andere benadering in het gebied waar de verdeling langzaam varieert. Sectie 5 gebruikt een diffusievergelijking om de twee eerdere benaderingen te verbinden: de samenvloeiende hypergeometrische functies van Kummer en Tricomi vervangen hier de Gauss-foutfunctie die met name wordt gebruikt door (Meerson en Sasorov, 2008). Paragraaf 6 schat de eigenwaarde geassocieerd met de quasi-stationaire verdeling.

Geen van deze benaderingen is rigoureus verkregen, maar sectie 7 presenteert niettemin numerieke simulaties die de numerieke waarde van de exponenten lijken te bevestigen voor de exponentiële wet in het sterk superkritische geval en voor de machtswet in het zwak superkritische geval. Hoofdstuk 8 voegt enkele opmerkingen toe. In het bijzonder vergelijken we in het zwak superkritische regime het geval van een Markoviaanse omgeving en dat van een periodieke omgeving met dezelfde hoeveelheid tijd in een gunstige of ongunstige staat: de eerste leidt tot een machtswet voor de tussentijd tot uitsterven, de tweede van een exponentiële wet. Sectie 9 behandelt het geval van een Markov-keten met een eindig aantal staten en bespreekt andere generalisaties.

## 2 Quasi-stationaire distributie

Overweeg de kans dat er  $n$  geïnfecteerde mensen zijn in omgeving  $j$  op tijdstip  $t$ :  $p_{n,j}(t)$ . Dus

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - \left[ a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - \left[ a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Laten we definiëren

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$ : een kolomvector
- $A_n = \text{diag}[a_1 n (1 - \frac{n}{N}), a_2 n (1 - \frac{n}{N})]$ : een diagonale matrix van orde twee
- $B_n = \text{diag}[bn, bn]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

Het systeem (4) - (5) heeft de vorm

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

De eigenwaarden van  $M$  zijn die van  $Q$  en van  $R$ . De eigenwaarden van  $Q$  zijn  $0$  en  $-(q_1 + q_2)$ . De coëfficiënten van de matrix  $R$  buiten de diagonaal zijn positief of nul. Verder is de matrix  $R$  onherleidbaar, zoals we kunnen zien met de bijbehorende grafiek. Een uitvloeisel van de stelling van Perron en Frobenius (Smith, 1995, uitvloeisel 3.2) laat zien dat de matrix  $R$  een echte eigenwaarde  $\lambda$  heeft die simpel is, strikt groter dan het reële deel van alle andere eigenwaarden, en met een bijbehorende eigenvector met strikt positieve componenten. Als  $\mathbf{1}$  de lijnvector  $[1, 1, \dots, 1]$  is van maat  $2N$ , dan

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

Volgens (Berman en Plemmons, 1994, Stelling 6.2.3, L33) hebben we dat  $\lambda < 0$ . We kiezen  $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$  een eigenvector van  $M$  geassocieerd met de eigenwaarde  $\lambda$ :  $M\pi = \lambda\pi$ . Met andere woorden

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,1} = & - \left[ a_1 n \left( 1 - \frac{n}{N} \right) + b n + q_1 \right] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1) \left( 1 - \frac{n-1}{N} \right) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,2} = & - \left[ a_2 n \left( 1 - \frac{n}{N} \right) + b n + q_2 \right] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1) \left( 1 - \frac{n-1}{N} \right) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

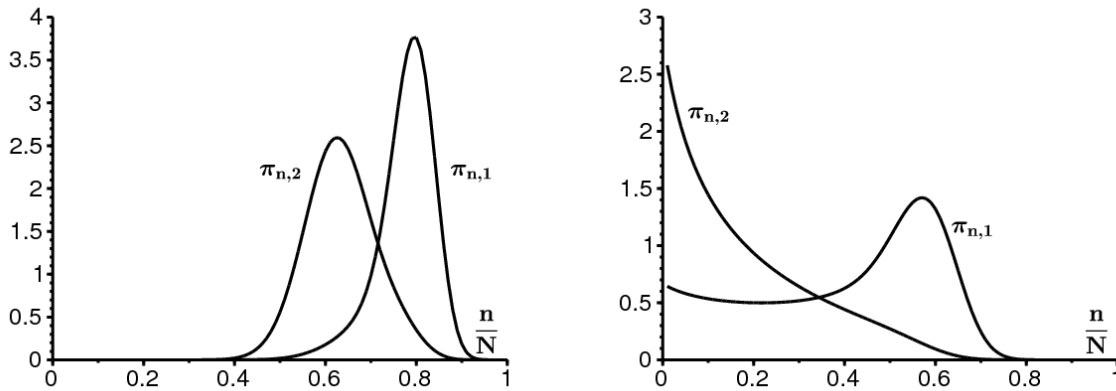
Laten we de eigenvector normaliseren door bijvoorbeeld op te leggen

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

Figuur 1 laat zien  $\pi_{n,1}$  en  $\pi_{n,2}$  als functie van  $n/N$  voor  $n \geq 1$  in twee gevallen: een geval waar  $R_0 > 1$  en  $a_1 > a_2 > b$ , een geval waar  $R_0 > 1$  en  $a_1 > b > a_2$ . De eigenvector  $\pi$  wordt berekend met de Scilab-software. De top van  $\pi_{n,1}$  is dichtbij  $x_1 = 1 - b/a_1$ , zoals je zou verwachten als je nadenkt over de gemiddelde veldvergelijking voor de verhouding  $i$  van geïnfecteerde mensen

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

Inderdaad  $x_1$  is de enige stabiele evenwichtstoestand van deze vergelijking. De top van  $\pi_{n,2}$  is dichtbij  $x_2 = 1 - b/a_2$  als  $a_2 > b$  en dichtbij  $x = 0$  als  $a_2 < b$ .



Figuur 1. De componenten  $\pi_{n,1}$  en  $\pi_{n,2}$  voor  $n \geq 1$  van de eigenvector  $\pi$  als functie van  $n/N$  bij  $N = 100$ ,  $q_1 = 1$  en  $q_2 = 1$ . Andere parameterwaarden: a)  $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ , b)  $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$ .

Laten we definiëren

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$ .

Het lineaire systeem (1) - (2) kan in de vorm worden geschreven

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n \left( 1 - \frac{n}{N} \right) (T_{n+1,1} - T_{n,1}) + b n (T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n \left( 1 - \frac{n}{N} \right) (T_{n+1,2} - T_{n,2}) + b n (T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

Systemen (8) - (9) en (6) - (7) laten dat zien

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

waar de ster  $*$  de transpositie van vectoren of matrices aangeeft. Door het gebruikelijke dot-product te nemen, krijgen we  $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$ . Dus

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

Met andere woorden  $-1/\lambda$  is een lineaire combinatie van  $(T_{n,j})$  voor  $n \geq 1$  en  $j = 1, 2$ . Hieronder zijn we vooral geïnteresseerd in  $\lambda$ . We studeren  $(T_{n,j})$  in sectie 7 door middel van numerieke simulaties.

### 3. BKW-benadering

**De zaak**  $x > x_1 = 1 - b/a_1$ . Met  $R_0 > 1$ , vermoeden we dat  $\lambda \rightarrow 0$  als  $N \rightarrow +\infty$ . We zullen a posteriori verifiëren, zoals bijvoorbeeld (Meerson en Sasorov, 2008) voor een ander model, dat dit inderdaad het geval is. De linkerkant van (6) - (7) kan dus worden verwaarloosd. Voor  $x > x_1$ , laten we zoeken naar een BKW-benadering (Bender en Orszag, 1978) van het formulier

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

waar  $x = n/N$ . Een Taylor-ontwikkeling van order 2 voor  $S(x)$  en van order 1 voor  $\Sigma(x)$  suggereert dat

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

We verkrijgen door vervanging in (6) en vereenvoudiging door  $e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$

$$0 \simeq a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) + bN \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - bN x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}.$$

De uitdrukkingen in  $O(N)$  geven

$$0 \simeq Nx \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] \left[ a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

De eerste term tussen vierkante haken is alleen null voor constante functies  $S(x)$ . Kies de oplossing die de tweede term tussen vierkante haken annuleert

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

dat wil zeggen

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

behalve een additieve constante. Dit houdt in  $S''(x) = \frac{1}{1-x}$ . De functie  $\Sigma(x)$  wordt verkregen met de uitdrukkingen in  $O(1)$ :

$$0 \simeq a_1 N \left[ x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[ 1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) + bN \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[ 1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - bN x - q_1.$$

Door te vervangen  $S(x)$  door zijn uitdrukking krijgen we

$$\Sigma'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\Sigma(x) = \sigma_1(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right).$$

De functie  $c(x)$  in  $\pi_{n,2}$  is verkregen van (7). De vorm van  $\pi_{n,2}$  is gekozen om de verschillende uitdrukkingen in evenwicht te brengen. Inderdaad, de hoogste orde geeft

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ Na_2 x (1 - x) \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] + bN x \left( e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

Door te vervangen  $S(x)$  door zijn uitdrukking krijgen we

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2)x(x - x_1)}.$$

Samenvattend vermoeden we  $x > x_1$ ,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-Ns_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x(x - x_1)}, \quad (10)$$

voor een bepaalde constante  $k_1$ . Denk in het bijzonder aan het gedrag van  $\pi_{n,1}$  en van  $\pi_{n,2}$  voor  $x > x_1$  en  $x$  dichtbij  $x_1$ . Laten we definiëren  $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$ . Men heeft  $s'_1(x_1) = 0$ . Een Taylor-ontwikkeling geeft

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s''_1(x_1)(x - x_1)^2/2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b}(x - x_1)^2.$$

Dus

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2} x_1^{\frac{a_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1} (x-x_1)^{\frac{a_1}{a_1-b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x_1(x-x_1)}. \quad (11)$$

**De zaak**  $x < x_2 = 1 - b/a_2$  als  $a_1 > a_2 > b$ . Laten we symmetrisch zoeken naar een oplossing als  $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

voor  $x < x_2 = 1 - b/a_2$ . Het systeem (6) - (7) leidt, zoals hierboven, naar

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1-x) \log(1-x)$$

behalve een additieve constante, terwijl

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log\left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x_2-x}{x}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}}\right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

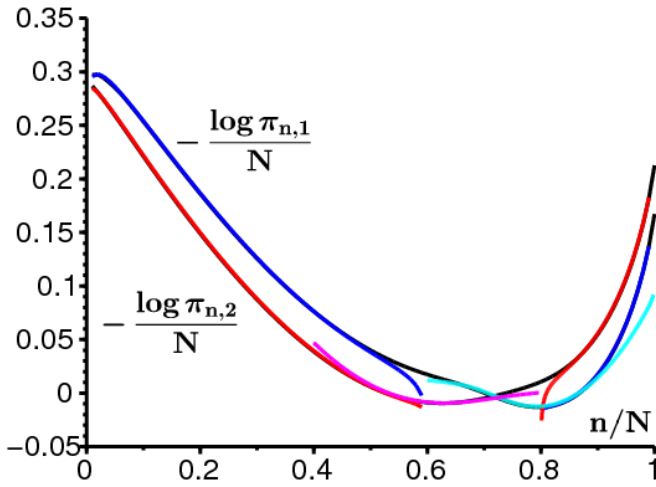
Samenvattend vermoeden we  $x < x_2$ ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x)-\sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

voor een bepaalde constante  $k_2$ . Voor  $x < x_2$  en  $x$  dichtbij  $x_2$ ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2} x_2^{\frac{a_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2} (x_2-x)^{\frac{a_2}{a_2-b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

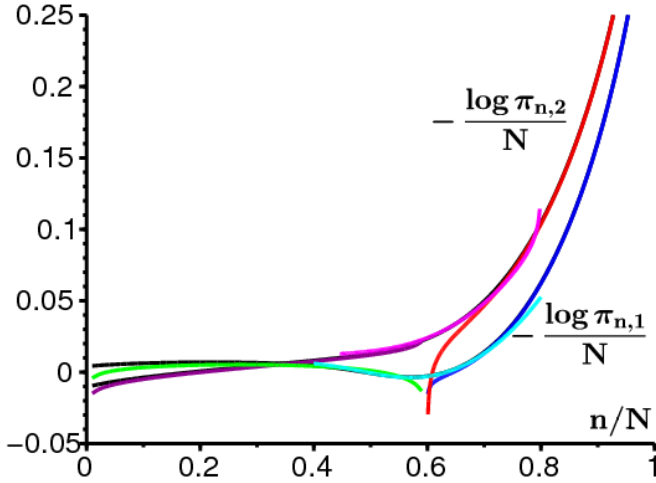
Figuur 2 en 3 tonen  $-(\log \pi_{n,1})/N$  en  $-(\log \pi_{n,2})/N$  afhankelijk van  $n/N$  voor  $1 \leq n \leq N$ , met  $\pi_{n,i}$  berekend met het systeem (6) - (7). De figuren tonen ook de benaderingen (10) en (12) in donkerblauw en rood. De constante  $k_1$  in (10) is zo gekozen dat  $\pi_{n,1}$  valt samen met de benadering voor  $n = N-1$ . De constante  $k_2$  in (12) wordt bepaald door  $k_1$  zoals uitgelegd in sectie 5 hieronder.



Figuur 2. Het voorbeeld met  $a_1 > a_2 > b$ . In zwart, onder de andere rondingen:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  en  $-(\log \pi_{n,2})/N$  afhankelijk van  $x = n/N$ .

Voor  $\pi_{n,1}$ : in donkerblauw, benaderingen (10) voor  $x > x_1$  en (12) voor  $x < x_2$ ; in lichtblauw, diffusieve benadering (25) voor  $x \simeq x_1$ .

Voor  $\pi_{n,2}$ : in rood, benaderingen (10) voor  $x > x_1$  en (12) voor  $x < x_2$ ; in roze, de diffuse benadering (31) voor  $x \simeq x_2$ .



Figuur 3. Het voorbeeld met  $a_1 > b > a_2$ . In zwart, onder de andere rondingen:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  en  $-(\log \pi_{n,2})/N$  afhankelijk van  $x = n/N$ .

Voor  $\pi_{n,1}$ : in donkerblauw, de benadering (10) voor  $x > x_1$ ; in groen, benadering (20) voor  $x < x_1$ ; in lichtblauw, diffusieve benadering (25) voor  $x \simeq x_1$ .

Voor  $\pi_{n,2}$ : in rood, de benadering (10) voor  $x > x_1$ ; in paars, benadering (19) voor  $x < x_1$ ; in roze, diffuse benadering (31) voor  $x \simeq x_1$ .

## 4 Benadering op het gebied van langzame variatie

We zijn op zoek naar een benadering van  $\pi_{n,1}$  en  $\pi_{n,2}$  voor  $x_2 < x < x_1$  als  $a_1 > a_2 > b$  en voor  $0 < x < x_1$  als  $a_1 > b > a_2$ . Over deze intervallen,  $S(x) = 0$ . Laten we het systeem (6) - (7) beschouwen en direct de continue benadering proberen  $\pi_{n,1} \simeq y(x)$ ,  $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ , met  $x = n/N$ . Een Taylor-ontwikkeling geeft

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

Met  $\lambda \approx 0$  leidt dit tot de diffusieve benadering

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

Door  $1/N$  te negeren, verkrijgen we de vergelijkingen

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

die dezelfde vorm hebben als vergelijkingen (29) - (30) van (Slatkin, 1978). Door vergelijkingen (16) en (17) toe te voegen, vinden we

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

De functie tussen vierkante haken is daarom constant. Omdat  $x$  een factor is, suggereert dit door te doen  $x \rightarrow 0$  dat deze constante nul is:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

Dit maakt het mogelijk om uit te drukken  $y(x)$  afhankelijk van  $z(x)$ . Door in (17) te vervangen, verkrijgen we na een paar manipulaties

$$\frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)},$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \quad (19)$$

enige constante  $C$ . Deze benadering is paars weergegeven in figuur 3. De constante  $C$  wordt bepaald door  $k_1$  zoals weergegeven in sectie 5 hieronder. Dan tonen vergelijkingen (18) en (19) dat

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

Deze benadering is groen weergegeven in figuur 3. If  $x \simeq x_1$  met  $x < x_1$ , krijgen we

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1 x_1} \left( \frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}. \quad (21)$$

Als  $a_1 > b > a_2$  vinden we voor  $x \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

Onthoud dat  $R_0 = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$  is gelijk aan  $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$  in dit geval. In het bijzonder de integraal van  $z(x)$  in de buurt van  $0^+$  is convergent.

Als  $a_1 > a_2 > b$ , dan toont (19)

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2 x_2} \left( \frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} \quad (24)$$

dichtbij  $x_2$  met  $x > x_2$ .

## 5 Diffusie nabij $x_1$ en $x_2$

*De situatie nabij  $x_1$ .* Dichtbij  $x = x_1$  en  $x = x_2$  kan de diffusie in (14) - (15) niet langer worden verwaarloosd. Analyse van overgangszones in  $x_1$  en  $x_2$  moet het mogelijk maken dat de constante  $C$  in (21) en (24) met de constanten wordt verbonden  $k_1$  van (10) en  $k_2$  vanaf (12). Laten we definiëren  $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$ . Dan kan de coëfficiënt van de afgeleide van orde 1 in (14) worden benaderd door een Taylor-uitbreiding van orde 1

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

We negeren  $q_2 z$  voor  $q_1 y$  als  $x \simeq x_1$ :

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b}\right) y.$$

Met

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

we hebben de hermitische differentiaalvergelijking

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

We zoeken een oplossing in de vorm van een hele serie

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

We verkrijgen de herhalingsrelatie

$$w_{n+2} = \frac{2(n + 2\alpha_1)}{(n + 2)(n + 1)} w_n,$$

waar  $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$ . We hebben dus twee lineair onafhankelijke oplossingen

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

waar  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  zijn constanten en

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$$

is Kummer's samenvloeiende hypergeometrische functie. Volgens (Maroni, 1997, vergelijking (93)) hebben we dat  $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta}$  als  $z \rightarrow +\infty$ , waarbij  $\Gamma$  de gammafunctie van Euler is. Dus

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1-1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta_1 \rightarrow -\infty.$$

Dus  $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  heeft hetzelfde asymptotische gedrag als (21) wanneer  $\eta_1 \rightarrow -\infty$ , op voorwaarde dat

$$\left[ \sqrt{\frac{N a_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C (b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1 - \frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1 + \frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (26)$$

Integendeel  $\eta_1 \rightarrow +\infty$  (11) suggereert dat  $Y(\eta_1)$  moet zich gedragen als een bepaalde constante vermenigvuldigd met  $\eta_1^{-2\alpha_1}$ . De theorie van samenvloeiende hypergeometrische functies (Maroni, 1997) laat zien dat het nodig is om op te leggen

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

voor een bepaalde constante  $K$  om dergelijk asymptotisch gedrag te verkrijgen. Inderdaad, we hebben dan

$$Y(\eta_1) = K \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

dat wil zeggen  $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$  voor  $\eta_1 > 0$ , waar  $\Psi(\alpha, \beta; z)$  is de samenvloeiende hypergeometrische functie van Tricomi gedefinieerd door

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

Volgens (Maroni, 1997, vergelijking (90)) hebben we  $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$  als  $z \rightarrow +\infty$ . Dus  $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$  als  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ .

Het equivalent van  $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  valt dan samen met (11) op voorwaarde dat

$$K \left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

Samenvattend, relaties (26), (27) en (29) bepalen  $K$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  en  $C$  afhankelijk van  $k_1$ . Vooral omdat  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  en  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  geeft vergelijking (26)

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

Een alternatief formulier kan worden verkregen met de Legendre-Gauss-formule  $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$ .

**De situatie nabij  $x_2$ .** Als  $a_2 > b$ , we doen een vergelijkbare analyse met (15) dichtbij  $x = x_2 = 1 - b/a_2$ . We negeren  $q_1 y$  voor  $q_2 z$ . Als

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

dus

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

waar  $\delta_1$  en  $\delta_2$  zijn constanten. Het gedrag voor  $\eta_2 \rightarrow +\infty$  valt samen met (24) op voorwaarde dat

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left( \frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

Laten we definiëren

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

voor een bepaalde constante  $\hat{K}$  (let op het minteken voor  $\delta_2$ ). Dus  $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$  als  $\eta_2 < 0$ . Dus  $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$  voor  $\eta_2 \rightarrow -\infty$ . Dit valt samen met (13) op voorwaarde dat

$$\hat{K} \left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

Zoals hierboven, geven (32) en (33)

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C[a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

Dus de constanten  $k_2$ ,  $\hat{K}$ ,  $\delta_1$  en  $\delta_2$  worden bepaald door de constante  $C$ .

## 6 Eigen waarde



Onthoud dat  $M\pi = \lambda\pi$ . Door alle lijnen van dit stelsel van vergelijkingen toe te voegen, verkrijgen we  $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$ . Maar  $\lambda < 0$ . Dus

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

De eerste twee regels van het systeem zijn

$$\begin{aligned}\lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}.\end{aligned}$$

Door ze toe te voegen, vinden we

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

Laten we eerst het geval bekijken waar  $a_1 > b > a_2$  met  $R_0 > 1$ . Dus (19) laat zien

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

waar  $\kappa_1$  is een positieve constante, onafhankelijk van  $N$ . Gebruikmakend van het feit dat de piek van  $\pi_{n,1}$  is dichtbij  $x = n/N = x_1$  en relaties (25), (28) en (30) vinden we

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

waar  $\kappa_j$  (Boven en onder) blijven positief constanten, die onafhankelijk van zijn  $N$ . Dus de dominante term voor  $N$  groot in de noemer van (36) is die met  $\pi_{n,2}$ . In de teller,  $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$  en  $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$  waar  $y(x)$  en  $z(x)$  worden gegeven door (22) - (23), we snappen dat

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{(\frac{1}{N})^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

Met andere woorden  $-1/\lambda$  neemt toe met  $N$  als een machtswet, waarvan de exponent is

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

zoals aangekondigd in de inleiding. We merken bovendien op dat  $\omega$  convergeert naar  $+\infty$  als  $a_2$  convergeert naar  $b$  door lagere waarden.

Overweeg nu het geval waar  $a_1 > a_2 > b$ . Laten we om het te vereenvoudigen de notatie introduceren  $f \approx g$  (niet te verwarren met het informele symbool  $\simeq$  hierboven gebruikt) als  $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$  als  $N \rightarrow +\infty$ . In het bijzonder  $N^\beta \approx 1$  voor alle  $\beta$ . Dan (12) met  $x = 1/N$  laat dat zien  $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$ . Bovendien

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s'_2(0)} \approx k_2.$$

Bovendien is de piek van  $\pi_{n,1}$  is dichtbij  $x = n/N = x_1$  terwijl dat van  $\pi_{n,2}$  is dichtbij  $x_2$ . Dus (37) is nog steeds geldig en laat zien

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

terwijl (31), (33) en (35) geven

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

Maar (34) en (35) laten zien

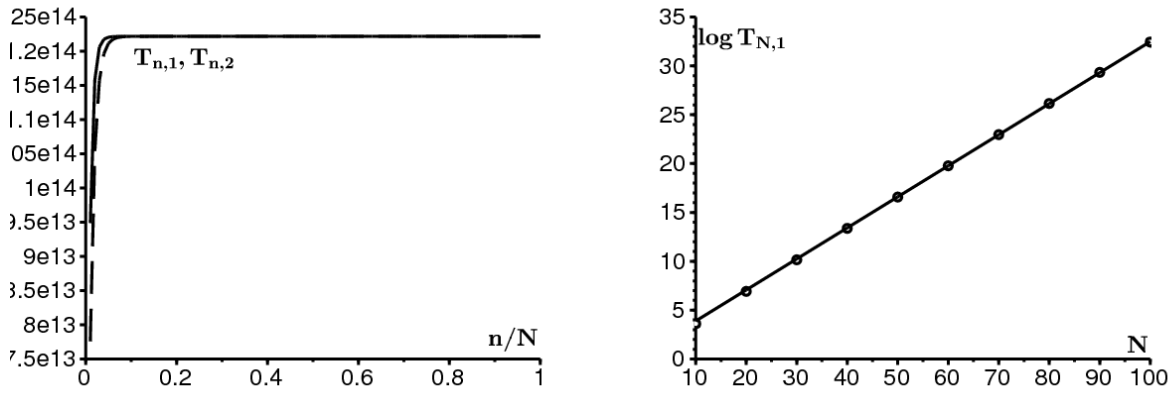
$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

Dus (36) geeft  $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$  en  $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$ . Eindelijk  $-1/\lambda$  groeit ongeveer exponentieel met een parameter  $c_2$ .

## 7 De gemiddelde tijd tot uitsterven

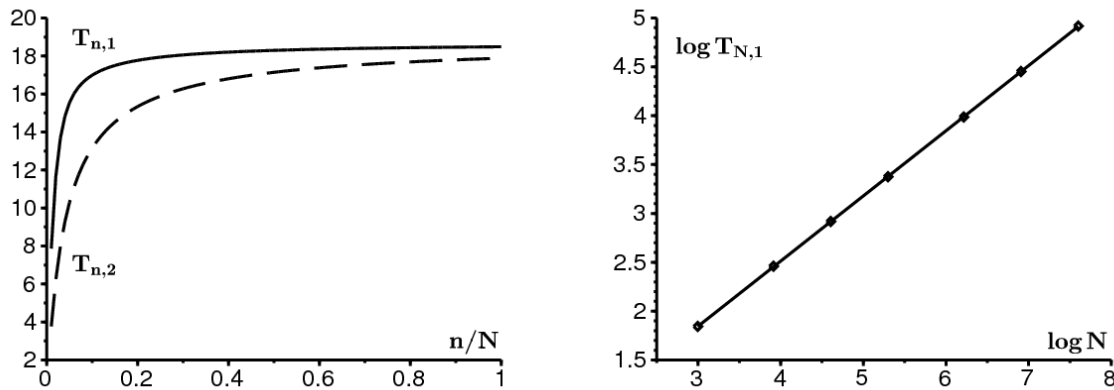
Het lineaire systeem (8) - (9) kan worden opgelost met de numerieke methode die is gepresenteerd door (Artalejo et al., 2013). De methode gebruikt alleen vierkante matrices van orde 2 en vermindert de numerieke instabiliteit. Onthoud dat  $q_1 = q_2 = 1$  en  $b = 2$ .

**Eerste voorbeeld:**  $a_1 > a_2 > b$ . Laten we nemen  $a_1 = 10$  en  $a_2 = 5$ . Figuur 4a laat zien  $T_{n,1}$  en  $T_{n,2}$  afhankelijk van  $x = n/N$ . Figuur 4b suggereert dat de gemiddelde tijd tot uitsterven, beginnend bij bijvoorbeeld  $N$  geïnfecteerde mensen in omgeving 1, ruwweg exponentieel toeneemt:  $T_{N,1} \approx e^{cN}$ . Lineaire regressie geeft  $c \simeq 0.32$ . Merk op dat  $c_1 \simeq 0.81$  en  $c_2 \simeq 0.32$ , wat suggereert dat  $c = c_2$ .



Figuur 4. De zaak  $a_1 > a_2 > b$ . een)  $T_{n,1}$  [ononderbroken lijn] en  $T_{n,2}$  [stippellijn] afhankelijk van  $n/N$  als  $N = 100$ . b)  $\log T_{N,1}$  afhankelijk van  $N$ .

**Tweede voorbeeld** :  $a_1 > b > a_2$  en  $R_0 > 1$ . Laten we nemen  $a_1 = 5$  en  $a_2 = 1$ . Dus  $R_0 = 1.5 > 1$ . Figuur 5a laat zien  $T_{n,1}$  en  $T_{n,2}$  afhankelijk van  $x = n/N$ . Figuur 5b laat zien  $\log T_{N,1}$  afhankelijk van  $\log N$ . We krijgen een rechte lijn die een machtswet suggereert  $T \sim \kappa N^\omega$ . De helling, verkregen door lineaire regressie, is  $\omega \simeq 0.67$ . In dit geval hebben we  $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ , wat goed overeenkomt met de gemeten helling.

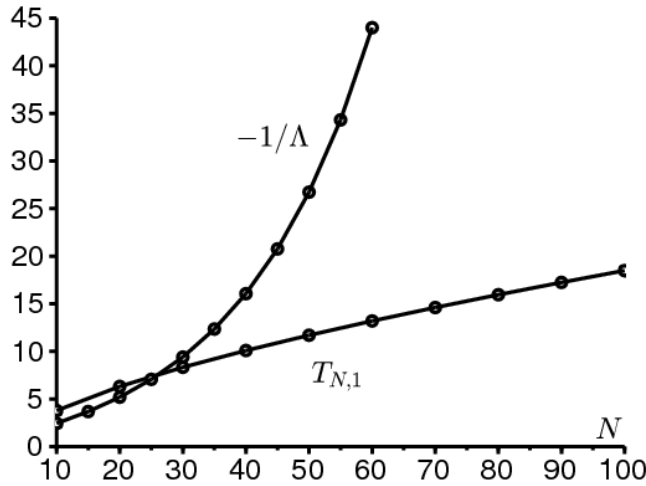


Figuur 5. De zaak  $a_1 > b > a_2$  met  $R_0 > 1$ . een)  $T_{n,1}$  en  $T_{n,2}$  afhankelijk van  $x = n/N$  als  $N = 100$ . b)  $\log T_{N,1}$  afhankelijk van  $\log N$ .

## 8 Aantekeningen

### Vergelijking met het periodiek geval.

Om het verschil tussen een willekeurige omgeving en een periodieke omgeving te benadrukken, nemen we het geval waar  $a_1 = 5$  en  $a_2 = 1$ , terwijl  $q_1 = q_2 = 1$  en  $b = 2$ . Dus  $u_1 = u_2 = 0.5$ : de omgeving brengt gemiddeld de helft van de tijd door in toestand 1, de andere helft in toestand 2. Figuur 6 laat aan de ene kant zien hoe  $T_{N,1}$  neemt toe als functie van  $N$  als machtswet. Aan de andere kant, overweeg hetzelfde SIS-model maar in een periodieke omgeving (Bacaër, 2015): laten we kiezen  $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ,  $a(t) = a_1$  voor  $0 < t < u_1 T$ , en  $a(t) = a_2$  voor  $u_1 T < t < T$ . Voor dit model,  $e^{\Lambda T}$  is de Floquet-multiplier die wordt geassocieerd met het uitstervingsproces. Figuur 6 laat zien hoe  $-1/\Lambda$  groeit exponentieel mee  $N$ .



Figuur 6. Gemiddelde tijd tot uitsterven  $T_{N,1}$  in een willekeurige omgeving en  $-1/\Lambda$  in een periodiek lijkende omgeving.

**De gemiddelde veldvergelijkingen.** Het kan nuttig zijn om te onthouden door (Bacaër en Ed-Darraz, 2014) de gemiddelde veldvergelijkingen te volgen

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,\end{aligned}$$

eenmaal gelineariseerd nabij de evenwichtstoestand  $(0,0)$ , leidt tot de Jacobiaanse matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

Maar we kunnen het tegelijkertijd hebben

- een strikt positieve eigenwaarde, zodat het triviale evenwicht instabiel is,
- $R_0 < 1$ .

**Nog een limiet.** De verkregen resultaten zijn van mening dat de parameters  $q_j$ ,  $a_j$  en  $b$  zijn vast terwijl  $N$  convergeert naar oneindig. Dingen zijn duidelijk anders als bijvoorbeeld  $q_1$  en  $q_2$  convergeren naar oneindig, met een constante verhouding  $q_1/q_2$ . Het model benadert dan een model gehomogeniseerd in een constante omgeving met een gemiddelde contactparameter  $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$ .

**Het subkritische geval.** We hebben het subkritische geval niet behandeld  $R_0 < 1$  met  $a_1 > b > a_2$  of anders  $b > a_1 > a_2$ . Het gedrag van de gemiddelde tijd tot uitsterven is dan ongeveer hetzelfde als in een constante omgeving: uitgaande van een vaste fractie van de besmette populatie is de gemiddelde tijd in de orde van grootte van  $\log N$  (Doering et al., 2005). Van een geïnfecteerde fractie  $I/N$ , convergeert de gemiddelde tijd integendeel naar een limiet. In het geval van een willekeurige omgeving is dit ook wat digitale simulaties suggereren.

## 9 Markov-ketting met eindig aantal staten

Met  $J$  staten, onthoud dat de oneindig kleine generator  $Q$  is dat  $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$  voor alles  $j$ . Stel dat deze matrix  $Q$  is onherleidbaar en dat  $a_1 > a_2 > \dots > a_J$ . Als  $a_J > b$  dan stijgt de gemiddelde tijd tot uitsterven ongeveer exponentieel met de grootte  $N$  van de populatie, met een snelheid  $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$ . Het is inderdaad in de omgeving  $J$  dat uitsterven het meest waarschijnlijk is.

Als, aan de andere kant  $b > a_J$  en  $R_0 > 1$ , let op  $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$  met  $x = n/N$ . In de omgeving van  $x = 0$ , wordt het systeem (16) - (17)

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

Op zoek naar een oplossing  $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$  met  $\omega > 0$  en  $\theta_j > 0$  voor alle  $j$  vinden we

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

voor  $1 \leq j \leq J$ . Met de notaties van de inleiding hebben we daarom het probleem van gegeneraliseerde eigenwaarde  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ , met  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ .

We zullen het laten zien

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$  is een diagonale matrix. Voor een echt nummer  $s$ ,

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$  heeft al zijn coëfficiënten buiten de diagonaal die positief of nul zijn. Bovendien is deze matrix niet herleidbaar. Volgens een uitvloeisel van de stelling van Perron en Frobenius (Smith, 1995, uitvloeisel 3.2),  $\mu(s)$  is een simpele eigenwaarde van  $Q - sD$  (genaamd dominante eigenwaarde) en er is een eigenvector  $\phi(s)$  alle componenten zijn zodanig strikt positief dat

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

Deze eigenvector is uniek bij normalisatie

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

Volgens hetzelfde gevolg vloeit het bestaan van een vector voort  $\theta$  met  $\theta_j > 0$  voor alle  $j$  en  $(Q - \omega D)\theta = 0$  komt neer op  $\mu(\omega) = 0$ . Het is dus een kwestie van aantonen dat de vergelijking  $\mu(\omega) = 0$  met  $\omega > 0$  heeft een unieke oplossing.

Wat het bestaan betreft, merken we eerst op dat de oneindig kleine generator  $Q$  komt overeen met  $s = 0$ : men heeft  $\mu(0) = 0$  en we merken op  $u = \phi(0)$  de eigenvector aan de rechterkant. Lijn vector  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$  is een eigenvector links van  $Q$  geassocieerd met de eigenwaarde 0. Dus

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

Volgens de eenvoudige eigenwaarde verstoringsstelling, de functie  $\mu(s)$  is differentieerbaar in  $s = 0$  en

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

Maar  $R_0 > 1$  is gelijk aan  $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$ . Dus  $\mu'(0) < 0$ . Bovendien hebben we  $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$  voor alle  $s > 0$ . Als  $s \rightarrow +\infty$ , men heeft  $Q/s - D \rightarrow -D$ . Door continuïteit van het spectrum,

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j (-D_{j,j}) = \max_j (b - a_j) = b - a_J > 0.$$

Dus  $\mu(s) \rightarrow +\infty$  als  $s \rightarrow +\infty$ . Omdat  $\mu(0) = 0$  en  $\mu'(0) < 0$ , we leiden dat af  $\omega > 0$  met  $\mu(\omega) = 0$ .

Wat betreft uniekheid, merk allereerst op dat de functie  $\mu(s)$  is convex. Inderdaad, voor alle reële cijfers  $\omega_1, \omega_2$ , en  $0 < \varepsilon < 1$ , we zien dat  $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$  is de dominante eigenwaarde van de matrix  $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$ . Volgens een stelling van (Cohen, 1981) is deze eigenwaarde kleiner dan of gelijk aan  $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$ . Dit bewijst de convexiteit. Stel nu dat dat zo is  $\omega_1 > \omega_2 > 0$  met  $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$ . Omdat  $\mu(0) = 0$  en omdat  $\mu(s)$  is convex, leiden we af  $\mu(s) = 0$  voor  $0 \leq s \leq \omega_1$ . Dit is in tegenspraak  $\mu'(0) < 0$ .

$A - B$  is een inverteerbare matrix als  $a_j \neq b$  voor alle  $j$ . Dus  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  is gelijk aan  $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$ . Dus  $\omega$  is de eigenwaarde van  $(A - B)^{-1}Q$  waarvan het echte deel het grootste is.

Eindelijk wordt vergelijking (36)

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

In de teller hebben we  $\pi_{1,j} \simeq \theta_j(1/N)^{\omega-1}$ . In de noemer hebben we

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

Dus  $-1/\lambda$  neemt toe met  $N$  als  $N^\omega$ .

Het is ongetwijfeld mogelijk om een dergelijk resultaat te generaliseren als de omgeving bijvoorbeeld wordt beheerst door een stochastische differentiaalvergelijking

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

Laten we definiëren  $L^*$  de differentiële operator

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} (f(\xi)u(\xi)).$$

We gaan ervan uit dat  $u(\xi)$  is een onveranderlijke kans:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

Dus, in het geval van Langevin's vergelijking, we hebben

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

We gaan ervan uit dat het contactpercentage  $a(\cdot)$  is een functie aan  $\mathbb{R}$  met  $\min a(\cdot) < b$  en

$$R_0 = \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

De gemiddelde extinctietijd neemt toe met  $N$  als  $N^\omega$ , waar  $\omega$  is het enige positieve getal waarvoor de differentiaaloperator  $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$  heeft een hoofd eigenwaarde gelijk aan 0. Voor de convexiteit van deze eigenwaarde als functie van  $\omega$  zie (Kato, 1982). Merk op dat de assistent-operator van  $L^*$  is

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

en  $L\mathbf{1} = 0$  als  $\mathbf{1}$  geeft de constante functie aan die gelijk is aan 1.

## 10 Een omgeving die zowel periodiek als willekeurig is

Laten we terugkeren naar het geval van een eindige reeks omgevingen. We gaan er nu vanuit dat de oneindig kleine generator  $Q(t)$

- is een periodieke functie van periode  $\mathcal{T}$
- is een continue of stuksgewijze continue functie,
- is onherleidbaar op zijn minst over een interval van  $t$ .

Het systeem (4) - (5) heeft de vorm  $\frac{dP}{dt} = M(t)P$ . Aansluitend (Bacaër, 2015) is er dan een alleenstaand stel  $(\lambda, \pi)$  met

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$  is een periodieke functie van periode  $\mathcal{T}$

$$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$

- $\pi_{n,j}(t) > 0$  voor  $1 \leq n \leq N$  en  $1 \leq j \leq J$ .

Bovendien

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

Er is ook een unieke functie  $\mathcal{T}$ -periodiek  $u(t)$  met

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

Zoals (Bacaër en Ed-Darraz, 2014), definiëren we

$$R_0 = \left( \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

We vermoeden dat als  $a_1 > \dots > a_J > b$ , dan neemt de gemiddelde tijd tot uitsterven weer exponentieel toe met  $N$ , met een snelheid

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

Als, aan de andere kant  $a_J < b$  maar  $R_0 > 1$ , de benadering  $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$  leidt tot generaliseren (38) in de buurt van  $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

Een oplossing van het formulier  $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$ , met een functie  $\theta(t) = (\theta_j(t))$   $\mathcal{T}$ -periodiek, moet controleren

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

Er is één echt nummer  $\mu(\omega)$  waarvoor  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  is de dominante Floquet-multiplier van het systeem

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

Deze matrix is een periodieke functie van de periode  $\mathcal{T}$ . De coëfficiënten buiten de diagonaal zijn positief of nul. De matrix is onherleidbaar over een interval van  $t$ . We kunnen laten zien dat er een uniek is  $\omega > 0$  met  $\mu(\omega) = 0$ . We gebruiken zoals in sectie 9

- de convexiteit van  $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$  als  $R_0 < 1$

- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$  als  $a_J < b$ .

Merk op dat de convexiteit van  $\mu(\omega)$  wordt aangetoond door simpelweg het argument van (Cohen, 1981) te generaliseren. We gebruiken

- de log-convexiteit van de spectrale straal van matrices met coëfficiënten in de set van nul of log-convexe functies in  $\omega$ , genoteerd  $\mathfrak{S}$
- $\mathfrak{S}$  is stabiel door optelling, vermenigvuldiging en overgang naar de limiet

(Kingman, 1961). Inderdaad  $Q(t)$  is een stuksgewijze continue periodieke functie, die benaderd kan worden door een stapfunctie.  $Q_k$  is de benaderde matrix over het interval  $(\tau_k, \tau_{k+1})$  voor  $k = 0, \dots, K-1$ , met  $\tau_0 = 0$  en  $\tau_K = \mathcal{T}$ . Als  $Q(t)$  was deze trapfunctie,  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  zou gelijk zijn aan de spectrale straal van het product van matrices

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

Volgens (Cohen, 1981) heeft elk van deze matrices zijn coëfficiënten in  $\mathfrak{S}$ . Het product van matrices is dus ook met coëfficiënten in  $\mathfrak{S}$ . De spectrale straal is log-convex in  $\omega$ .

Omdat

$$\lambda = -b \frac{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

sluiten we af zoals daarvoor  $-1/\lambda$  neemt waarschijnlijk toe met  $N$  als  $N^\omega$ .

## Dankwoord

Dit artikel werd gestimuleerd door een bijeenkomst in het *Instituto de Ciencias Matemáticas* in Madrid in oktober 2014, door lezingen aan de Universiteit van Tlemcen in mei 2015 en door een seminar in de *Universidade Nova de Lisboa* in juni 2015.

## Referenties

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. *Am Nat* 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. *J Theor Biol* 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. *SIAM-AMS Proceedings* 10 : 87–104
- Maroni P (1997) *Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel*. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise-driven unlimited population growth. *Phys Rev E* 78 : 060103
- Näsell I (2011) *Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model*. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. *Ecology* 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. *Theor Popul Biol* 19 : 37–57
- Smith HL (1995) *Monotone dynamical systems*. American Mathematical Society, Providence