

ランダム環境での流行のSIS確率モデル

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866.

<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、フランス、ボンディ
ピエール大学、マリーキュリー大学、
レコルデリエ、パリ、フランスnicolas.bacaer@ird.fr

まとめ

二状態連続時間のマルコフ連鎖であるランダムな環境では、流行のSIS確率モデルの絶滅までの平均時間は、超臨界の場合、両方の場合、人口サイズに関して指数関数的に増加します。状態は有利であり、一方の状態が伝搬に不利である一方、他方が好ましい場合は、べき法則に従います。

1はじめに

である N は、人口規模、想定さ定数。流行のSIS確率モデルでは、各個人は健康 (S) または感染 (I) です (Nåsell, 2011)。環境が2つの状態の連続時間でマルコフ連鎖に従うと想像してください。 q_j ($j = 1, 2$) は、状態 j からの離脱率です。環境 j では、各個人の接触率は $a_j > 0$ 。瞬間 t に感染した人の数が n で環境 j である場合、 t と $t + dt$ の間で dt が無限に小さい状態で新たに感染する確率は $a_j n(1 - n/N) dt$ 。個人の治癒率 $b > 0$ が両方の環境で同じであるとします。人口の新しい治療法の確率はそれからあります $bn dt$ 間トンとトン+ dt の。このモデルは (Artalejo et al., 2013) によって研究されていますが、人口のサイズ N が大きくなるほどではありません。さらに、それはマルコフ環境における誕生と死のプロセスの特別なケースです (Cogburn and Torrez, 1981)。

定義しよう

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

だから Q は、極小ジェネレーターですが、 u_1 (それぞれ u_2) は、環境1 (それぞれ2) で費やされた時間の割合です。線形化されたモデル、つまりパラメータのランダムな環境での誕生と死の線形プロセス a_j と b 、(Bacaër and Ed-Darraz, 2014) は、ほぼ確実に絶滅が存在する場合に限り、 $R_0 \leq 1$ 。一方、非線形SISモデルの場合、パラメータの値が何であっても消滅します。 R_0 。ただし、人口 N が大きい場合、次の場合、絶滅までの平均時間は長くなります。 $R_0 > 1$ そして小さい場合 $R_0 < 1$ 。もし $T_{n,j}$ は、環境 j で最初に n 人の感染者がいる平均時間です。 $1 \leq n \leq N$ 、

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

また $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$ 。この記事の目的は、超臨界のケースで研究することです。 $R_0 > 1$ 、人口サイズ N が大きくなる絶滅までの平均時間の挙動。

接触率が一定の環境でだったと $R_0 = \frac{a}{b} > 1$ 、(Doering et al.、2005、表1) は、集団の感染した部分からの絶滅までの平均時間 $x = n/N$ が増加すると、 $N \rightarrow \infty$ 、 x とは無関係に、 $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ 、どこ $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ 。言い換えれば、平均時間はとほぼ指数関数的に成長している N 。(Bacaër、2015) は、成長パラメーター c の明示的な式がない場合でも、環境が周期的である場合に同様の結果を提案します。

超臨界ランダム環境、すなわち $R_0 > 1$ 、次の記事は、2つのケースを区別する必要があることを示唆しています。 $a_1 > a_2 > b$ 弱い超臨界の場合 $a_1 > b > a_2$ 。非常に超臨界の場合 $a_1 > a_2 > b$ 、絶滅までの平均時間は、パラメーターを指定した N でほぼ指数関数的に増加すると推測します。 $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$ 。より正確には、この平均時間の対数を N で割ると、次のように収束します。 c_2 。したがって、漸近的振る舞いは、環境が状態2でブロックされたままである場合と同じです。つまり、これは、伝染病の伝播に最も好ましくなく、絶滅が優先的に発生する場合です。

ただし、 $a_1 > b > a_2$ と $R_0 > 1$ 、その後、絶滅までの平均時間は次のように増加すると推測します N^ω と

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

この場合、 $R_0 > 1$ に相当 $\omega > 0$ 。直感的に、非常に長い間、状態2に留まることが時々起こります。この継続時間が τ より大きい確率は、 $e^{-q_2\tau}$ 。状態2では、 N ラージの平均消滅時間は次のオーダーです。 $\tau \simeq \frac{\log N}{b - a_2}$

(Doering et al.、2005) ; これは準消滅方程式からも推測できます $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$ 。したがって、最終的に状態2の期間中の絶滅の確率は次のオーダーになります。 $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$ 。これは、絶滅までの平均時間が逆数の桁であることを示唆しています。 $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$ 。私たちの分析によると、大きさの次数は実際には N^ω ω は (3) で与えられます。

また、 q_1 と q_2 掛けられる $1 + \varepsilon$ と $\varepsilon > 0$ 、その後 R_0 変わらないままですが ω 掛ける $1 + \varepsilon$: このモデルでは、環境変動性が増加すると、平均消滅時間が増加する傾向があります。

この法律 N^ω 状態の環境の場合、次の場合に一般化できるようです。

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

私たちは持っています

$$R_0 = \left(\sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

もし Q が無限小生成され、もし u が持つ単一のベクトルであります

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(BacaërおよびEd-Darraz、2014年)。 A と B が対角行列を表すと $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$ と $\text{diag}(b, \dots, b)$ 。スペクトル境界を検討する

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

どこに $\sigma(\cdot)$ 行列のスペクトルを示し、 $\Re(\cdot)$ 複素数の実部。示す

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

次に、絶滅までの平均時間は次のように増加すると推測します。 N^ω 。特定のケースでは $a_j \neq b$ すべての j について、数 ω は単に行列の最大実部の固有値です $(A - B)^{-1}Q$ 。この行列と、 $l=2$ に対して (3) で与えられる固有値 ω の式は、人口統計確率のない母集団モデルの (Sawyer and Slatkin、1981、式 (14) および (20)) にすでにあります。未臨界のケース ($R_0 < 1$) ; この場合には、消滅までの平均時間は、しかしの対数として増大 N 。

数人の著者が、ブラウンのランダム環境での人口モデルの平均消滅までのべき法則を発見しました (Ludwig、1976; Leigh、1981; Lande、1993)。拡散方程式を出発点として使用します。ただし、(Gaveau et al.、1996) および (Doering et al.、2005) は、この方程式がパラメーター c の不正確な式につながることを示しています。実際、この方程式は常に準定常分布の裾をよく表すとは限りません。これは、絶滅プロセスを研究するための最も重要な部分です。ただし、(Kamenev et al.、2008) は、パス積分を使用して色付きノイズのあるランダムな環境での個体群の消滅の問題に対処したことに注意してください。

セクション2では、モデルの準定常分布を示します。セクション3では、ブリルアン、クレイマー、ウェンツェル (BKW) の方法を使用して、分布が急速に変化するパラメーター $x = n/N$ のゾーンで有効な近似を取得します。セクション4では、分布がゆっくりと変化する領域で別の近似を使用します。セクション5では、拡散方程式を使用して、以前の2つの近似を接続します。クンマーとトリコミの合流型超幾何関数は、特に (Meerson and Sasorov、2008) が使用するガウス誤差関数をここで置き換えます。セクション6では、準定常分布に関連する固有値を推定します。

厳密に得られたこれらの近似はありませんが、セクション7では、数値シミュレーションを示します。これは、強超臨界の場合の指数則と弱超臨界の場合のべき則の指数の数値を確認するようです。セクション8では、いくつかの注釈を追加しています。特に、弱い超臨界状態で、マルコフ環境の場合と周期的環境の場合を比較します。好ましい状態または不利な状態で同じ時間の割合を使用します。絶滅するまで、指数法則に次ぐ。セクション9では、有限数の状態を持つマルコフ連鎖の場合を考慮し、他の一般化について説明します。

2 準定常分布

時間 t で、環境 j に n 人の感染者 がいる確率を考えます。 $p_{n,j}(t)$ 。だから

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - [a_1 n(1 - \frac{n}{N}) + b n + q_1] p_{n,1} + b(n+1) p_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1)(1 - \frac{n-1}{N}) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - [a_2 n(1 - \frac{n}{N}) + b n + q_2] p_{n,2} + b(n+1) p_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1)(1 - \frac{n-1}{N}) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

定義しよう

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$: 列ベクトル
- $A_n = \text{diag}[a_1 n(1 - \frac{n}{N}), a_2 n(1 - \frac{n}{N})]$: 2次の対角行列
- $B_n = \text{diag}[bn, bn]$

$$\bullet \quad M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

システム (4) - (5) の形式は

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

固有値 M はのものであり、 Q とのそれら R 。 Q の固有値は0であり、 $-(q_1 + q_2)$ 。対角線の外側の行列 R の係数は正またはゼロです。さらに、関連するグラフでわかるように、行列 R は既約です。ペロンとフロベニウスの定理の帰結 (Smith、1995、corollary 3.2) は、行列 R が単純で、他のすべての固有値の実部より厳密に大きく、関

連する固有ベクトルを持つ実固有値 λ を持っていることを示しています。厳密にポジティブなコンポーネントで。場合 **1は**、行ベクトルは $[1, 1, \dots, 1]$ サイズの $2N$ 、次いで

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

(Berman and Plemmons、1994、Theorem 6.2.3、L33) によれば、 $\lambda < 0$ 。選ぶ

$\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ 固有値 λ に関連付けられた M の固有ベクトル： $M\pi = \lambda\pi$ 。つまり、

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,1} = & - \left[a_1 n \left(1 - \frac{n}{N} \right) + b n + q_1 \right] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} \\ & + a_1 (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N} \right) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,2} = & - \left[a_2 n \left(1 - \frac{n}{N} \right) + b n + q_2 \right] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} \\ & + a_2 (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N} \right) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

例として、固有ベクトルを正規化してみましょう

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

図1は $\pi_{n,1}$ と $\pi_{n,2}n/N$ の関数として $n \geq 1$ 2つのケース： $R_0 > 1$ と $a_1 > a_2 > b$ 、ケース $R_0 > 1$ と $a_1 > b > a_2$ 。固有ベクトル π はScilabソフトウェアで計算されます。のピーク $\pi_{n,1}$ に近い $x_1 = 1 - b/a_1$ 、感染した人々の割合 i の平均場方程式について考えるときに期待するように

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

確かに x_1 この方程式の唯一の安定した平衡状態です。のピーク $\pi_{n,2}$ に近い $x_2 = 1 - b/a_2$ もし $a_2 > b$ そして近くに $x = 0$ もし $a_2 < b$ 。

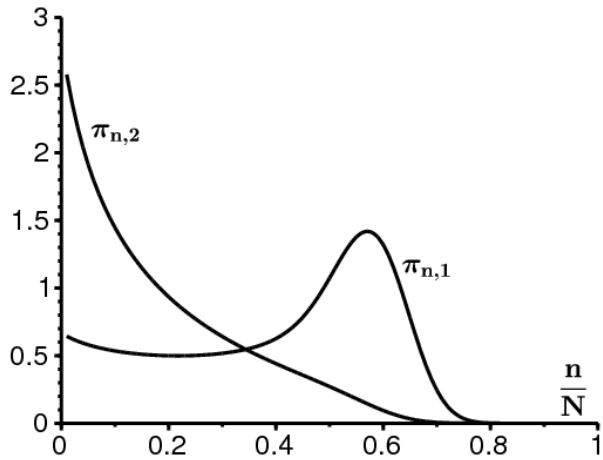
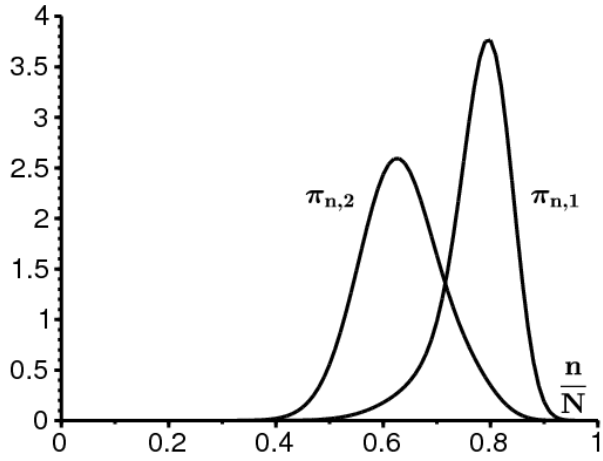


図1.コンポーネント $\pi_{n,1}$ と $\pi_{n,2}$ のために $n \geq 1$ $N = 100$ の場合、 n/N の関数としての固有ベクトル π の $q_1 = 1$ と $q_2 = 1$ 。その他のパラメータ値：a) $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ 、b) $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$ 。

定義しよう

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$ 。

線形システム (1) - (2) は、次の形式で記述できます。

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

システム (8) - (9) および (6) - (7) は、

$$-1^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

ここで、星印*は、ベクトルまたは行列の転置を示します。通常のドット積をとることで、 $\langle -1^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$ 。だから

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle 1^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

つまり、 $-1/\lambda$ の線形結合です $(T_{n,j})$ のために $n \geq 1$ と $j = 1, 2$ 。以下では、主に λ に関心があります。勉強する $(T_{n,j})$ 数値シミュレーションを通じてセクション7で。

3. BKW近似

事件 $x > x_1 = 1 - b/a_1$ 。と $R_0 > 1$ 、私たちはそれを推測します $\lambda \rightarrow 0$ もし $N \rightarrow +\infty$ 。たとえば、別のモデルの場合 (MeersonおよびSasorov, 2008) が行ったように、実際にそうであることを事後検証します。したがって、(6) - (7) の左側は無視できます。のために $x > x_1$ 、次の形式のBKW近似 (Bender and Orszag, 1978) を探しましょう

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

どこに $x = n/N$ 。オーダー2のテイラー開発 $S(x)$ 注文1の $\Sigma(x)$ それを示唆している

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

(6) に置き換えて、 $e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 \simeq & a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ & + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}. \end{aligned}$$

式 $O(N)$ ギブ

$$0 \simeq N x \left[e^{S'(x)} - 1 \right] \left[a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

角括弧の最初の項は定数関数の場合のみ null です $S(x)$ 。角括弧内の2番目の項をキャンセルするソリューションを選択してください

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

つまり

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

加法定数を除いて。これは意味します $S''(x) = \frac{1}{1-x}$ 。機能 $\Sigma(x)$ $O(1)$ の式で取得されます。

$$\begin{aligned} 0 \simeq & a_1 N \left[x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ & + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1. \end{aligned}$$

交換することにより $S(x)$ その表現により、

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right), \\ \Sigma(x) = \sigma_1(x) &= \log \left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right). \end{aligned}$$

機能 $c(x)$ で $\pi_{n,2}$ (7) から得られます。の形 $\pi_{n,2}$ 異なる表現のバランスを取るために選択されました。確かに、最高次数は

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ N a_2 x (1 - x) \left[e^{S'(x)} - 1 \right] + b N x \left(e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

交換することにより $S(x)$ その表現により、

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2)x(x - x_1)}.$$

要約すると、 $x > x_1$ 、

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-Ns_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x(x - x_1)}, \quad (10)$$

ある定数に対して k_1 。特にの動作を考慮 $\pi_{n,1}$ との $\pi_{n,2}$ のために $x > x_1$ と x に近い x_1 。定義しよう $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$ 。私たちは持っています $s'_1(x_1) = 0$ 。テイラー開発は

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s''_1(x_1)(x - x_1)^2/2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b}(x - x_1)^2.$$

だから

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1}(x-x_1)^{\frac{q_1}{a_1-b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x_1(x - x_1)}. \quad (11)$$

事件 $x < x_2 = 1 - b/a_2$ **もし** $a_1 > a_2 > b$ 。対称的に、もし解決策を探しましょう $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

のために $x < x_2 = 1 - b/a_2$ 。システム (6) - (7) は、上記のように、

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

加法定数を除いて、

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log\left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x_2 - x}{x}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}}\right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

要約すると、 $x < x_2$ 、

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x) - \sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

ある定数に対して k_2 。のために $x < x_2$ と x に近い x_2 、

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2}(x_2-x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

図2と3は $-(\log \pi_{n,1})/N$ と $-(\log \pi_{n,2})/N$ に応じて n/N のために $1 \leq n \leq N$ 、と $\pi_{n,i}$ システム (6) - (7) を使用して計算されます。図には、近似 (10) および (12) も濃い青と赤で示されています。定数 k_1 (10) では、 $\pi_{n,1n} = N-1$ の近似と一致します。定数 k_2 (12) は、 k_1 以下のセクション5で説明します。

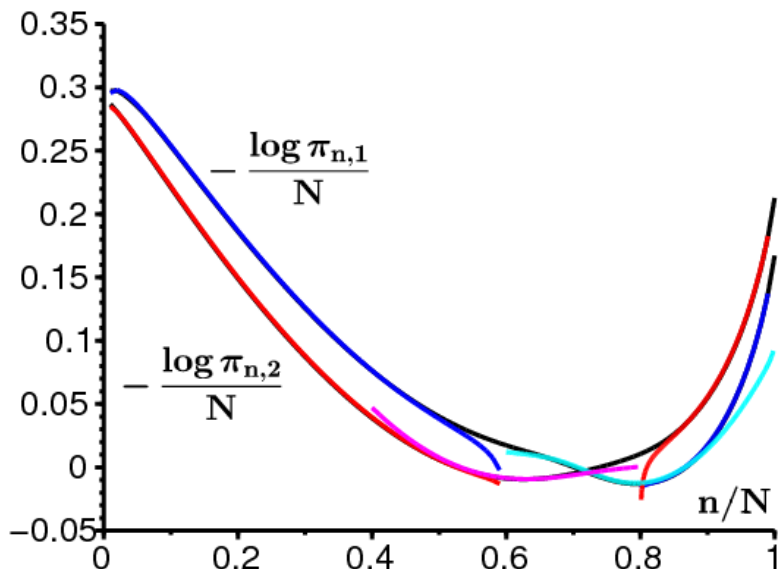


図2の例 $a_1 > a_2 > b$ 。黒で、他の曲線の下： $-(\log \pi_{n,1})/N$ と $-(\log \pi_{n,2})/N$ に応じて $x = n/N$ 。のために $\pi_{n,1}$ ：ダークブルー、近似値 (10) $x > x_1$ および (12) $x < x_2$; 水色、拡散近似 (25) $x \simeq x_1$ 。のために $\pi_{n,2}$ ：赤で、近似値 (10) $x > x_1$ および (12) $x < x_2$; ピンク色の拡散近似 (31) $x \simeq x_2$ 。

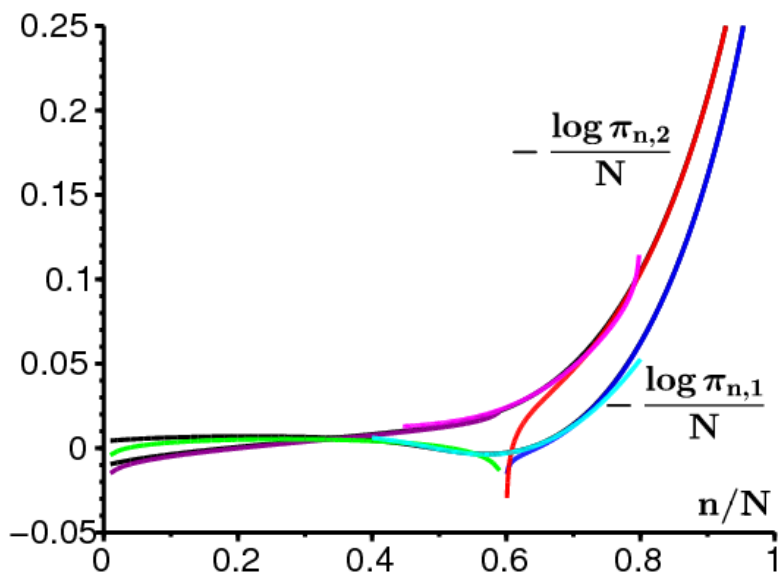


図3の例 $a_1 > b > a_2$ 。黒で、他の曲線の下： $-(\log \pi_{n,1})/N$ と $-(\log \pi_{n,2})/N$ に応じて $x = n/N$ 。のために $\pi_{n,1}$ ：濃い青色で、近似値 (10) $x > x_1$; 緑、近似 (20) $x < x_1$; 水色、拡散近似 (25) $x \simeq x_1$ 。のために $\pi_{n,2}$ ：赤で、近似値 (10) $x > x_1$; 紫で、近似値 (19) $x < x_1$; ピンクの拡散近似 (31) $x \simeq x_1$ 。

4変化が遅い領域での近似

の近似を探しています $\pi_{n,1}$ と $\pi_{n,2}$ のために $x_2 < x < x_1$ もし $a_1 > a_2 > b$ そしてのために $0 < x < x_1$ もし $a_1 > b > a_2$ 。これらの間隔で、 $S(x) = 0$ 。システム (6) - (7) を検討し、連続近似を直接試してみましょう $\pi_{n,1} \simeq y(x)$ 、 $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ 、 $x = n/N$ 。テイラー開発は

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

$\lambda \approx 0$ の場合、これは拡散近似につながります

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

$1/N$ を無視すると、次の方程式が得られます。

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

(Slatkin, 1978) の式 (29) - (30) と同じ形式です。式 (16) と (17) を追加すると、

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

したがって、角括弧の間の関数は一定です。 x は因子なので、これは $x \rightarrow 0$ この定数はゼロであること：

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

これは表現することができます $y(x)$ に応じて $z(x)$ 。(17) で置き換えることにより、いくつかの操作の後に

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} &\simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)}, \\ z(x) &\simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \end{aligned} \quad (19)$$

いくつかの定数のための C 。この近似は、図3の紫色で示されています。定数 C は、 k_1 以下のセクション5に示すように。次に、方程式 (18) および (19) は、

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

この近似は、図3の緑色で示されています。 $x \simeq x_1$ と $x < x_1$ 、私たちは

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1x_1} \left(\frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}. \quad (21)$$

もし $a_1 > b > a_2$ 、我々は見つか $X \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

覚えて $R_0 = \frac{a_1q_2 + a_2q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$ に相当 $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$ この場合。特に、の積分 $z(x)$ の近くで 0^+ 収束しています。もし $a_1 > a_2 > b$ 、次に (19) が示す

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2x_2} \left(\frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} \quad (24)$$

に近い x_2 と $x > x_2$ 。

5 拡散近似 x_1 と x_2

近くの状況 x_1 。に近い $x = x_1$ と $x = x_2$ 、(14) - (15) の拡散は無視できなくなりました。の遷移ゾーンの分析 x_1 と x_2 (21) と (24) の定数 C が定数とリンクできるようにする必要があります k_1 (10) から k_2 (12) から。定義しよう $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$ 。次に、(14) の1次の導関数の係数は、1次のテイラー展開で近似できます。

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

私たちは無視します $q_2 z$ 前に $q_1 y$ もし $x \simeq x_1$:

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b}\right) y.$$

と

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

エルミート微分方程式があります

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

シリーズ全体の形で解決策を探しています

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

再帰関係を得る

$$w_{n+2} = \frac{2(n + 2\alpha_1)}{(n + 2)(n + 1)} w_n,$$

どこに $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1 - b}$ 。したがって、2つの線形に独立したソリューションがあります。

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

どこに γ_1 と γ_2 定数であり、

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$$

クンマーの合流型超幾何関数です。(Maroni, 1997, 方程式 (93)) によれば、 $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha - \beta}$ もし $z \rightarrow +\infty$ ここで、 Γ はオイラーのガンマ関数です。だから

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1 - 1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

だから $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ (21) と同じ漸近的振る舞いをするとき $\eta_1 \rightarrow -\infty$ 、ただし、

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2 - b}}}{a_1^{1 - \frac{q_1}{a_1 - b}} x_1^{1 + \frac{q_1}{a_1 - b} + \frac{q_2}{a_2 - b}}}. \quad (26)$$

逆の場合 $\eta_1 \rightarrow +\infty$ 、(11) は、 $Y(\eta_1)$ 特定の定数を掛けたものとして動作する必要があります $\eta_1^{-2\alpha_1}$ 。合流型超幾何関数の理論 (Maroni, 1997) は、

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

このような漸近的な振る舞いを得るためにある定数 K について。実際、次に、

$$Y(\eta_1) = K \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

つまり $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$ のために $\eta_1 > 0$ 、どこ $\Psi(\alpha, \beta; z)$ によって定義される Tricomi の合流超幾何関数

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

(Maroni, 1997, 方程式 (90)) によれば、 $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$ もし $z \rightarrow +\infty$ 。だから $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$ もし $\eta_1 \rightarrow +\infty$ 。

同等のもの $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ 次に (11) と一致しますが、

$$K \left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

要約すると、関係 (26)、(27)、および (29) は、 K 、 γ_1 、 γ_2 と C に応じて k_1 。特に、 $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ 、 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ と $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 、方程式 (26) は

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

ルジャンドル・ガウスの公式を使用して別の形式を取得できます $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$ 。

近くの状況 x_2 。もし $a_2 > b$ 、同様の分析を (15) に近い $x = x_2 = 1 - b/a_2$ 。私たちは無視します $q_1 y$ 前に $q_2 z$ 。もし

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

そう

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

どこに δ_1 と δ_2 定数です。の動作 $\eta_2 \rightarrow +\infty$ (24) と一致する

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left(\frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1-x_2)-b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

定義しよう

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

ある定数に対して \hat{K} (マイナス記号に注意してください δ_2)。だから $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$ もし $\eta_2 < 0$ 。だから $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$ のために $\eta_2 \rightarrow -\infty$ 。これは (13) と一致しますが、

$$\hat{K} \left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

上記のように、(32) と (33) は

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C [a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

したがって、定数 k_2 、 \hat{K} 、 δ_1 と δ_2 定数によって決定される C 。

6自分の価値

覚えて $M\pi = \lambda\pi$ 。この連立方程式のすべての行を追加することにより、 $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$ 。でも $\lambda < 0$ 。だから

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

システムの最初の2行は

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}. \end{aligned}$$

それらを追加することにより、

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

最初に、 $a_1 > b > a_2$ と $R_0 > 1$ 。(19) が示す

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

どこに κ_1 に依存しない正の定数です N 。というピークを利用して $\pi_{n,1}$ に近い $x = n/N = x_1$ および関係 (25)、(28) および (30)、

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

どこに κ_j (上記および下記) はまだ独立している正の定数である N 。したがって、(36) の分母における N ラージの主要な項は、 $\pi_{n,2}$ 。分子では、 $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$ と $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$ どこに $y(x)$ と $z(x)$ (22) - (23) で与えられ、

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

つまり、 $-1/\lambda N$ のべき乗則として増加し、その指数は

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

はじめに発表したとおり。さらに、 ω が次の方向に収束していることがわかります。 $+\infty$ もし a_2 低い値で b に収束します。

ここで、 $a_1 > a_2 > b$ 。簡単にするために、表記を導入しましょう $f \approx g$ (非公式のシンボルと混同しないでください \simeq 上記で使用) $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$ もし $N \rightarrow +\infty$ 。特に $N^\beta \approx 1$ すべての β に対して。次に、 $x = 1/N$ の (12) は、 $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$ 。また、

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s_2'(0)} \approx k_2.$$

さらに、のピーク $\pi_{n,1}$ に近い $x = n/N = x_1$ その間 $\pi_{n,2}$ に近い x_2 。したがって、(37) はまだ有効であり、

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

(31)、(33)、(35) は

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \approx \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \approx \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

しかし (34) と (35) は

$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

したがって (36) は $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$ と $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$ 。最後に、 $-1/\lambda$ パラメータでほぼ指数関数的に増加します c_2 。

7 絶滅までの平均時間

線形システム (8) ~ (9) は、(Artalejo et al.、2013) によって提示された数値手法で解くことができます。この方法は、2次の正方行列のみを使用し、数値の不安定性を低減します。覚えて $q_1 = q_2 = 1$ と $b = 2$ 。

最初の例： $a_1 > a_2 > b$ 。とりましよう $a_1 = 10$ と $a_2 = 5$ 。図4aは $T_{n,1}$ と $T_{n,2}$ に応じて $x = n/N$ 。図4bは、たとえば環境1の N 人の感染者から始まる、絶滅までの平均時間はおおよそ指数関数的に増加することを示唆しています。 $T_{N,1} \approx e^{cN}$ 。線形回帰は $c \approx 0.32$ 。注意してください $c_1 \approx 0.81$ と $c_2 \approx 0.32$ 、それは示唆していません $c = c_2$ 。

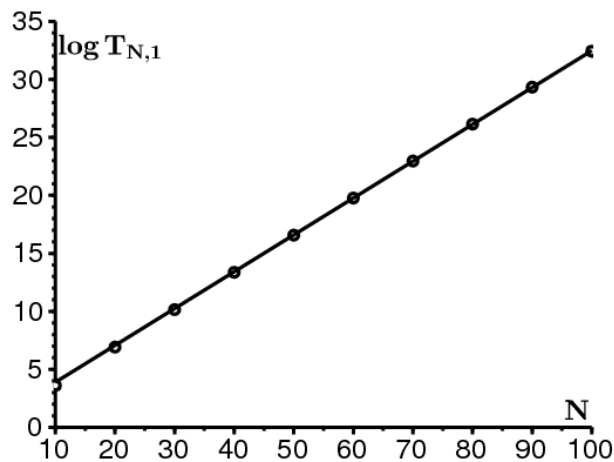
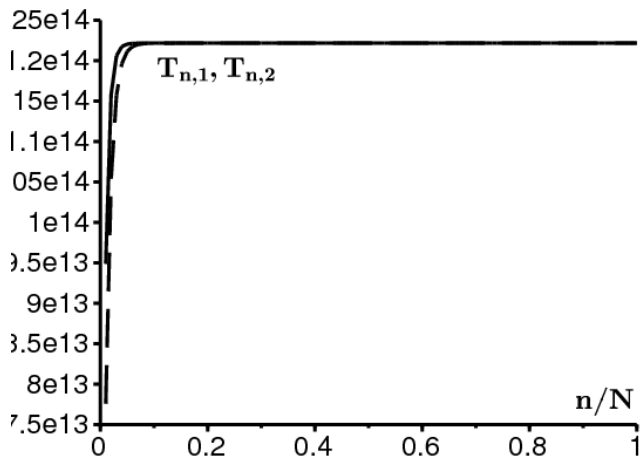


図4. ケース $a_1 > a_2 > b$ 。 a) $T_{n,1}$ 【実線】と $T_{n,2}$ 【点線】による n/N もし $N = 100$ 。 b) $\log T_{N,1}$ に応じて N 。

2番目の例： $a_1 > b > a_2$ と $R_0 > 1$ 。とりましよう $a_1 = 5$ と $a_2 = 1$ 。だから $R_0 = 1.5 > 1$ 。図5aは $T_{n,1}$ と $T_{n,2}$ に応じて $x = n/N$ 。図5bは $\log T_{N,1}$ に応じて $\log N$ 。べき乗則を示唆する直線が得られます $T \sim \kappa N^\omega$ 。線形回帰によって得られる勾配は、 $\omega \simeq 0.67$ 。この場合、 $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 、これは測定された勾配によく対応しています。

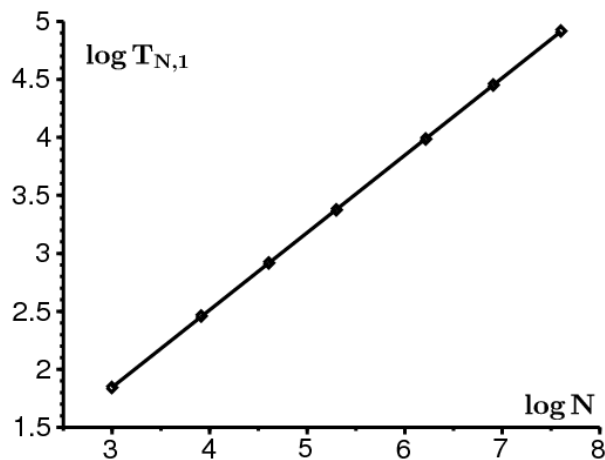
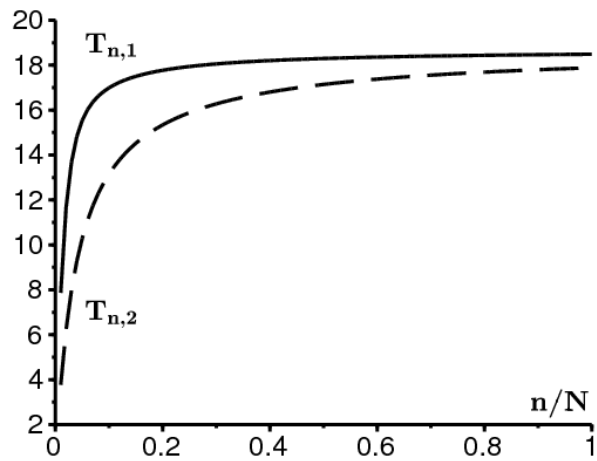


図5. ケース $a_1 > b > a_2$ と $R_0 > 1$ 。 a) $T_{n,1}$ と $T_{n,2}$ に応じて $x = n/N$ もし $N = 100$ 。 b) $\log T_{N,1}$ に応じて $\log N$ 。

8 ノート

定期的なケースとの比較。

ランダム環境と周期的環境の違いを強調するために、 $a_1 = 5$ と $a_2 = 1$ ながら、 $q_1 = q_2 = 1$ と $b = 2$ 。だから $u_1 = u_2 = 0.5$: 環境は平均して半分の時間を状態1に費やし、残りの半分は状態2に費やします。 $T_{N,1}$ べき法則としての N の関数として増加します。一方、同じSISモデルを検討しますが、定期的な環境 (Bacaër, 2015) で考えてみましょう。 $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ 、 $a(t) = a_1$ のために $0 < t < u_1 T$ 、および $a(t) = a_2$ のために $u_1 T < t < T$ 。このモデルでは、 $e^{\Lambda T}$ 消滅プロセスに関連するフロケ乗数です。図6は、 $-1/\Lambda$ 指数関数的に成長します N 。

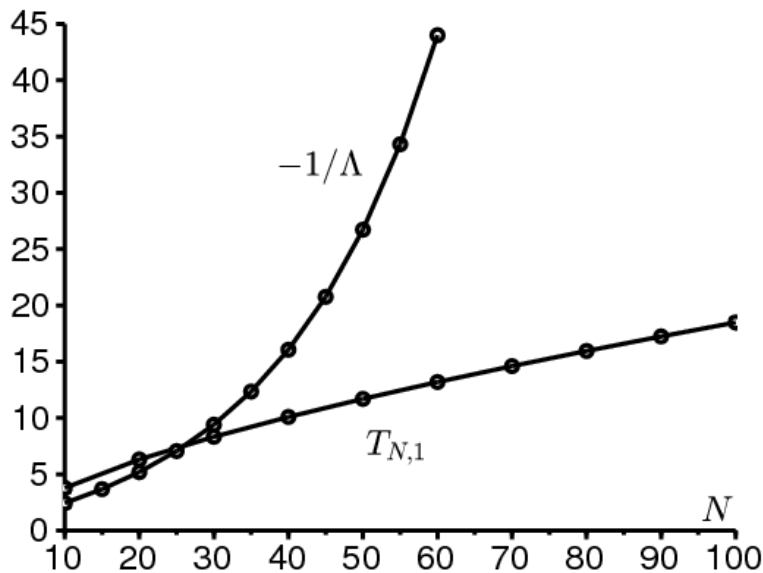


図6.絶滅までの平均時間 $T_{N,1}$ ランダムな環境で $-1/\Lambda$ 定期的に似た環境で。

平均場方程式。 平均場の方程式は、次のように (Baca useful and Ed-Darraz, 2014)

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,\end{aligned}$$

平衡状態 $(0,0)$ の近くで線形化されると、ヤコビ行列につながります

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

しかし、同時に

- 厳密に正の固有値。これにより、自明な平衡が不安定になります。
- $R_0 < 1$ 。

別の制限。 得られた結果は、パラメータが q_j 、 a_j と bN が無限大に収束する間、固定されます。例えば物事が明らかに異なる場合 q_1 と q_2 一定の比率で無限に収束する q_1/q_2 。次に、モデルは、一定の環境で均質化されたモデルに、平均接触パラメータでアプローチします。 $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$ 。

未臨界のケース。 未臨界のケースには対処しませんでした $R_0 < 1$ と $a_1 > b > a_2$ さもなければ $b > a_1 > a_2$ 。絶滅までの平均時間の振る舞いは、一定の環境での場合とほぼ同じです。感染している人口の一定の割合から始めて、平均時間は $\log N$ (Doering et al., 2005)。感染したフラクション I/N から開始して、平均時間は逆に限界に向かって収束します。ランダムな環境の場合、これはデジタルシミュレーションが示唆することでもあります。

9有限数の状態を持つマルコフ連鎖

と J 状態、極小ジェネレータが Q そのようなものです $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$ すべてのために j 。この行列が Q 既約であり、それは $a_1 > a_2 > \dots > a_J$ 。もし $a_J > b$ 、その後、絶滅までの平均時間は、人口のサイズ N にほぼ比例して、 $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$ 。実際、絶滅の可能性が最も高いのは環境 J です。

一方、 $b > a_J$ と $R_0 > 1$ 、メモ $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ と $x = n/N$ 。の近くで $x = 0$ 、システム (16) - (17) は

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

解決策を探しています $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$ と $\omega > 0$ と $\theta_j > 0$ すべての j について、

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

のために $1 \leq j \leq J$ 。したがって、序論の表記法では、一般化された固有値の問題があります。

$$Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_J).$$

お見せします

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$ 対角行列です。実数 s の場合、

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$ 正またはゼロであるすべての係数が対角線の外側にあります。さらに、この行列は既約です。ペロンとフロベニウスの定理の推論によると（スミス、1995、推論3.2）、 $\mu(s)$ の単純な固有値です $Q - sD$ （支配的な固有値と呼ばれます）そして固有ベクトルがあります $\phi(s)$ それらのすべてのコンポーネントは、

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

この固有ベクトルは正規化で一意です

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

同じ推論によると、ベクトルの存在 θ と $\theta_j > 0$ すべてのために j と $(Q - \omega D)\theta = 0$ 実際には $\mu(\omega) = 0$ 。したがって、式 $\mu(\omega) = 0$ と $\omega > 0$ ユニークなソリューションがあります。

存在に関して、私たちは最初に、極小ジェネレータが Q に対応 $s = 0$: 私たちは持っています $\mu(0) = 0$ そして私たちは注意します $u = \phi(0)$ 右側の固有ベクトル。行ベクトル $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$ の左側の固有ベクトルです Q 固有値0に関連付けられています。したがって、

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

単純な固有値摂動定理によれば、関数 $\mu(s)$ で差別化可能です $s = 0$ と

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

でも $R_0 > 1$ に相当 $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$ 。だから $\mu'(0) < 0$ 。また、 $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$ すべてのために $s > 0$ 。もし $s \rightarrow +\infty$ 、私たちは持っています $Q/s - D \rightarrow -D$ 。スペクトルの連続性により、

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j (-D_{j,j}) = \max_j (b - a_j) = b - a_J > 0.$$

だから $\mu(s) \rightarrow +\infty$ もし $s \rightarrow +\infty$ 。なぜなら $\mu(0) = 0$ と $\mu'(0) < 0$ 、あると推定します $\omega > 0$ と $\mu(\omega) = 0$ 。

一意性については、まず機能が $\mu(s)$ 凸状です。確かに、すべての実数について ω_1, ω_2 、および $0 < \varepsilon < 1$ 、それがわかります $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$ は、行列の支配的な固有値です $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$ 。（Cohen、1981）の定理によれば、この固有値は以下です。 $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$ 。これは凸性を証明します。今あると仮定します $\omega_1 > \omega_2 > 0$ と $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$ 。なぜなら $\mu(0) = 0$ そして $\mu(s)$ 凸である、私たちは推測します $\mu(s) = 0$ のために $0 \leq s \leq \omega_1$ 。これは矛盾します $\mu'(0) < 0$ 。

$A - B$ が可逆行列である場合 $a_j \neq b$ すべての j 。だから $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ に相当 $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$ 。だから ω は固有値です $(A - B)^{-1}Q$ その実部が最大です。

最後に式 (36) は

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

分子には、 $\pi_{1,j} \simeq \theta_j(1/N)^{\omega-1}$ 。分母には、

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

だから $-1/\lambda$ 増加する N として N^ω 。

環境が例えば確率微分方程式によって支配されている場合、そのような結果を一般化することは間違いなく可能です

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

定義しよう L^* 微分演算子

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

私たちは $u(\xi)$ 不変確率です :

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

したがって、ランジュバンの方程式の場合、

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

接触率は $a(\cdot)$ 上の関数です \mathbb{R} と $\min a(\cdot) < b$ と

$$R_0 = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

平均消滅時間は、 N とともに次のように増加します。 N^ω 、どこ ω 微分演算子が対象とする唯一の正の数 $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$ の主固有値は0です。この固有値の凸性の関数として ω 、(加藤、1982) を参照。のアシスタントオペレーターが L^* です

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

と $L1 = 0$ もし 11 に等しい定数関数を示します。

10 周期的でランダムな環境

有限の環境セットの場合に戻りましょう。ここで、極小ジェネレータは $Q(t)$

- 周期の周期関数です \mathcal{T}
- 連続関数または区分連続関数です。
- 少なくとも t の区間で既約です。

システム (4) - (5) の形式 $\frac{dP}{dt} = M(t)P$ 。(Bacaër、2015) に続いて、単一のカップルがいます。 (λ, π) と

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$ 周期の周期関数です \mathcal{T}
- $$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$
- $$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$
- $\pi_{n,j}(t) > 0$ のために $1 \leq n \leq N$ と $1 \leq j \leq J$ 。

また、

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

独自の機能もあります \mathcal{T} -定期的 $u(t)$ と

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

(Bacaër and Ed-Darraz、2014) として、

$$R_0 = \left(\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

私たちはそれを推測します $a_1 > \dots > a_J > b$ 、その後、絶滅までの平均時間は N とともに指数関数的に増加します

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

一方、 $a_J < b$ でも $R_0 > 1$ 、近似 $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$ の一般化 (38) に至ります $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

形の解決策 $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$ 、関数付き $\theta(t) = (\theta_j(t))$ \mathcal{T} -定期的、チェックする必要があります

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

単一の実数があります $\mu(\omega)$ そのため $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ システムの支配的なフロケ乗数です

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

この行列は周期の周期関数です \mathcal{T} 。対角線の外側の係数は正またはゼロです。行列は t の区間で既約です。ユニークなものがあることを示すことができます $\omega > 0$ と $\mu(\omega) = 0$ 。セクション9のように使用します

- の凸 $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$ もし $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$ もし $a_J < b$ 。

の凸性に注意してください $\mu(\omega)$ (Cohen、1981) の議論を単純に一般化することによって示されます。使用しています

- ゼロのセットの係数をもつ行列のスペクトル半径の対数凸または ω の対数凸関数 \mathcal{G}
- \mathcal{G} 加算、乗算、および限界への遷移により安定している

(キングマン、1961年)。確かに、 $Q(t)$ は区分的連続周期関数であり、ステップ関数でアプローチできます。 Q_k 区間の近似行列です (τ_k, τ_{k+1}) のために $k = 0, \dots, K-1$ 、 $\tau_0 = 0$ と $\tau_K = T$ 。もし $Q(t)$ この階段機能でした $e^{\mu(\omega)T}$ 行列の積のスペクトル半径に等しい

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

(Cohen、1981) によれば、これらの行列のそれぞれには、 \mathcal{G} 。したがって、行列の積は、 \mathcal{G} 。そのスペクトル半径は ω の対数凸です。

なぜなら

$$\lambda = -b \frac{\int_0^T \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

以前と同じように結論付けます $-1/\lambda$ おそらくと共に成長 N として N^ω 。

謝辞

この記事は、2014年10月にマドリッドでシエンチャスマテマティカ研究所で開催された会議、2015年5月にトレムセン大学での講義、および2015年6月にノバスデリスポア大学で行われたセミナーによって刺激を受けました。

参考文献

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. J Math Biol 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. J Math Biol 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. J Math Biol 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J Appl Probab 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. Proc Amer Math Soc 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. Multiscale Model Simul 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. Lett Math Phys 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. Phys Rev Lett 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. Math Z 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. Quart J Math Oxford Ser (2) 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. Am Nat 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. J Theor Biol 90 : 213–239

- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. SIAM–AMS Proceedings 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise–driven unlimited population growth. Phys Rev E 78 : 060103
- Nåsell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. Ecology 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. Theor Popul Biol 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence