

# Il modello stocastico SIS per un'epidemia in un ambiente casuale

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866.

<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, Francia

Università Pierre e Marie Curie, Les Cordeliers, Parigi, Francia

nicolas.bacaer@ird.fr

## riassunto

In un ambiente casuale che è una catena di Markov in tempo continuo a due stati, il tempo medio di estinzione del modello stocastico SIS per un'epidemia aumenta, nel caso supercritico, esponenzialmente rispetto alla dimensione della popolazione se entrambi gli stati sono favorevoli e secondo una legge di potenza se uno degli stati è favorevole mentre l'altro è sfavorevole alla propagazione.

## 1 Introduzione

Sia  $N$  la dimensione della popolazione, considerata costante. Nel modello stocastico SIS per un'epidemia, ogni individuo è sano (S) o infetto (I) (Nåsell, 2011). Immagina che l'ambiente segua una catena di Markov in tempo continuo con due stati.  $q_j$  ( $j = 1, 2$ ) è la velocità di uscita dallo stato  $j$ . Nell'ambiente  $j$ , la velocità di contatto di ciascun individuo è  $a_j > 0$ . Se in un istante  $t$  il numero di persone infette è  $n$  e l'ambiente è  $j$ , la probabilità di avere una nuova infezione tra  $t$  e  $t + dt$ , con  $dt$  infinitamente piccolo, è  $a_j n(1 - n/N) dt$ . Supponiamo che il tasso di guarigione  $b > 0$  di un individuo sia lo stesso in entrambi gli ambienti. La probabilità di una nuova cura nella popolazione è quindi  $b n dt$  tra  $t$  e  $t + dt$ . Questo modello è stato studiato da (Artalejo et al., 2013) ma non nella misura in cui la dimensione  $N$  della popolazione diventa grande. È, inoltre, un caso speciale del processo di nascita e morte in un ambiente markoviano (Cogburn e Torrez, 1981).

Definiamo

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

Allora  $Q$  è il generatore infinitesimale, mentre  $u_1$  (Resp.  $u_2$ ) è la percentuale di tempo trascorso nell'ambiente 1 (resp. 2). Per il modello linearizzato, vale a dire il processo lineare di nascita e morte in un ambiente casuale di parametri  $a_j$  e  $b$ , (Bacaër e Ed-Darraz, 2014) osserva che c'è quasi sicuramente l'estinzione se e solo se  $R_0 \leq 1$ . Per il modello SIS non lineare, d'altra parte, c'è l'estinzione qualunque sia il valore del parametro  $R_0$ . Tuttavia, quando la popolazione  $N$  è grande, il tempo medio di estinzione è grande se  $R_0 > 1$  e piccolo se  $R_0 < 1$ . se  $T_{n,j}$  è il tempo medio con inizialmente  $n$  persone infette nell'ambiente  $j$ , quindi per  $1 \leq n \leq N$ ,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

più  $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$ . L'obiettivo di questo articolo è studiare il caso supercritico, vale a dire se  $R_0 > 1$ , il comportamento del tempo medio fino all'estinzione quando la dimensione della popolazione  $N$  diventa grande.

In un ambiente costante con una velocità di contatto  $a$  con  $R_0 = \frac{a}{b} > 1$ , (Doering et al., 2005, Tabella 1) mostra che il tempo medio di estinzione da una frazione infetta della popolazione  $x = n/N$  aumenta quando  $N \rightarrow \infty$ , indipendentemente da  $x$ , come

$\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ , dove  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ . In altre parole, il tempo medio è in crescita quasi esponenziale con  $N$ . (Bacaër, 2015) suggerisce un risultato simile quando l'ambiente è periodico, anche se non esiste una formula esplicita per il parametro di crescita  $c$ .

In un ambiente casuale supercritico, cioè con  $R_0 > 1$ , il seguente articolo suggerisce che si dovrebbero distinguere due casi: un caso altamente supercritico in cui  $a_1 > a_2 > b$  e un caso debolmente supercritico in cui  $a_1 > b > a_2$ . Nel caso altamente supercritico in cui  $a_1 > a_2 > b$ , ipotizziamo che il tempo medio fino all'estinzione aumenti approssimativamente in modo esponenziale con  $N$  con un parametro  $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$ . Più esattamente, il logaritmo di questo tempo medio, diviso per  $N$ , converge in  $c_2$ . Il comportamento asintotico è quindi lo stesso che se l'ambiente rimanesse bloccato nello stato 2, vale a dire quello che è meno favorevole alla propagazione dell'epidemia e quello in cui si verifica preferibilmente l'estinzione.

Tuttavia, se  $a_1 > b > a_2$  e  $R_0 > 1$ , quindi ipotizziamo che il tempo medio di estinzione aumenti di  $N^\omega$  con

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

In questo caso,  $R_0 > 1$  è equivalente a  $\omega > 0$ . Intuitivamente, di tanto in tanto accade che uno rimanga nello stato 2 per molto tempo. La probabilità che questa durata sia maggiore di  $\tau$  è  $e^{-q_2\tau}$ . Nello stato 2, il tempo medio di estinzione per  $N$  grande è dell'ordine di  $\tau \simeq \frac{\log N}{b-a_2}$  (Doering et al., 2005); questo può anche essere indovinato dall'equazione di quasi estinzione  $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$ . Quindi, infine, la probabilità di estinzione durante un periodo nello stato 2 è dell'ordine di  $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$ . Ciò suggerisce che il tempo medio di estinzione è dell'ordine di grandezza dell'inverso, cioè  $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$ . Secondo la nostra analisi, l'ordine di grandezza è in realtà  $N^\omega$  con  $\omega$  dato da (3).

Si noti inoltre che se  $q_1$  e  $q_2$  sono moltiplicati per  $1 + \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$ , allora  $R_0$  rimane invariato ma  $\omega$  viene moltiplicato per  $1 + \varepsilon$ : in questo modello, una maggiore variabilità ambientale tende ad aumentare il tempo medio di estinzione.

Questa legge in  $N^\omega$  sembra essere in grado di generalizzare nel caso di un ambiente con  $J$  stati se

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

Abbiamo

$$R_0 = \left( \sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

se  $Q$  è il generatore infinitesimale e se  $u$  è l'unico vettore con

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(Bacaër e Ed-Darraz, 2014). Lascia che  $A$  e  $B$  denotino le matrici diagonali  $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$  e  $\text{diag}(b, \dots, b)$ . Considera il limite spettrale

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

dove  $\sigma(\cdot)$  indica lo spettro di una matrice e  $\Re(\cdot)$  la parte reale di un numero complesso. Noi mostriamo

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

Quindi ipotizziamo che il tempo medio di estinzione aumenti di  $N^\omega$ . Nel caso particolare in cui  $a_j \neq b$  per tutto  $j$ , il numero  $\omega$  è semplicemente l'autovalore della più grande parte reale della matrice  $(A - B)^{-1}Q$ . Questa matrice e l'espressione del suo autovalore  $\omega$  dato da (3) per  $I = 2$  sono già presenti in (Sawyer e Slatkin, 1981, equazioni (14) e (20)) per un modello di popolazione senza stocastica demografica nel caso subcritico ( $R_0 < 1$ ); in questo caso, il tempo medio fino all'estinzione tuttavia aumenta con il logaritmo di  $N$ .

Diversi autori hanno trovato nel frattempo una legge di potere all'estinzione nei modelli di popolazione in un ambiente casuale browniano (Ludwig, 1976; Leigh, 1981; Lande, 1993). Usano un'equazione di diffusione come punto di partenza. Tuttavia (Gaveau et al., 1996) e (Doering et al., 2005) hanno dimostrato che questa equazione porta a una formula inesatta per il parametro  $c$ . In effetti, questa equazione non rappresenta sempre bene la coda della distribuzione quasi stazionaria, che è precisamente la parte più importante per studiare il processo di estinzione. Si noti tuttavia che (Kamenev et al., 2008) hanno affrontato il problema dell'estinzione per le popolazioni in un ambiente casuale con rumore colorato utilizzando integrali di percorso.

La sezione 2 presenta la distribuzione quasi stazionaria del modello. La sezione 3 utilizza il metodo di Brillouin, Kramers e Wentzel (BKW) per ottenere approssimazioni valide nelle zone del parametro  $x = n/N$  in cui la distribuzione varia rapidamente. La sezione 4 utilizza un'altra approssimazione nell'area in cui la distribuzione varia lentamente. La sezione 5 utilizza un'equazione di diffusione per collegare le due approssimazioni precedenti: le funzioni ipergeometriche confluenti di Kummer e Tricomi sostituiscono qui la funzione di errore di Gauss utilizzata in particolare da (Meerson e Sasorov, 2008). La sezione 6 stima l'autovalore associato alla distribuzione quasi stazionaria.

Nessuna di queste approssimazioni è stata rigorosamente ottenuta, la sezione 7 presenta tuttavia simulazioni numeriche che sembrano confermare il valore numerico degli esponenti per la legge esponenziale nel caso fortemente supercritico e per la legge del potere nel caso debolmente supercritico. La sezione 8 aggiunge alcune osservazioni. In particolare, confrontiamo nel regime debolmente supercritico il caso di un ambiente markoviano e quello di un ambiente periodico con la stessa proporzione di tempo in uno stato favorevole o sfavorevole: il primo porta a una legge di potere per il tempo medio fino all'estinzione, il secondo ad una legge esponenziale. La Sezione 9 considera il caso di una catena di Markov con un numero finito di stati e discute altre generalizzazioni.

## 2 Distribuzione quasi stazionaria

Considera la probabilità che ci siano  $n$  persone infette, nell'ambiente  $j$ , al momento  $t$ :  $p_{n,j}(t)$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - \left[ a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - \left[ a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Definiamo

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$  : un vettore di colonna
- $A_n = \text{diag}[a_1 n(1 - \frac{n}{N}), a_2 n(1 - \frac{n}{N})]$  : una matrice diagonale di ordine due
- $B_n = \text{diag}[bn, bn]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

Il sistema (4) - (5) è nella forma

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

Gli autovalori di  $M$  sono quelli di  $Q$  e quelle di  $R$ . Gli autovalori di  $Q$  sono  $0$  e  $-(q_1 + q_2)$ . I coefficienti della matrice  $R$  al di fuori della diagonale sono positivi o zero. Inoltre, la matrice  $R$  è irriducibile, come possiamo vedere con il grafico associato. Un corollario del teorema di Perron e Frobenius (Smith, 1995, corollario 3.2) mostra che la matrice  $R$  ha un vero autovalore  $\lambda$  che è semplice, strettamente maggiore della parte reale di tutti gli altri autovalori e con un autovettore associato con componenti strettamente positivi. Se  $\mathbf{1}$  è il vettore di linea  $[1, 1, \dots, 1]$  della dimensione  $2N$ , allora

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

Secondo (Berman e Plemmons, 1994, Teorema 6.2.3, L33), abbiamo  $\lambda < 0$ . Scegliamo  $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$  un autovettore di  $M$  associato all'autovalore  $\lambda$ :  $M\pi = \lambda\pi$ . In altre parole,

$$\lambda \pi_{n,1} = - [a_1 n(1 - \frac{n}{N}) + b n + q_1] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} + a_1(n-1)(1 - \frac{n-1}{N}) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \quad (6)$$

$$\lambda \pi_{n,2} = - [a_2 n(1 - \frac{n}{N}) + b n + q_2] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} + a_2(n-1)(1 - \frac{n-1}{N}) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \quad (7)$$

Normalizziamo l'autovettore imponendo ad esempio

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

La figura 1 mostra  $\pi_{n,1}$  e  $\pi_{n,2}$  in funzione di  $n/N$  per  $n \geq 1$  in due casi: un caso in cui  $R_0 > 1$  e  $a_1 > a_2 > b$ , un caso in cui  $R_0 > 1$  e  $a_1 > b > a_2$ . L'autovettore  $\pi$  viene calcolato con il software Scilab. Il picco di  $\pi_{n,1}$  è vicino a  $x_1 = 1 - b/a_1$ , come ci si aspetterebbe se si pensasse all'equazione di campo media per la proporzione  $i$  di persone infette

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1 - i) - bi.$$

In effetti  $x_1$  è l'unico stato di equilibrio stabile di questa equazione. Il picco di  $\pi_{n,2}$  è vicino a  $x_2 = 1 - b/a_2$  se  $a_2 > b$  e vicino a  $x = 0$  se  $a_2 < b$ .

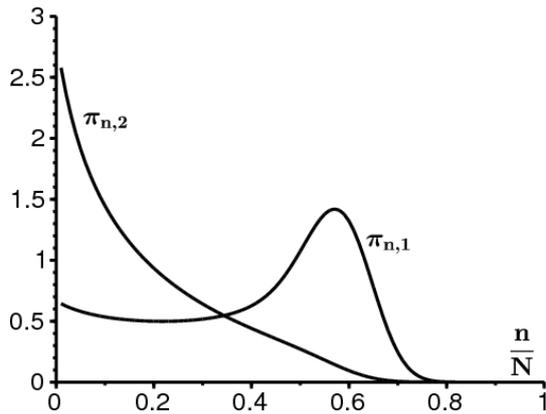
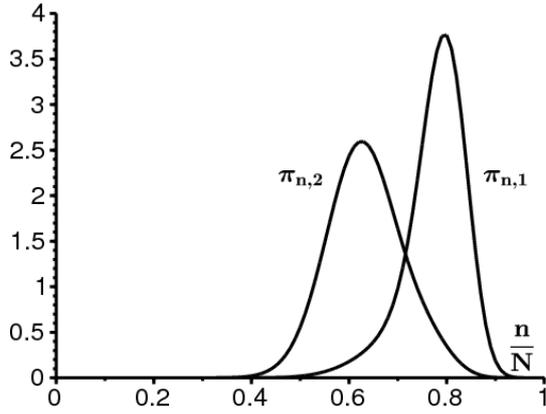


Figura 1. I componenti  $\pi_{n,1}$  e  $\pi_{n,2}$  per  $n \geq 1$  dell'autovettore  $\pi$  in funzione di  $n/N$  quando  $N = 100$ ,  $q_1 = 1$  e  $q_2 = 1$ . Altri valori di parametro: a)  $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ , b)  $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$ .

Definiamo

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$ .

Il sistema lineare (1) - (2) può essere scritto nel modulo

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

I sistemi (8) - (9) e (6) - (7) lo dimostrano

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

dove la stella \* indica la trasposizione di vettori o matrici. Prendendo il solito prodotto punto, otteniamo  $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$ . pertanto

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

In altre parole,  $-1/\lambda$  è una combinazione lineare di  $(T_{n,j})$  per  $n \geq 1$  e  $j = 1, 2$ . Di seguito, siamo principalmente interessati a  $\lambda$ . Studiamo  $(T_{n,j})$  nella sezione 7 attraverso simulazioni numeriche.

### 3. Approssimazione BKW

*Il caso*  $x > x_1 = 1 - b/a_1$ . con  $R_0 > 1$ , lo supponiamo  $\lambda \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow +\infty$ . Verificheremo a posteriori, come ad esempio (Meerson e Sasorov, 2008) per un modello diverso, che questo è effettivamente il caso. La parte sinistra di (6) - (7) può quindi essere trascurata. per  $x > x_1$ , cerchiamo un'approssimazione BKW (Bender e Orszag, 1978) del modulo

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

dove  $x = n/N$ . Uno sviluppo di Taylor di ordine 2 per  $S(x)$  e dell'ordine 1 per  $\Sigma(x)$  suggerisce questo

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

Otteniamo sostituendo in (6) e semplificando  $e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}. \end{aligned}$$

Le espressioni in  $O(N)$  danno

$$0 \simeq N x \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] \left[ a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

Il primo termine tra parentesi quadre è null solo per funzioni costanti  $S(x)$ . Scegli la soluzione che annulla il secondo termine tra parentesi quadre

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

cioè

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

fatta eccezione per una costante additiva. Questo implica  $S''(x) = \frac{1}{1-x}$ . La funzione  $\Sigma(x)$  si ottiene con le espressioni in  $O(1)$ :

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left[ x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[ 1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[ 1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1. \end{aligned}$$

Sostituendo  $S(x)$  dalla sua espressione, otteniamo

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right), \\ \Sigma(x) &= \sigma_1(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right). \end{aligned}$$

La funzione  $c(x)$  in  $\pi_{n,2}$  è ottenuto da (7). La forma di  $\pi_{n,2}$  è stato scelto per bilanciare le diverse espressioni. In effetti, il più alto ordine dà

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ N a_2 x (1 - x) \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] + b N x \left( e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

Sostituendo  $S(x)$  dalla sua espressione, otteniamo

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2) x (x - x_1)}.$$

In sintesi, congetturiamo per  $x > x_1$ ,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-N s_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N (a_1 - a_2) x (x - x_1)}, \quad (10)$$

per una certa costante  $k_1$ . Considerare in particolare il comportamento di  $\pi_{n,1}$  e di  $\pi_{n,2}$  per  $x > x_1$  e  $x$  vicino a  $x_1$ . Definiamo  $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$ . Abbiamo  $s_1'(x_1) = 0$ . Uno sviluppo di Taylor dà

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s_1''(x_1) (x - x_1)^2 / 2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b} (x - x_1)^2.$$

In tal modo

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{N c_1 - N \frac{a_1}{2b} (x - x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1}}{\sqrt{1 - x_1} (x - x_1)^{\frac{q_1}{a_1 - b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N (a_1 - a_2) x_1 (x - x_1)}. \quad (11)$$

**Il caso  $x < x_2 = 1 - b/a_2$  se  $a_1 > a_2 > b$ .** Simmetricamente, cerchiamo una soluzione se  $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

per  $x < x_2 = 1 - b/a_2$ . Il sistema (6) - (7) porta, come sopra, a

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1-x) \log(1-x)$$

ad eccezione di una costante additiva, mentre

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x_2 - x}{x} \right]^{\frac{q_2}{a_2 - b}} \right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

In sintesi, congetturiamo per  $x < x_2$ ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x) - \sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

per una certa costante  $k_2$ , per  $x < x_2$  e  $x$  vicino a  $x_2$ ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2 - x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2 - b} - 1}}{\sqrt{1 - x_2} (x_2 - x)^{\frac{q_2}{a_2 - b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

Le figure 2 e 3 mostrano  $-(\log \pi_{n,1})/N$  e  $-(\log \pi_{n,2})/N$  a seconda di  $n/N$  per  $1 \leq n \leq N$ , con  $\pi_{n,i}$  calcolato utilizzando il sistema (6) - (7). Le figure mostrano anche le approssimazioni (10) e (12) in blu scuro e rosso. La costante  $k_1$  in (10) è scelto in modo che  $\pi_{n,1}$  coincida con la sua approssimazione per  $n = N - 1$ . La costante  $k_2$  in (12) è determinato da  $k_1$  come spiegato nella sezione 5 di seguito.

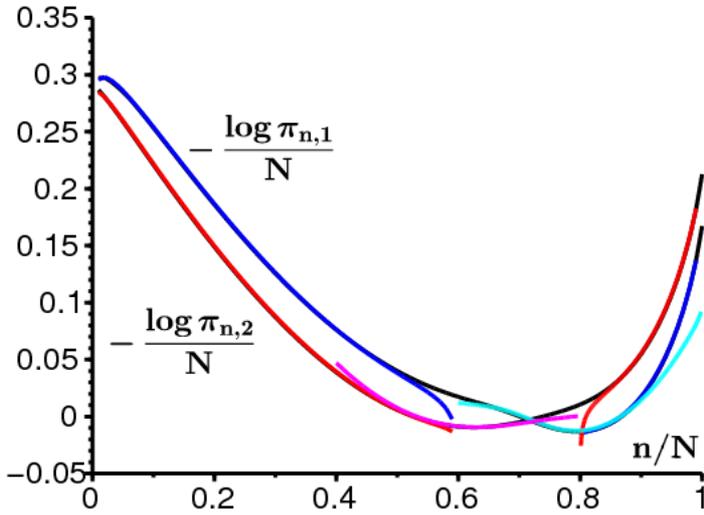


Figura 2. L'esempio con  $a_1 > a_2 > b$ . In nero, sotto le altre curve:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  e  $-(\log \pi_{n,2})/N$  a seconda di  $x = n/N$ . per  $\pi_{n,1}$ : in blu scuro, approssimazioni (10) per  $x > x_1$  e (12) per  $x < x_2$ ; in azzurro, approssimazione diffusiva (25) per  $x \simeq x_1$ . per  $\pi_{n,2}$ : in rosso, approssimazioni (10) per  $x > x_1$  e (12) per  $x < x_2$ ; in rosa, l'approssimazione diffusiva (31) per  $x \simeq x_2$ .

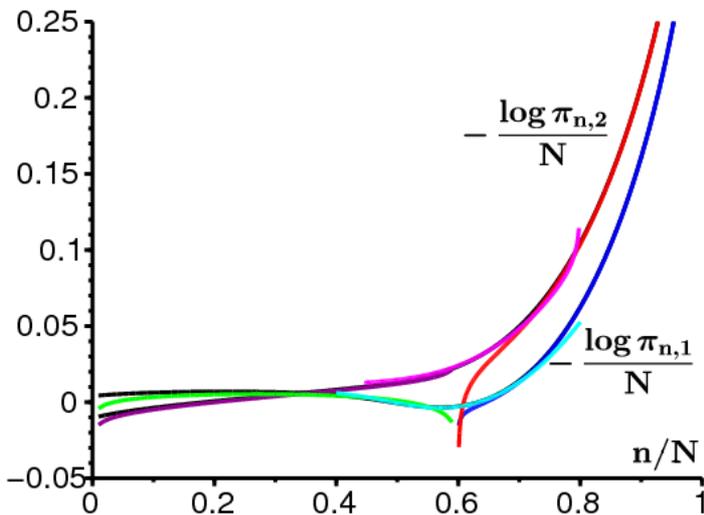


Figura 3. L'esempio con  $a_1 > b > a_2$ . In nero, sotto le altre curve:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  e  $-(\log \pi_{n,2})/N$  a seconda di  $x = n/N$ . per  $\pi_{n,1}$ : in blu scuro, l'approssimazione (10) per  $x > x_1$ ; in verde, approssimazione (20) per  $x < x_1$ ; in azzurro, approssimazione diffusiva (25) per  $x \simeq x_1$ . per  $\pi_{n,2}$ : in rosso, l'approssimazione (10) per  $x > x_1$ ; in viola, approssimazione (19) per  $x < x_1$ ; in rosa, approssimazione diffusiva (31) per  $x \simeq x_1$ .

## 4 Approssimazione nell'area di variazione lenta

Stiamo cercando un'approssimazione di  $\pi_{n,1}$  e  $\pi_{n,2}$  per  $x_2 < x < x_1$  se  $a_1 > a_2 > b$  e per  $0 < x < x_1$  se  $a_1 > b > a_2$ . In questi intervalli,  $S(x) = 0$ . Consideriamo il sistema (6) - (7) e proviamo direttamente l'approssimazione continua  $\pi_{n,1} \simeq y(x)$ ,  $\pi_{n,2} \simeq z(x)$ , con  $x = n/N$ . Uno sviluppo di Taylor dà

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

Con  $\lambda \approx 0$ , ciò porta all'approssimazione diffusiva

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

Trascurando  $1/N$ , otteniamo le equazioni

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

che hanno la stessa forma delle equazioni (29) - (30) di (Slatkin, 1978). Aggiungendo le equazioni (16) e (17), troviamo

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

La funzione tra parentesi quadre è quindi costante. Perché  $x$  è un fattore, questo suggerisce facendo  $x \rightarrow 0$  che questa costante è zero:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

Questo permette di esprimere  $y(x)$  a seconda di  $z(x)$ . Sostituendo in (17), otteniamo dopo alcune manipolazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} &\simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)}, \\ z(x) &\simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \end{aligned} \quad (19)$$

per qualche costante  $C$ . Questa approssimazione è mostrata in viola nella Figura 3. La costante  $C$  è determinata da  $k_1$  come mostrato nella sezione 5 di seguito. Quindi le equazioni (18) e (19) lo mostrano

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

Questa approssimazione è mostrata in verde nella Figura 3. Se  $x \simeq x_1$  con  $x < x_1$ , otteniamo

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1x_1} \left( \frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}. \quad (21)$$

se  $a_1 > b > a_2$ , troviamo per  $x \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}, \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

Ricordalo  $R_0 = \frac{a_1q_2 + a_2q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$  è equivalente a  $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$  in questo caso. In particolare, l'integrale di  $z(x)$  nelle vicinanze di  $0^+$  è convergente. se  $a_1 > a_2 > b$ , quindi (19) mostra

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2x_2} \left( \frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} \quad (24)$$

vicino a  $x_2$  con  $x > x_2$ .

## 5 Approssimazione diffusa vicino $x_1$ e $x_2$

**La situazione vicino  $x_1$ .** Vicino a  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , la diffusione in (14) - (15) non può più essere trascurata. Analisi delle zone di transizione in  $x_1$  e  $x_2$  deve consentire che la costante  $C$  in (21) e (24) sia collegata alle costanti  $k_1$  da (10) e  $k_2$  da (12). Definiamo  $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$ . Quindi il coefficiente della derivata dell'ordine 1 in (14) può essere approssimato da un'espansione di Taylor dell'ordine 1

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

Trascuriamo  $q_2 z$  di fronte  $q_1 y$  se  $x \simeq x_1$ :

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b}\right) y.$$

con

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

abbiamo l'equazione differenziale Hermite

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

Stiamo cercando una soluzione sotto forma di un'intera serie

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

Otteniamo la relazione di ricorrenza

$$w_{n+2} = \frac{2(n + 2\alpha_1)}{(n + 2)(n + 1)} w_n,$$

dove  $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1 - b}$ . Abbiamo quindi due soluzioni linearmente indipendenti

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

dove  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono costanti e

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$$

è la funzione ipergeometrica confluyente di Kummer. Secondo (Maroni, 1997, equazione (93)), abbiamo  $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha - \beta}$  se  $z \rightarrow +\infty$ , dove  $\Gamma$  è la funzione Gamma di Eulero. In tal modo

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1 - 1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta_1 \rightarrow -\infty.$$

pertanto  $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  ha lo stesso comportamento asintotico di (21) quando  $\eta_1 \rightarrow -\infty$ , a condizione che

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2 - b}}}{\alpha_1^{1 - \frac{q_1}{a_1 - b}} x_1^{1 + \frac{q_1}{a_1 - b} + \frac{q_2}{a_2 - b}}}. \quad (26)$$

Se al contrario  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ , (11) suggerisce che  $Y(\eta_1)$  deve comportarsi come una certa costante moltiplicata per  $\eta_1^{-2\alpha_1}$ . La teoria delle funzioni ipergeometriche confluyente (Maroni, 1997) mostra che è necessario imporre

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

per una certa costante  $K$  ottenere tale comportamento asintotico. Anzi, allora abbiamo

$$Y(\eta_1) = K \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

cioè  $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$  per  $\eta_1 > 0$ , dove  $\Psi(\alpha, \beta; z)$  è la funzione ipergeometrica confluyente di Tricomi definita da

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

Secondo (Maroni, 1997, equazione (90)), abbiamo  $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$  se  $z \rightarrow +\infty$ . pertanto  $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$  se  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ .

L'equivalente di  $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  quindi coincide con (11) purché

$$K \left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

In sintesi, determinano le relazioni (26), (27) e (29)  $K$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $C$  a seconda di  $k_1$ . In particolare, perché  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  e  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , equazione (26) dà

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

Una forma alternativa può essere ottenuta utilizzando la formula di Legendre-Gauss  $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$ .

**La situazione vicino  $x_2$ .** se  $a_2 > b$ , facciamo un'analisi simile con (15) vicino a  $x = x_2 = 1 - b/a_2$ . Trascuriamo  $q_1 y$  di fronte  $q_2 z$ . se

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

allora

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

dove  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono costanti. Il comportamento per  $\eta_2 \rightarrow +\infty$  coincide con (24) purché

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left( \frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

Definiamo

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

per una certa costante  $\hat{K}$  (notare il segno meno per  $\delta_2$ ). Allora  $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$  se  $\eta_2 < 0$ . pertanto  $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$  per  $\eta_2 \rightarrow -\infty$ . Ciò coincide con (13) purché

$$\hat{K} \left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

Come sopra, (32) e (33) danno

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C[a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

Quindi le costanti  $k_2$ ,  $\hat{K}$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono determinati dalla costante  $C$ .

## 6 Valore proprio

Ricordalo  $M\pi = \lambda\pi$ . Aggiungendo tutte le linee di questo sistema di equazioni, otteniamo  $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$ . ma  $\lambda < 0$ . pertanto

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

Le prime due linee del sistema sono

$$\begin{aligned}\lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}.\end{aligned}$$

Aggiungendoli, troviamo

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

Consideriamo innanzitutto il caso in cui  $a_1 > b > a_2$  con  $R_0 > 1$ . Quindi (19) spettacoli

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

dove  $\kappa_1$  è una costante positiva indipendente da  $N$ . Utilizzando il fatto che il picco di  $\pi_{n,1}$  è vicino a  $x = n/N = x_1$  e relazioni (25), (28) e (30), troviamo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

dove  $\kappa_j$  (Sopra e sotto) sono ancora costanti positive, che sono indipendenti  $N$ . Quindi il termine dominante per  $N$  grande nel denominatore di (36) è quello con  $\pi_{n,2}$ . Nel numeratore,  $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$  e  $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$  dove  $y(x)$  e  $z(x)$  sono dati da (22) - (23), lo capiamo

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

In altre parole,  $-1/\lambda$  aumenta con  $N$  come legge di potere, il cui esponente è

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

come annunciato nell'introduzione. Notiamo inoltre che  $\omega$  converge verso  $+\infty$  se  $a_2$  converge in  $b$  con valori più bassi.

Ora considera il caso in cui  $a_1 > a_2 > b$ . Per semplificare, introduciamo la notazione  $f \approx g$  (da non confondere con il simbolo informale  $\simeq$  usato sopra) se  $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow +\infty$ . In particolare  $N^\beta \approx 1$  per tutti i  $\beta$ . Quindi (12) con  $x = 1/N$  lo mostra  $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$ . Più,

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s'_2(0)} \approx k_2.$$

Inoltre, il picco di  $\pi_{n,1}$  è vicino a  $x = n/N = x_1$  mentre quello di  $\pi_{n,2}$  è vicino a  $x_2$ . Pertanto (37) è ancora valido e mostra

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

mentre (31), (33) e (35) danno

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

Ma (34) e (35) mostrano

$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

Quindi (36) dà  $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$  e  $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$ . infine,  $-1/\lambda$  cresce all'incirca in modo esponenziale con un parametro  $c_2$ .

## 7 Il tempo medio di estinzione

Il sistema lineare (8) - (9) può essere risolto con il metodo numerico presentato da (Artalejo et al., 2013). Il metodo utilizza solo matrici quadrate di ordine 2 e riduce l'instabilità numerica. Ricordalo  $q_1 = q_2 = 1$  e  $b = 2$ .

**Primo esempio:**  $a_1 > a_2 > b$ . Prendiamo  $a_1 = 10$  e  $a_2 = 5$ . La Figura 4a mostra  $T_{n,1}$  e  $T_{n,2}$  a seconda di  $x = n/N$ . La Figura 4b suggerisce che il tempo medio di estinzione, a partire ad esempio da  $N$  persone infette nell'ambiente 1, aumenta all'incirca in modo esponenziale:  $T_{N,1} \approx e^{cN}$ . La regressione lineare dà  $c \simeq 0.32$ . Si noti che  $c_1 \simeq 0.81$  e  $c_2 \simeq 0.32$ , che suggerisce questo  $c = c_2$ .

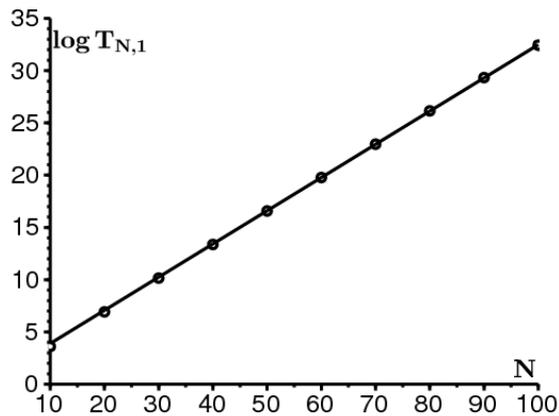
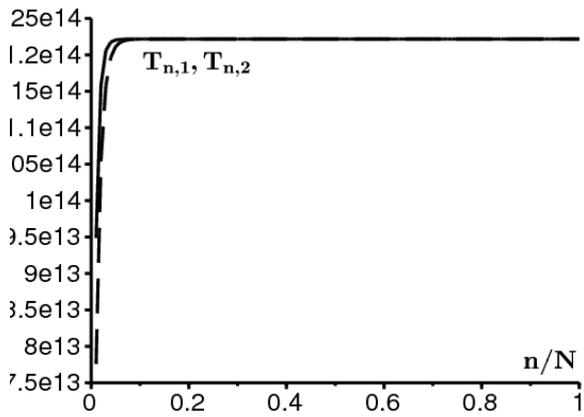


Figura 4. Il caso  $a_1 > a_2 > b$ . a)  $T_{n,1}$  [linea continua] e  $T_{n,2}$  [linea tratteggiata] a seconda di  $n/N$  se  $N = 100$ . b)  $\log T_{N,1}$  a seconda di  $N$ .

**Secondo esempio** :  $a_1 > b > a_2$  e  $R_0 > 1$ . Prendiamo  $a_1 = 5$  e  $a_2 = 1$ , pertanto  $R_0 = 1.5 > 1$ . La Figura 5a mostra  $T_{n,1}$  e  $T_{n,2}$  a seconda di  $x = n/N$ . La Figura 5b mostra  $\log T_{N,1}$  a seconda di  $\log N$ . Otteniamo una linea retta che suggerisce una legge di potere  $T \sim \kappa N^\omega$ . La pendenza, ottenuta per regressione lineare, è  $\omega \simeq 0.67$ . In questo caso, abbiamo  $\frac{a_2}{b-a_2} - \frac{a_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ , che corrisponde bene alla pendenza misurata.

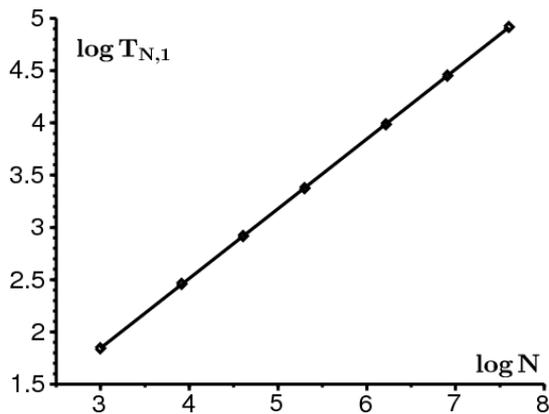
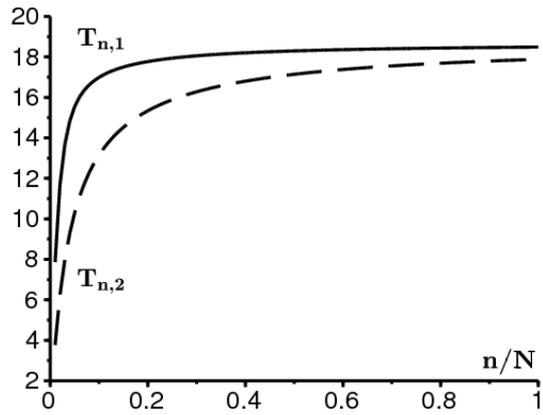


Figura 5. Il caso  $a_1 > b > a_2$  con  $R_0 > 1$ . a)  $T_{n,1}$  e  $T_{n,2}$  a seconda di  $x = n/N$  se  $N = 100$ . b)  $\log T_{N,1}$  a seconda di  $\log N$

## 8 note

### Confronto con il caso periodico.

Per evidenziare la differenza tra un ambiente casuale e un ambiente periodico, prendiamo il caso in cui  $a_1 = 5$  e  $a_2 = 1$ , mentre  $q_1 = q_2 = 1$  e  $b = 2$ . Allora  $u_1 = u_2 = 0.5$ : l'ambiente trascorre in media metà del tempo nello stato 1, l'altra metà nello stato 2. La figura 6 mostra da un lato come  $T_{N,1}$  aumenta in funzione di  $N$  come legge di potere. D'altra parte, si consideri lo stesso modello SIS ma in un ambiente periodico (Bacaër, 2015): scegliamo  $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ,  $a(t) = a_1$  per  $0 < t < u_1 T$  e  $a(t) = a_2$  per  $u_1 T < t < T$ . Per questo modello,  $e^{\Lambda T}$  è il moltiplicatore Floquet associato al processo di estinzione. La Figura 6 mostra come  $-1/\Lambda$  cresce esponenzialmente con  $N$ .

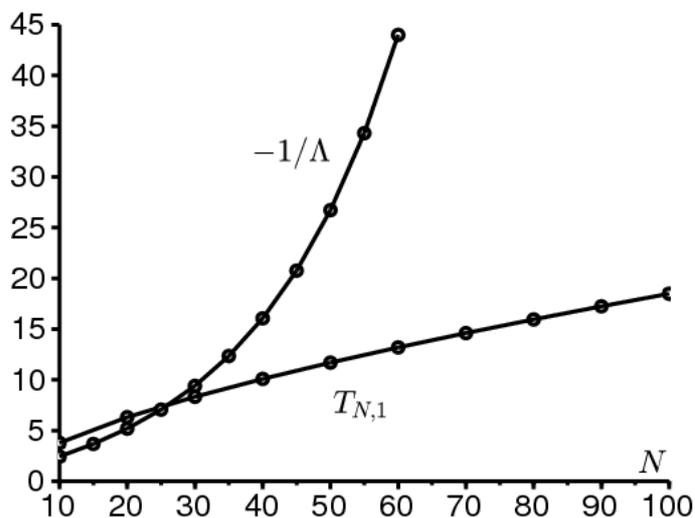


Figura 6. Tempo medio di estinzione  $T_{N,1}$  in un ambiente casuale e  $-1/\Lambda$  in un ambiente che ricorda periodicamente.

**Le equazioni di campo medie.** Può essere utile ricordare seguendo (Bacaër e Ed-Darraz, 2014) che le equazioni di campo medie

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,\end{aligned}$$

una volta linearizzato vicino allo stato di equilibrio (0,0), porta alla matrice giacobina

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

Ma possiamo avere allo stesso tempo

- un autovalore rigorosamente positivo, in modo che il banale equilibrio sia instabile,
- $R_0 < 1$ .

**Un altro limite.** I risultati ottenuti considerano che i parametri  $q_j$ ,  $a_j$  e  $b$  sono fissi mentre  $N$  converge all'infinito. Le cose sono ovviamente diverse, per esempio  $q_1$  e  $q_2$  convergere all'infinito, con un rapporto costante  $q_1/q_2$ . Il modello si avvicina quindi a un modello omogeneizzato in un ambiente costante con un parametro di contatto medio  $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$ .

**Il caso subcritico.** Non abbiamo affrontato il caso subcritico  $R_0 < 1$  con  $a_1 > b > a_2$  oppure  $b > a_1 > a_2$ . Il comportamento del tempo medio di estinzione è quindi all'incirca lo stesso di quello di un ambiente costante: a partire da una frazione fissa della popolazione infetta, il tempo medio è dell'ordine di  $\log N$  (Doering et al., 2005). A partire da una frazione infetta  $I/N$ , il tempo medio converge al contrario verso un limite. Nel caso di un ambiente casuale, questo è anche ciò che suggeriscono le simulazioni digitali.

## 9 Catena di Markov con numero finito di stati

con  $J$  afferma, ricorda che il generatore infinitesimale  $Q$  è tale che  $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$  per tutto  $j$ . Supponiamo che questa matrice  $Q$  è irriducibile e quello  $a_1 > a_2 > \dots > a_J$ . se  $a_J > b$ , quindi il tempo medio di estinzione aumenta approssimativamente in modo esponenziale con la dimensione  $N$  della popolazione, con un tasso  $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$ . È davvero nell'ambiente  $J$  che l'estinzione è molto probabile.

Se, d'altra parte  $b > a_J$  e  $R_0 > 1$ , nota  $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$  con  $x = n/N$ . Nelle vicinanze di  $x = 0$ , il sistema (16) - (17) diventa

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

Alla ricerca di una soluzione  $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$  con  $\omega > 0$  e  $\theta_j > 0$  per tutti  $j$ , troviamo

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

per  $1 \leq j \leq J$ . Con le notazioni dell'introduzione, abbiamo quindi il problema di autovalore generalizzato  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ , con  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ .

Lo mostreremo

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$  è una matrice diagonale. Per qualsiasi numero reale  $s$ ,

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$  ha tutti i suoi coefficienti al di fuori della diagonale che sono positivi o zero. Inoltre, questa matrice è irriducibile. Secondo un corollario del teorema di Perron e Frobenius (Smith, 1995, corollary 3.2),  $\mu(s)$  è un semplice autovalore di  $Q - sD$  (chiamato autovalore dominante) e c'è un autovettore  $\phi(s)$  tutti i cui componenti sono strettamente positivi tali che

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

Questo autovettore è unico con la normalizzazione

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

Secondo lo stesso corollario, l'esistenza di un vettore  $\theta$  con  $\theta_j > 0$  per tutto  $j$  e  $(Q - \omega D)\theta = 0$  ammonta effettivamente a  $\mu(\omega) = 0$ . Si tratta quindi di dimostrare che l'equazione  $\mu(\omega) = 0$  con  $\omega > 0$  ha una soluzione unica.

Per quanto riguarda l'esistenza, notiamo innanzitutto che il generatore infinitesimale  $Q$  corrisponde a  $s = 0$ : abbiamo  $\mu(0) = 0$  e notiamo  $u = \phi(0)$  l'autovettore a destra. Linea vettoriale  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$  è un autovettore a sinistra di  $Q$  associato all'autovalore 0.

Quindi

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

Secondo il semplice teorema di perturbazione degli autovalori, la funzione  $\mu(s)$  è differenziabile in  $s = 0$  e

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

ma  $R_0 > 1$  è equivalente a  $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$ . pertanto  $\mu'(0) < 0$ . Inoltre, abbiamo  $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$  per tutto  $s > 0$ . se  $s \rightarrow +\infty$ , abbiamo  $Q/s - D \rightarrow -D$ . Per continuità dello spettro,

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j (-D_{j,j}) = \max_j (b - a_j) = b - a_J > 0.$$

pertanto  $\mu(s) \rightarrow +\infty$  se  $s \rightarrow +\infty$ . perché  $\mu(0) = 0$  e  $\mu'(0) < 0$ , deduciamo che c'è  $\omega > 0$  con  $\mu(\omega) = 0$ .

Per quanto riguarda l'unicità, prima di tutto nota che la funzione  $\mu(s)$  è convesso. Anzi, per tutti i numeri reali  $\omega_1, \omega_2$  e  $0 < \varepsilon < 1$ , lo vediamo  $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$  è l'autovalore dominante della matrice  $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$ . Secondo un teorema di (Cohen, 1981), questo autovalore è inferiore o uguale a  $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$ . Ciò dimostra la convessità. Supponiamo ora che ci sia  $\omega_1 > \omega_2 > 0$  con  $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$ . perché  $\mu(0) = 0$  e perché  $\mu(s)$  è convesso, ne deduciamo  $\mu(s) = 0$  per  $0 \leq s \leq \omega_1$ . Questo contraddice  $\mu'(0) < 0$ .

$A - B$  è una matrice invertibile se  $a_j \neq b$  per tutti  $j$ . In tal modo  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  è equivalente a  $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$ . pertanto  $\omega$  è l'autovalore di  $(A - B)^{-1}Q$  la cui parte reale è la più grande.

Alla fine l'equazione (36) diventa

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

Nel numeratore, abbiamo  $\pi_{1,j} \simeq \theta_j (1/N)^{\omega-1}$ . Nel denominatore, abbiamo

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

pertanto  $-1/\lambda$  aumenta con  $N$  come  $N^\omega$ .

È senza dubbio possibile generalizzare un tale risultato se l'ambiente è governato ad esempio da un'equazione differenziale stocastica

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

Definiamo  $L^*$  l'operatore differenziale

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

Supponiamo che  $u(\xi)$  è una probabilità invariante:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

Quindi, nel caso dell'equazione di Langevin, abbiamo

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

Partiamo dal presupposto che il tasso di contatto  $a(\cdot)$  è una funzione attiva  $\mathbb{R}$  con  $\min a(\cdot) < b$  e

$$R_0 = \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

Il tempo medio di estinzione aumenta con  $N$  come  $N^\omega$ , dove  $\omega$  è l'unico numero positivo per il quale l'operatore differenziale  $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$  ha un autovalore principale uguale a 0. Per la convessità di questo autovalore in funzione di  $\omega$ , vedi (Kato, 1982). Si noti che l'assistente operatore di  $L^*$  è

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

e  $L\mathbf{1} = 0$  se  $\mathbf{1}$  indica la funzione costante uguale a 1.

## 10 Un ambiente periodico e casuale

Ritorniamo al caso di un insieme finito di ambienti. Ora supponiamo che il generatore infinitesimale  $Q(t)$

- è una funzione periodica del periodo  $\mathcal{T}$
- è una funzione continua o a tratti,
- è irriducibile almeno per un intervallo di  $t$ .

Il sistema (4) - (5) prende la forma  $\frac{dP}{dt} = M(t)P$ . Dopo (Bacaër, 2015), c'è poi una sola coppia  $(\lambda, \pi)$  con

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$  è una funzione periodica del periodo  $\mathcal{T}$

$$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$

- $\pi_{n,j}(t) > 0$  per  $1 \leq n \leq N$  e  $1 \leq j \leq J$ .

Più,

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

C'è anche una funzione unica  $\mathcal{T}$ -périodique  $u(t)$  con

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

Come (Bacaër e Ed-Darraz, 2014), definiamo

$$R_0 = \left( \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

Noi ipotizziamo che se  $a_1 > \dots > a_J > b$ , quindi il tempo medio di estinzione aumenta di nuovo esponenzialmente con  $N$ , con un tasso

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

Se, d'altra parte  $a_J < b$  ma  $R_0 > 1$ , l'approssimazione  $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$  porta a generalizzare (38) in prossimità di  $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

Una soluzione del modulo  $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$ , con una funzione  $\theta(t) = (\theta_j(t))$   $\mathcal{T}$ -periodico, deve controllare

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

C'è un solo numero reale  $\mu(\omega)$  per il quale  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  è il moltiplicatore Floquet dominante del sistema

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

Questa matrice è una funzione periodica del periodo  $\mathcal{T}$ . I coefficienti esterni alla diagonale sono positivi o zero. La matrice è irriducibile su un intervallo di  $t$ . Possiamo dimostrare che esiste un unico  $\omega > 0$  con  $\mu(\omega) = 0$ . Usiamo come nella sezione 9

- la convessità di  $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$  se  $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$  se  $a_J < b$ .

Si noti che la convessità di  $\mu(\omega)$  è dimostrato semplicemente generalizzando l'argomento di (Cohen, 1981). Usiamo

- la log-convessità del raggio spettrale delle matrici con coefficienti nell'insieme di zero o funzioni log-convesse in  $\omega$ , nota  $\mathfrak{S}$
- $\mathfrak{S}$  è stabile per addizione, moltiplicazione e transizione al limite

(Kingman, 1961). In effetti,  $Q(t)$  è una funzione periodica continua a tratti, che può essere raggiunta da una funzione a gradino.  $Q_k$  è la matrice approssimativa nell'intervallo  $(\tau_k, \tau_{k+1})$  per  $k = 0, \dots, K-1$ , con  $\tau_0 = 0$  e  $\tau_K = \mathcal{T}$ . se  $Q(t)$  era questa funzione della scala,  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  sarebbe uguale al raggio spettrale del prodotto delle matrici

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

Secondo (Cohen, 1981), ciascuna di queste matrici ha i suoi coefficienti in  $\mathfrak{S}$ . Quindi anche il prodotto delle matrici ha coefficienti in  $\mathfrak{S}$ . Il suo raggio spettrale è log-convesso in  $\omega$ .

perché

$$\lambda = -b \frac{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

concludiamo come prima  $-1/\lambda$  probabilmente aumenta con  $N$  come  $N^\omega$ .

**grazie**

Questo articolo è stato stimolato da un incontro presso l' *Istituto de Ciencias Matemáticas* di Madrid nell'ottobre 2014, da conferenze presso l'Università di Tlemcen nel maggio 2015 e da un seminario presso l' *Universidade Nova de Lisboa* nel giugno 2015.

**riferimenti**

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. *Am Nat* 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. *J Theor Biol* 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. *SIAM-AMS Proceedings* 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise-driven unlimited population growth. *Phys Rev E* 78 : 060103
- Näsell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. *Ecology* 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. *Theor Popul Biol* 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence