

El modelo estocástico del SIS para una epidemia en un entorno aleatorio.

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866.
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, Francia
Universidad Pierre y Marie Curie, Les Cordeliers, París, Francia
nicolas.bacaer@ird.fr

Resumen

En un entorno aleatorio que es una cadena de Markov en tiempo continuo de dos estados, el tiempo promedio de extinción del modelo estocástico SIS para una epidemia aumenta, en el caso supercrítico, exponencialmente en comparación con el tamaño de la población si ambos los estados son favorables, y de acuerdo con una ley de poder, si uno de los estados es favorable mientras que el otro es desfavorable para la propagación.

1 Introducción

Sea N el tamaño de la población, se supone que es constante. En el modelo estocástico del SIS para una epidemia, cada individuo está sano (S) o infectado (I) (Nåsell, 2011). Imagine que el entorno sigue una cadena de Markov en tiempo continuo con dos estados q_j ($j = 1, 2$) es la tasa de salida del estado j . En el entorno j , la velocidad de contacto de cada individuo es $a_j > 0$. Si en un instante t el número de personas infectadas es n y el entorno es j , la probabilidad de tener una nueva infección entre t y $t + dt$, con dt infinitamente pequeña, es $a_j n(1 - n/N) dt$. Suponga que la tasa de curación $b > 0$ de un individuo es la misma en ambos entornos. La probabilidad de una nueva cura en la población es entonces $bn dt$ entre t y $t + dt$. Este modelo ha sido estudiado por (Artalejo et al., 2013) pero no en la medida en que el tamaño N de la población aumenta. Es, además, un caso especial del proceso de nacimiento y muerte en un entorno markoviano (Cogburn y Torrez, 1981).

Definamos

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

Entonces Q es el generador infinitesimal, mientras que u_1 (resp. u_2) es la proporción de tiempo que se pasa en el entorno 1 (resp. 2). Para el modelo linealizado, es decir, el proceso lineal de nacimiento y muerte en un entorno aleatorio de parámetros a_j y b , (Bacaër y Ed-Darraz, 2014) señala que casi con certeza hay extinción si y solo si $R_0 \leq 1$. Por otro lado, para el modelo SIS no lineal, hay extinción cualquiera que sea el valor del parámetro R_0 . Sin embargo, cuando la población N es grande, el tiempo promedio de extinción es grande si $R_0 > 1$ y pequeño si $R_0 < 1$. Si $T_{n,j}$ es el tiempo promedio con inicialmente n personas infectadas en el entorno j , luego para $1 \leq n \leq N$,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

De más $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$. El objetivo de este artículo es estudiar en el caso supercrítico, es decir si $R_0 > 1$, el comportamiento del tiempo medio hasta la extinción cuando el tamaño de la población N se hace grande.

En un entorno constante con una velocidad de contacto a con $R_0 = \frac{a}{b} > 1$, (Doering et al., 2005, Tabla 1) muestra que el tiempo promedio de extinción de una fracción infectada de la población $x = n/N$ aumenta cuando $N \rightarrow \infty$, independientemente de x , como $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ donde $c = b/a - 1 - \log(b/a)$. En otras palabras, el tiempo medio está creciendo casi exponencialmente con N . (Bacaër, 2015) sugiere un resultado similar cuando el entorno es periódico, incluso si no hay una fórmula explícita para el parámetro de crecimiento c .

En un entorno aleatorio supercrítico, es decir, con $R_0 > 1$, el siguiente artículo sugiere que deben distinguirse dos casos: un caso altamente supercrítico donde $a_1 > a_2 > b$ y un caso débilmente supercrítico donde $a_1 > b > a_2$. En el caso altamente supercrítico donde $a_1 > a_2 > b$, conjeturamos que el tiempo promedio hasta la extinción aumenta aproximadamente exponencialmente con N con un parámetro $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$. Más exactamente, el logaritmo de este tiempo medio, dividido por N , converge a c_2 . El comportamiento asintótico es, por lo tanto, el mismo que si el entorno permaneciera bloqueado en el estado 2, es decir, lo que es menos favorable para la propagación de la epidemia y en el que la extinción tiene lugar preferentemente.

Sin embargo, si $a_1 > b > a_2$ y $R_0 > 1$, entonces conjeturamos que el tiempo promedio de extinción aumenta a medida que N^ω con

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

En este caso, $R_0 > 1$ es igual a $\omega > 0$. Intuitivamente, sucede de vez en cuando que uno permanece en el estado 2 durante mucho tiempo. La probabilidad de que esta duración sea mayor que τ es $e^{-q_2 \tau}$. En el estado 2, el tiempo de extinción promedio para N grande es del orden de

$\tau \simeq \frac{\log N}{b-a_2}$ (Doering et al., 2005); esto también se puede adivinar a partir de la ecuación de cuasi-extinción $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$. Finalmente, la probabilidad de extinción durante un período en el estado 2 es del orden de $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$. Esto sugiere que el tiempo promedio de extinción es del orden de magnitud de la inversa, es decir $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$. Según nuestro análisis, el orden de magnitud es en realidad N^ω con ω dado por (3).

Tenga en cuenta también que si q_1 y q_2 se multiplican por $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, entonces R_0 permanece sin cambios pero ω se multiplica por $1 + \varepsilon$: en este modelo, una mayor variabilidad ambiental tiende a aumentar el tiempo promedio de extinción.

Esta ley en N^ω parece ser capaz de generalizar en el caso de un entorno con estados J si

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

Se tiene

$$R_0 = \left(\sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

si Q es el generador infinitesimal y si u es el único vector con

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(Bacaër y Ed-Darraz, 2014). Deje A y B denotar las matrices diagonales $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$ y $\text{diag}(b, \dots, b)$. Considere el límite espectral

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

donde $\sigma(\cdot)$ denota el espectro de una matriz y $\Re(\cdot)$ La parte real de un número complejo. Mostramos

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

Luego conjeturamos que el tiempo promedio de extinción aumenta a medida que N^ω . En el caso particular donde $a_j \neq b$ para todo j , el número ω es simplemente el valor propio de la parte real más grande de la matriz $(A - B)^{-1}Q$. Esta matriz y la expresión de su valor propio ω dado por (3) para $I = 2$ ya se encuentran en (Sawyer y Slatkin, 1981, ecuaciones (14) y (20)) para un modelo de población sin estocasticidad demográfica en el caso subcrítico ($R_0 < 1$); en este caso, el tiempo medio hasta la extinción sin embargo aumenta como el logaritmo de N .

Varios autores han encontrado una ley de poder para el tiempo medio de extinción en modelos de población en un entorno aleatorio browniano (Ludwig, 1976; Leigh, 1981; Lande, 1993). Usan una ecuación de difusión como punto de partida. Sin embargo (Gaveau et al., 1996) y (Doering et al., 2005) han demostrado que esta ecuación conduce a una fórmula inexacta para el parámetro c . De hecho, esta ecuación no siempre representa bien la cola de la distribución cuasiestacionaria, que es precisamente la parte más importante para estudiar el proceso de extinción. Sin embargo, tenga en cuenta que (Kamenev et al., 2008) abordó el problema de la extinción de las poblaciones en un entorno aleatorio con ruido de colores utilizando integrales de ruta.

La sección 2 presenta la distribución cuasi estacionaria del modelo. La Sección 3 utiliza el método de Brillouin, Kramers y Wentzel (BKW) para obtener aproximaciones válidas en las zonas del parámetro $x = n/N$ donde la distribución varía rápidamente. La Sección 4 usa otra aproximación en el área donde la distribución varía lentamente. La sección 5 utiliza una ecuación de difusión para conectar las dos aproximaciones anteriores: las funciones hipergeométricas confluentes de Kummer y Tricomi reemplazan aquí la función de error de Gauss utilizada en particular por (Meerson y Sasorov, 2008). La sección 6 estima el valor propio asociado con la distribución cuasi estacionaria.

Sin embargo, ninguna de estas aproximaciones ha sido obtenida rigurosamente, la sección 7 presenta simulaciones numéricas que parecen confirmar el valor numérico de los exponentes para la ley exponencial en el caso fuertemente supercrítico y para la ley de potencia en el caso débilmente supercrítico. La Sección 8 agrega algunos comentarios. En particular, comparamos en el régimen débilmente supercrítico el caso de un entorno markoviano y el de un entorno periódico con la misma proporción de tiempo en un estado favorable o desfavorable: el primero conduce a una ley de poder por el momento hasta la extinción, la segunda a una ley exponencial. La Sección 9 considera el caso de una cadena de Markov con un número finito de estados y analiza otras generalizaciones.

2 Distribución cuasi estacionaria

Considere la probabilidad de que haya n personas infectadas, en el entorno j , en el momento t : $p_{n,j}(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - \left[a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - \left[a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Definamos

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$: un vector de columna
- $A_n = \text{diag}[a_1 n(1 - \frac{n}{N}), a_2 n(1 - \frac{n}{N})]$: una matriz diagonal de orden dos
- $B_n = \text{diag}[bn, bn]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & | & * \\ \hline 0 & & R \end{pmatrix}.$$

El sistema (4) - (5) tiene la forma

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

Los valores propios de M son los de Q y los de R . Los valores propios de Q son 0 y $-(q_1 + q_2)$. Los coeficientes de la matriz R fuera de la diagonal son positivos o cero. Además, la matriz R es irreducible, como podemos ver con el gráfico asociado. Un corolario del teorema de Perron y Frobenius (Smith, 1995, corolario 3.2) muestra que la matriz R tiene un valor propio real λ que es simple, estrictamente mayor que la parte real de todos los demás valores propios, y con un vector propio asociado con componentes estrictamente positivos. Si $\mathbf{1}$ es el vector lineal $[1, 1, \dots, 1]$ de tamaño $2N$, entonces

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

De acuerdo con (Berman y Plemmons, 1994, Teorema 6.2.3, L33), tenemos $\lambda < 0$. Nosotros elegimos

$\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$ un vector propio de M asociado con el valor propio λ : $M\pi = \lambda\pi$. Dicho de otro modo,

$$\lambda \pi_{n,1} = - \left[a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} + a_1(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \quad (6)$$

$$\lambda \pi_{n,2} = - \left[a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} + a_2(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \quad (7)$$

Normalicemos el vector propio imponiendo, por ejemplo,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

La figura 1 muestra $\pi_{n,1}$ y $\pi_{n,2}$ en función de n/N para $n \geq 1$ en dos casos: un caso donde $R_0 > 1$ y $a_1 > a_2 > b$, un caso donde $R_0 > 1$ y $a_1 > b > a_2$. El vector propio π se calcula con el software Scilab. El pico de $\pi_{n,1}$ está cerca de $x_1 = 1 - b/a_1$, como cabría esperar al pensar en la ecuación de campo media para la proporción i de personas infectadas

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

En efecto x_1 es el único estado de equilibrio estable de esta ecuación. El pico de $\pi_{n,2}$ está cerca de $x_2 = 1 - b/a_2$ si $a_2 > b$ y cerca de $x = 0$ si $a_2 < b$.

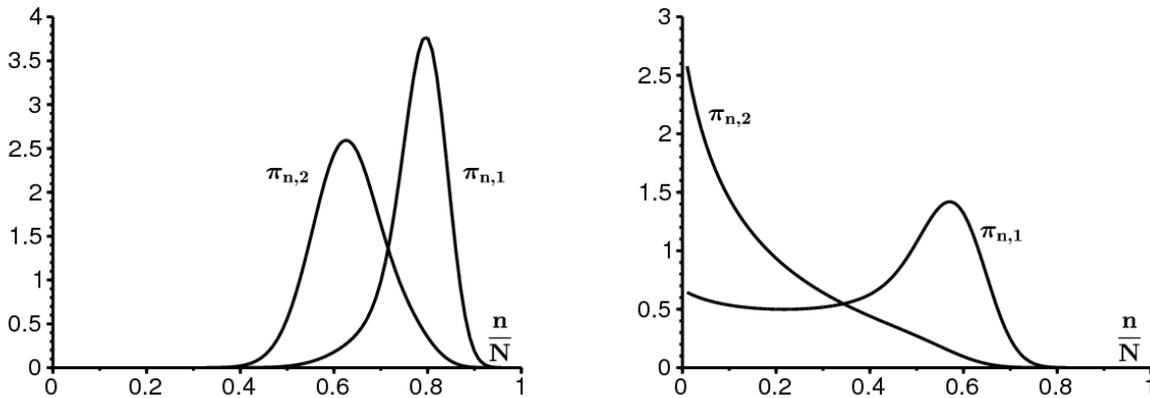


Figura 1. Los componentes $\pi_{n,1}$ y $\pi_{n,2}$ para $n \geq 1$ del vector propio π en función de n/N cuando $N = 100$, $q_1 = 1$ y $q_2 = 1$. Otros valores de parámetros: a) $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ b) $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$.

Definamos

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$.

El sistema lineal (1) - (2) se puede escribir en la forma

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) (T_{n+1,1} - T_{n,1}) + b n (T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) (T_{n+1,2} - T_{n,2}) + b n (T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

Los sistemas (8) - (9) y (6) - (7) muestran que

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

donde la estrella * indica la transposición de vectores o matrices. Al tomar el producto dot habitual, obtenemos $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$. Entonces

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

Dicho de otro modo, $-1/\lambda$ es una combinación lineal de $(T_{n,j})$ para $n \geq 1$ y $j = 1, 2$. A continuación, estamos interesados principalmente en λ . Estudiamos $(T_{n,j})$ en la sección 7 a través de simulaciones numéricas.

3. Aproximación BKW

El caso $x > x_1 = 1 - b/a_1$. Con $R_0 > 1$, conjeturamos que $\lambda \rightarrow 0$ si $N \rightarrow +\infty$. Verificaremos a posteriori, como lo hizo por ejemplo (Meerson y Sasorov, 2008) para un modelo diferente, que este es el caso. Por lo tanto, el lado izquierdo de (6) - (7) puede ser descuidado. Para $x > x_1$, busquemos una aproximación BKW (Bender y Orszag, 1978) del formulario

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

donde $x = n/N$. Un desarrollo de Taylor de orden 2 para $S(x)$ y de orden 1 para $\Sigma(x)$ sugiere que

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

Obtenemos reemplazando en (6) y simplificando por $e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 \simeq & a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ & + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}. \end{aligned}$$

Las expresiones en $O(N)$ dan

$$0 \simeq N x \left[e^{S'(x)} - 1 \right] \left[a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

El primer término entre corchetes es nulo solo para funciones constantes $S(x)$. Elija la solución que cancela el segundo término entre corchetes

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

es decir

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

excepto por una constante aditiva. Esto implica $S''(x) = \frac{1}{1-x}$. La función $\Sigma(x)$ se obtiene con las expresiones en $O(1)$:

$$\begin{aligned} 0 \simeq & a_1 N \left[x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ & + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1. \end{aligned}$$

Reemplazando $S(x)$ por su expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right), \\ \Sigma(x) &= \sigma_1(x) = \log \left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right). \end{aligned}$$

La función $c(x)$ dentro $\pi_{n,2}$ se obtiene de (7). La forma de $\pi_{n,2}$ fue elegido para equilibrar las diferentes expresiones. De hecho, el orden más alto da

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ N a_2 x (1 - x) \left[e^{S'(x)} - 1 \right] + b N x \left(e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

Reemplazando $S(x)$ por su expresión, obtenemos

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2) x (x - x_1)}.$$

En resumen, conjeturamos para $x > x_1$,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-Ns_1(x)-\sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x(x - x_1)}, \quad (10)$$

por una cierta constante k_1 . Considere en particular el comportamiento de $\pi_{n,1}$ y $\pi_{n,2}$ para $x > x_1$ y x cerca de x_1 . Definamos $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$. Se tiene $s_1'(x_1) = 0$. Un desarrollo de Taylor da

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s_1''(x_1)(x - x_1)^2/2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b}(x - x_1)^2.$$

Entonces

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}}{\sqrt{1-x_1}(x-x_1)^{\frac{q_1}{a_1-b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x_1(x - x_1)}. \quad (11)$$

El caso $x < x_2 = 1 - b/a_2$ si $a_1 > a_2 > b$. Simétricamente, busquemos una solución si $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

para $x < x_2 = 1 - b/a_2$. El sistema (6) - (7) conduce, como arriba, a

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

excepto por una constante aditiva, mientras

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log\left(x \sqrt{1-x} \left[\frac{x_2-x}{x}\right]^{\frac{q_2}{a_2-b}}\right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

En resumen, conjeturamos para $x < x_2$,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x)-\sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

por una cierta constante k_2 . Para $x < x_2$ y x cerca de x_2 ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2}(x_2-x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

Las figuras 2 y 3 muestran $-(\log \pi_{n,1})/N$ y $-(\log \pi_{n,2})/N$ en función de n/N para $1 \leq n \leq N$, con $\pi_{n,i}$ calculado utilizando el sistema (6) - (7). Las figuras también muestran las aproximaciones (10) y (12) en azul oscuro y rojo. La constante k_1 en (10) se elige de modo que $\pi_{n,1}$ coincide con su aproximación para $n = N-1$. La constante k_2 en (12) está determinado por k_1 como se explica en la sección 5 a continuación.

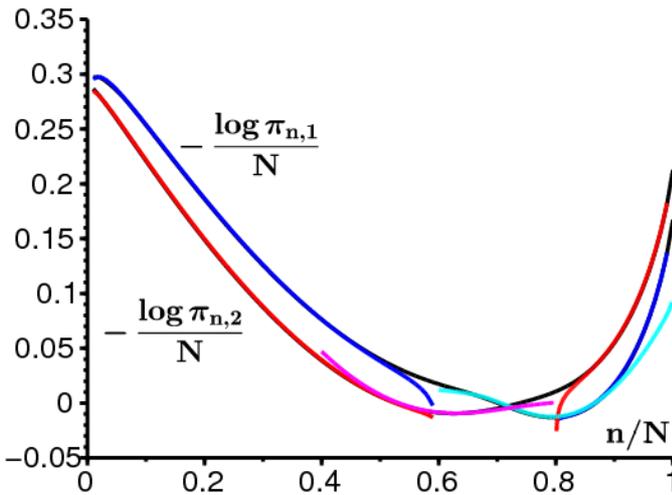


Figura 2. El ejemplo con $a_1 > a_2 > b$. En negro, debajo de las otras curvas: $-(\log \pi_{n,1})/N$ y $-(\log \pi_{n,2})/N$ en función de $x = n/N$.

Para $\pi_{n,1}$: en azul oscuro, aproximaciones (10) para $x > x_1$ y (12) para $x < x_2$; en azul claro, aproximación difusa (25) para $x \simeq x_1$.

Para $\pi_{n,2}$: en rojo, aproximaciones (10) para $x > x_1$ y (12) para $x < x_2$; en rosa, la aproximación difusiva (31) para $x \simeq x_2$.

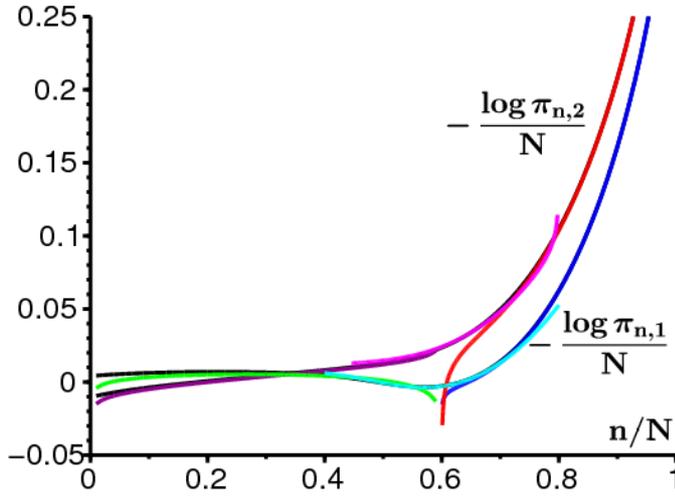


Figura 3. El ejemplo con $a_1 > b > a_2$. En negro, debajo de las otras curvas: $-(\log \pi_{n,1})/N$ y $-(\log \pi_{n,2})/N$ en función de $x = n/N$.

Para $\pi_{n,1}$: en azul oscuro, la aproximación (10) para $x > x_1$; en verde, aproximación (20) para $x < x_1$; en azul claro, aproximación difusa (25) para $x \simeq x_1$.

Para $\pi_{n,2}$: en rojo, la aproximación (10) para $x > x_1$; en morado, aproximación (19) para $x < x_1$; en rosa, aproximación difusa (31) para $x \simeq x_1$.

4 Aproximación en el área de variación lenta

Estamos buscando una aproximación de $\pi_{n,1}$ y $\pi_{n,2}$ para $x_2 < x < x_1$ si $a_1 > a_2 > b$ y para $0 < x < x_1$ si $a_1 > b > a_2$. En estos intervalos, $S(x) = 0$. Consideremos el sistema (6) - (7) e intentemos directamente la aproximación continua $\pi_{n,1} \simeq y(x)$, $\pi_{n,2} \simeq z(x)$, con $x = n/N$. Un desarrollo de Taylor da

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

Con $\lambda \simeq 0$, esto conduce a la aproximación difusiva

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

Al descuidar $1/N$, obtenemos las ecuaciones

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

que tienen la misma forma que las ecuaciones (29) - (30) de (Slatkin, 1978). Al sumar las ecuaciones (16) y (17), encontramos

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

La función entre corchetes es, por lo tanto, constante. Como x es un factor, esto sugiere al hacer $x \rightarrow 0$ que esta constante es cero:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

Esto permite expresar $y(x)$ en función de $z(x)$. Al reemplazar en (17), obtenemos después de algunas manipulaciones

$$\frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)},$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \quad (19)$$

para alguna constante C . Esta aproximación se muestra en púrpura en la Figura 3. La constante C está determinada por k_1 como se muestra en la sección 5 a continuación. Entonces las ecuaciones (18) y (19) muestran que

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx} \left(\frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

Esta aproximación se muestra en verde en la Figura 3. Si $x \simeq x_1$ con $x < x_1$, obtenemos

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1 x_1} \left(\frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (21)$$

Si $a_1 > b > a_2$, encontramos para $x \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

Recordemos que $R_0 = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$ es igual a $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$ en este caso. En particular, la integral de $z(x)$ en las proximidades de 0^+ es convergente Si $a_1 > a_2 > b$, entonces (19) muestra

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2 x_2} \left(\frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left(\frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \quad (24)$$

cerca de x_2 con $x > x_2$.

5 Aproximación difusiva cerca x_1 y x_2

La situación cerca x_1 . Cerca de $x = x_1$ y $x = x_2$, la difusión en (14) - (15) ya no se puede descuidar. Análisis de zonas de transición en x_1 y x_2 debe permitir que la constante C en (21) y (24) se vincule con las constantes k_1 de (10) y k_2 de (12). Definamos $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$. Entonces, el coeficiente de la derivada del orden 1 en (14) puede aproximarse mediante una expansión de Taylor del orden 1

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

Descuidamos $q_2 z$ delante $q_1 y$ si $x \simeq x_1$:

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b} \right) y.$$

Con

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

tenemos la ecuación diferencial de Hermite

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

Estamos buscando una solución en forma de serie completa

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$w_{n+2} = \frac{2(n+2\alpha_1)}{(n+2)(n+1)} w_n,$$

donde $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$. Por lo tanto, tenemos dos soluciones linealmente independientes

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

donde γ_1 y γ_2 son constantes y

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)$$

es la función hipergeométrica confluyente de Kummer. De acuerdo con (Maroni, 1997, ecuación (93)), tenemos $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta}$ si $z \rightarrow +\infty$, donde Γ es la función Gamma de Euler. Entonces

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1-1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

Entonces $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ tiene el mismo comportamiento asintótico que (21) cuando $\eta_1 \rightarrow -\infty$, siempre que

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (26)$$

Si por el contrario $\eta_1 \rightarrow +\infty$, (11) sugiere que $Y(\eta_1)$ debe comportarse como una cierta constante multiplicada por $\eta_1^{-2\alpha_1}$. La teoría de las funciones hipergeométricas confluentes (Maroni, 1997) muestra que es necesario imponer

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

para cierta K constante para obtener tal comportamiento asintótico. De hecho, entonces tenemos

$$Y(\eta_1) = K \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

es decir $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$ para $\eta_1 > 0$ donde $\Psi(\alpha, \beta; z)$ es la función hipergeométrica confluyente de Tricomi definida por

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

De acuerdo con (Maroni, 1997, ecuación (90)), tenemos $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$ si $z \rightarrow +\infty$. Entonces $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$ si $\eta_1 \rightarrow +\infty$.

El equivalente de $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$ luego coincide con (11) siempre que

$$K \left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

En resumen, las relaciones (26), (27) y (29) determinan K , γ_1 , γ_2 y C en función de k_1 . En particular, porque $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, la ecuación (26) da

$$\left[\sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

Se puede obtener una forma alternativa usando la fórmula de Legendre-Gauss $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$.

La situación cerca x_2 . Si $a_2 > b$, hacemos un análisis similar con (15) cerca de $x = x_2 = 1 - b/a_2$. Descuidamos $q_1 y$ delante $q_2 z$. Si

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

entonces

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

donde δ_1 y δ_2 son constantes El comportamiento para $\eta_2 \rightarrow +\infty$ coincide con (24) siempre que

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left(\frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1 - x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

Definamos

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

por una cierta constante \hat{K} (tenga en cuenta el signo menos para δ_2) Entonces $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$ si $\eta_2 < 0$. Entonces $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$ para $\eta_2 \rightarrow -\infty$. Esto coincide con (13) siempre que

$$\hat{K} \left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

Como arriba, (32) y (33) dan

$$\left[\sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C[a_1(1 - x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

Entonces las constantes k_2 , \hat{K} , δ_1 y δ_2 están determinados por la constante C .

6 valor propio

Recordemos que $M\pi = \lambda\pi$. Al sumar todas las líneas de este sistema de ecuaciones, obtenemos $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$. Pero $\lambda < 0$. Entonces

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

Las dos primeras líneas del sistema son

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}. \end{aligned}$$

Al agregarlos, encontramos

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

Consideremos primero el caso donde $a_1 > b > a_2$ con $R_0 > 1$. Entonces (19) muestra

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

donde κ_1 es una constante positiva independiente de N . Usando el hecho de que el pico de $\pi_{n,1}$ está cerca de $x = n/N = x_1$ y las relaciones (25), (28) y (30), encontramos

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

dónde los κ_j (Arriba y abajo) son aún constantes positivas, que son independientes de N . Entonces, el término dominante para N grande en el denominador de (36) es el que tiene $\pi_{n,2}$. En el numerador $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$ y $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$ donde $y(x)$ y $z(x)$ están dados por (22) - (23), obtenemos que

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

Dicho de otro modo, $-1/\lambda$ aumenta con N como ley de potencia, cuyo exponente es

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

como se anunció en la introducción. Notamos además que ω converge hacia $+\infty$ si a_2 converge a b por valores más bajos.

Ahora considere el caso donde $a_1 > a_2 > b$. Para simplificar, introduzcamos la notación $f \approx g$ (no debe confundirse con el símbolo informal \simeq usado arriba) si $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$ si $N \rightarrow +\infty$. En particular $N^\beta \approx 1$ para todos los β . Entonces (12) con $x = 1/N$ muestra que $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$. De más,

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s_2'(0)} \approx k_2.$$

Además, el pico de $\pi_{n,1}$ está cerca de $x = n/N = x_1$ mientras que el de $\pi_{n,2}$ está cerca de x_2 . Por lo tanto (37) sigue siendo válido y muestra

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

mientras que (31), (33) y (35) dan

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

Pero (34) y (35) muestran

$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

Así (36) da $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$ y $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$. Finalmente $-1/\lambda$ crece aproximadamente exponencialmente con un parámetro c_2 .

7 El tiempo promedio de extinción

El sistema lineal (8) - (9) se puede resolver con el método numérico presentado por (Artalejo et al., 2013). El método usa solo matrices cuadradas de orden 2 y reduce la inestabilidad numérica. Recordemos que $q_1 = q_2 = 1$ y $b = 2$.

Primer ejemplo: $a_1 > a_2 > b$. Vamos a tomar $a_1 = 10$ y $a_2 = 5$. La figura 4a muestra $T_{n,1}$ y $T_{n,2}$ en función de $x = n/N$. La Figura 4b sugiere que el tiempo promedio de extinción, comenzando, por ejemplo, de N personas infectadas en el ambiente 1, aumenta aproximadamente exponencialmente: $T_{N,1} \approx e^{cN}$. La regresión lineal da $c \simeq 0.32$. Tenga en cuenta que $c_1 \simeq 0.81$ y $c_2 \simeq 0.32$, lo que sugiere que $c = c_2$.

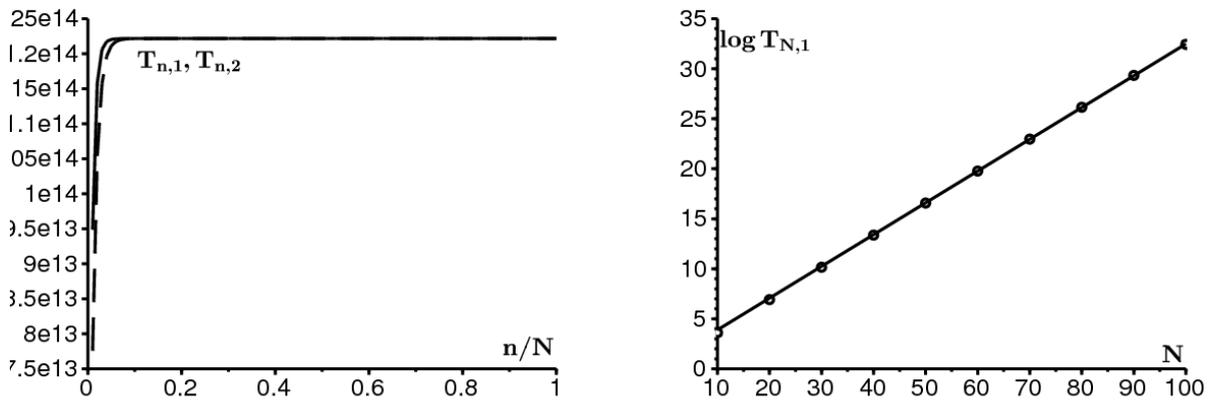


Figura 4. El caso $a_1 > a_2 > b$. a) $T_{n,1}$ [línea continua] y $T_{n,2}$ [línea de puntos] dependiendo de n/N si $N = 100$. b) $\log T_{N,1}$ en función de N .

Segundo ejemplo: $a_1 > b > a_2$ y $R_0 > 1$. Vamos a tomar $a_1 = 5$ y $a_2 = 1$. Entonces $R_0 = 1.5 > 1$. La figura 5a muestra $T_{n,1}$ y $T_{n,2}$ en función de $x = n/N$. La figura 5b muestra $\log T_{N,1}$ en función de $\log N$. Obtenemos una línea recta que sugiere una ley de poder $T \sim \kappa N^\omega$. La pendiente, obtenida por regresión lineal, es $\omega \simeq 0.67$. En este caso, tenemos $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, que corresponde bien a la pendiente medida.

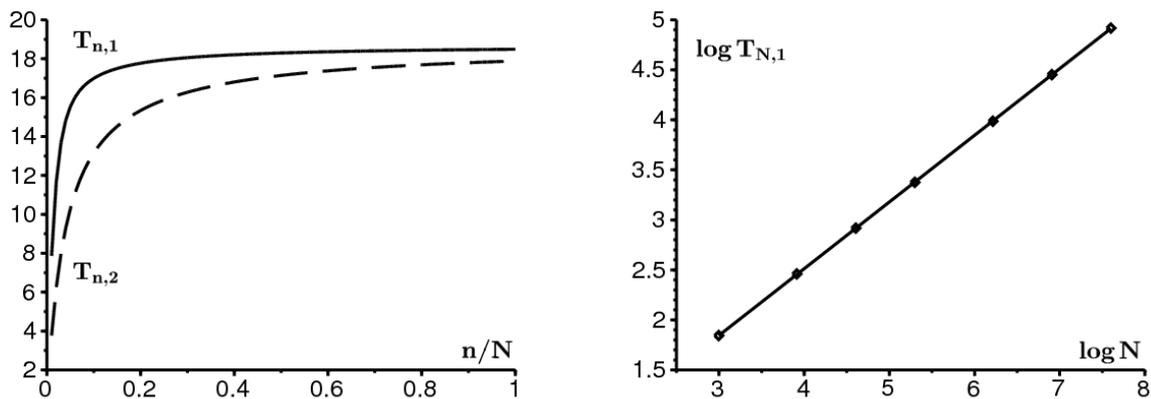


Figura 5. El caso $a_1 > b > a_2$ con $R_0 > 1$. a) $T_{n,1}$ y $T_{n,2}$ en función de $x = n/N$ si $N = 100$. b) $\log T_{N,1}$ en función de $\log N$.

8 notas

Comparación con el caso periódico.

Para resaltar la diferencia entre un entorno aleatorio y un entorno periódico, tomemos el caso donde $a_1 = 5$ y $a_2 = 1$, mientras que $q_1 = q_2 = 1$ y $b = 2$. Entonces $u_1 = u_2 = 0.5$: el medio ambiente pasa en promedio la mitad del tiempo en el estado 1, la otra mitad en el estado 2. La Figura 6 muestra en un lado cómo $T_{N,1}$ aumenta en función de N como ley de potencia. Por otro lado, considere el mismo modelo SIS pero en un entorno periódico (Bacaër, 2015): elija $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, $a(t) = a_1$ para $0 < t < u_1 T$ y $a(t) = a_2$ para $u_1 T < t < T$. Para este modelo, $e^{\Lambda T}$ es el multiplicador de Floquet asociado con el proceso de extinción. La Figura 6 muestra cómo $-1/\Lambda$ crece exponencialmente con N .

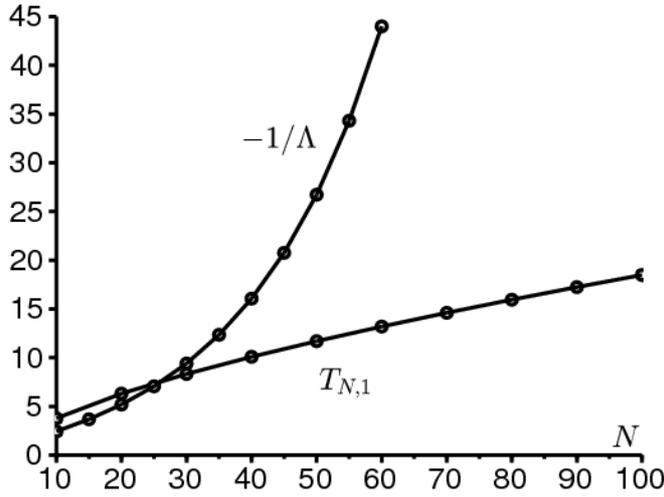


Figura 6. Tiempo promedio de extinción $T_{N,1}$ en un entorno aleatorio y $-1/\Lambda$ en un entorno periódico parecido.

Las ecuaciones de campo medias. Puede ser útil recordar siguiendo (Bacaër y Ed-Darraz, 2014) que las ecuaciones de campo medias

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,\end{aligned}$$

una vez linealizado cerca del estado de equilibrio $(0,0)$, conduce a la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

Pero podemos tener al mismo tiempo

- un valor propio estrictamente positivo, de modo que el equilibrio trivial sea inestable,
- $R_0 < 1$.

Otro límite. Los resultados obtenidos consideran que los parámetros q_j , a_j y b se arreglan mientras N converge al infinito. Las cosas son obviamente diferentes si, por ejemplo q_1 y q_2 convergen al infinito, con una relación constante q_1/q_2 . Luego, el modelo se aproxima a un modelo homogeneizado en un entorno constante con un parámetro de contacto promedio $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$.

El caso subcrítico. No abordamos el caso subcrítico $R_0 < 1$ con $a_1 > b > a_2$ o bien $b > a_1 > a_2$. El comportamiento del tiempo promedio de extinción es aproximadamente el mismo que en un entorno constante: a partir de una fracción fija de la población infectada, el tiempo promedio es del orden de $\log N$ (Doering et al., 2005). A partir de una fracción infectada I/N , el tiempo promedio converge por el contrario hacia un límite. En el caso de un entorno aleatorio, esto también es lo que sugieren las simulaciones digitales.

9 Cadena de Markov con número finito de estados

Con J estados, recuerda que el generador infinitesimal Q es tal que $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$ por todo j . Supongamos que esta matriz Q es irreducible y eso $a_1 > a_2 > \dots > a_J$. Si $a_J > b$, entonces el tiempo promedio de extinción aumenta aproximadamente exponencialmente con el tamaño N de la población, con una tasa $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$. De hecho, es en el entorno J donde la extinción es más probable.

Si, por otro lado $b > a_J$ y $R_0 > 1$ nota $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$ con $x = n/N$. En los alrededores de $x = 0$, el sistema (16) - (17) se convierte

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

Buscando una solución $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$ con $\omega > 0$ y $\theta_j > 0$ para todo j , encontramos

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

para $1 \leq j \leq J$. Con las anotaciones en la introducción, por lo tanto, tenemos el problema generalizado del valor propio $Q\theta = \omega(A - B)\theta$, con $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$.

Vamos a mostrar

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$ es una matriz diagonal Para cualquier número real s ,

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$ tiene todos sus coeficientes fuera de la diagonal que son positivos o cero. Además, esta matriz es irreducible. Según un corolario del teorema de Perron y Frobenius (Smith, 1995, corolario 3.2), $\mu(s)$ es un valor propio simple de $Q - sD$ (llamado valor propio dominante) y hay un vector propio $\phi(s)$ todos cuyos componentes son estrictamente positivos de modo que

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

Este vector propio es único con normalización

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

Según el mismo corolario, la existencia de un vector θ con $\theta_j > 0$ por todo j y $(Q - \omega D)\theta = 0$ en realidad equivale a $\mu(\omega) = 0$. Por lo tanto, se trata de mostrar que la ecuación $\mu(\omega) = 0$ con $\omega > 0$ Tiene una solución única.

Con respecto a la existencia, primero notamos que el generador infinitesimal Q corresponde a $s = 0$: se tiene $\mu(0) = 0$ y notamos $u = \phi(0)$ el vector propio a la derecha. Vector de línea $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$ es un vector propio a la izquierda de Q asociado con el valor propio 0. Así

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

De acuerdo con el teorema de perturbación de valor propio simple, la función $\mu(s)$ es diferenciable en $s = 0$ y

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

Pero $R_0 > 1$ es igual a $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$. Entonces $\mu'(0) < 0$. Además, tenemos $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$ por todo $s > 0$. Si $s \rightarrow +\infty$, se tiene $Q/s - D \rightarrow -D$. Por continuidad del espectro,

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j(-D_{j,j}) = \max_j(b - a_j) = b - a_J > 0.$$

Entonces $\mu(s) \rightarrow +\infty$ si $s \rightarrow +\infty$. Porque $\mu(0) = 0$ y $\mu'(0) < 0$, deducimos que hay $\omega > 0$ con $\mu(\omega) = 0$.

En cuanto a la unicidad, en primer lugar tenga en cuenta que la función $\mu(s)$ es convexo De hecho, para todos los números reales ω_1, ω_2 y $0 < \varepsilon < 1$, se ve que $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$ es el valor propio dominante de la matriz $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$. Según un teorema de (Cohen, 1981), este valor propio es menor o igual que $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$. Esto prueba la convexidad. Supongamos ahora que hay $\omega_1 > \omega_2 > 0$ con $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$. Porque $\mu(0) = 0$ y porque $\mu(s)$ es convexo, deducimos $\mu(s) = 0$ para $0 \leq s \leq \omega_1$. Esto contradice $\mu'(0) < 0$.

$A - B$ es una matriz invertible si $a_j \neq b$ para todos j . Entonces $Q\theta = \omega(A - B)\theta$ es igual a $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$. Entonces ω es el valor propio de $(A - B)^{-1}Q$ la parte real de la cual es la más grande.

Finalmente la ecuación (36) se convierte

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

En el numerador, tenemos $\pi_{1,j} \simeq \theta_j(1/N)^{\omega-1}$. En el denominador, tenemos

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

Entonces $-1/\lambda$ aumenta con N como N^ω .

Sin duda, es posible generalizar dicho resultado si el entorno se rige, por ejemplo, por una ecuación diferencial estocástica

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

Definamos L^* el operador diferencial

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

Suponemos que $u(\xi)$ es una probabilidad invariante:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

Entonces, en el caso de la ecuación de Langevin, tenemos

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

Suponemos que la tasa de contacto $a(\cdot)$ es una función en \mathbb{R} con $\min a(\cdot) < b$ y

$$R_0 = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

El tiempo promedio de extinción aumenta con N como N^ω donde ω es el único número positivo para el cual el operador diferencial $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$ tiene un valor propio principal igual a 0. Para la convexidad de este valor propio en función de ω , ver (Kato, 1982). Tenga en cuenta que el operador asistente de L^* es

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

y $L\mathbf{1} = 0$ si $\mathbf{1}$ denota la función constante igual a 1.

10 Un entorno que es periódico y aleatorio

Volvamos al caso de un conjunto finito de entornos. Ahora suponemos que el generador infinitesimal $Q(t)$

- es una función periódica de período \mathcal{T}
- es una función continua o continua por partes,
- es irreducible al menos durante un intervalo de t .

El sistema (4) - (5) toma la forma $\frac{dP}{dt} = M(t)P$. A continuación (Bacaër, 2015), hay una sola pareja (λ, π) con

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$ es una función periódica de período \mathcal{T}

$$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$

- $\pi_{n,j}(t) > 0$ para $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq j \leq J$.

De más,

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

También hay una función única. \mathcal{T} -periódico $u(t)$ con

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

Como (Bacaër y Ed-Darraz, 2014), definimos

$$R_0 = \left(\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

Conjeturamos que si $a_1 > \dots > a_J > b$, entonces el tiempo promedio de extinción aumenta nuevamente exponencialmente con N , con una tasa

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

Si, por otro lado $a_j < b$ pero $R_0 > 1$, la aproximación $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$ conduce a generalizar (38) en las cercanías de $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

Una solución de la forma $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$, con una función $\theta(t) = (\theta_j(t))$ \mathcal{T} -periódico, debe verificar

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

Hay un solo número real $\mu(\omega)$ por el cual $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$ es el multiplicador de Floquet dominante del sistema

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

Esta matriz es una función periódica del período. \mathcal{T} . Los coeficientes fuera de la diagonal son positivos o cero. La matriz es irreducible en un intervalo de t . Podemos demostrar que hay un único $\omega > 0$ con $\mu(\omega) = 0$. Usamos como en la sección 9

- la convexidad de $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1} D u(t) dt < 0$ si $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$ si $a_j < b$.

Tenga en cuenta que la convexidad de $\mu(\omega)$ se demuestra simplemente generalizando el argumento de (Cohen, 1981). Utilizamos

- la log-convexidad del radio espectral de las matrices con coeficientes en el conjunto de funciones cero o log-convexas en ω , anotado \mathfrak{S}
- \mathfrak{S} es estable por adición, multiplicación y transición al límite

(Kingman, 1961). En efecto, $Q(t)$ es una función periódica continua por partes, que puede ser abordada por una función de paso. Q_k es la matriz aproximada sobre el intervalo (τ_k, τ_{k+1}) para $k = 0, \dots, K-1$, con $\tau_0 = 0$ y $\tau_K = T$. Si $Q(t)$ fue esta función de escalera, $e^{\mu(\omega)T}$ sería igual al radio espectral del producto de matrices

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

Según (Cohen, 1981), cada una de estas matrices tiene sus coeficientes en \mathfrak{S} . Entonces el producto de matrices también tiene coeficientes en \mathfrak{S} . Su radio espectral es log-convexo en ω .

Porque

$$\lambda = -b \frac{\int_0^T \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

concluimos como antes $-1/\lambda$ probablemente aumenta con N como N^ω .

Agradecimientos

Este artículo fue estimulado por una reunión en el *Instituto de Ciencias Matemáticas* en Madrid en octubre de 2014, por conferencias en la Universidad de Tlemcen en mayo de 2015 y por un seminario en la *Universidade Nova de Lisboa* en junio de 2015.

Referencias

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herreó MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. *Am Nat* 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. *J Theor Biol* 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. *SIAM-AMS Proceedings* 10 : 87–104
- Maroni P (1997) *Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel*. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise-driven unlimited population growth. *Phys Rev E* 78 : 060103
- Nåsell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. *Ecology* 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. *Theor Popul Biol* 19 : 37–57
- Smith HL (1995) *Monotone dynamical systems*. American Mathematical Society, Providence