

# Das stochastische SIS-Modell für eine Epidemie in einer zufälligen Umgebung

J. Math. Biol. 73 (2016) 847–866.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, Frankreich  
Pierre und Marie Curie Universität, Les Cordeliers, Paris, Frankreich  
nicolas.bacaer@ird.fr

## Zusammenfassung

In einer zufälligen Umgebung, die eine Markov-Kette in einer kontinuierlichen Zeit mit zwei Zuständen ist, nimmt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben des stochastischen SIS-Modells für eine Epidemie im überkritischen Fall exponentiell in Bezug auf die Populationsgröße zu, wenn beide Staaten sind günstig und nach einem Machtgesetz, wenn einer der Staaten günstig ist, während der andere für die Ausbreitung ungünstig ist.

## 1 Einleitung

Sei  $N$  die Populationsgröße, die als konstant angenommen wird. Im stochastischen SIS-Modell für eine Epidemie ist jedes Individuum entweder gesund (S) oder infiziert (I) (Näsell, 2011). Stellen Sie sich vor, die Umgebung folgt einer Markov-Kette in kontinuierlicher Zeit mit zwei Zuständen.  $q_j$  ( $j = 1, 2$ ) ist die Austrittsrate aus dem Zustand  $j$ . In der Umgebung  $j$  beträgt die Kontaktrate jedes Einzelnen  $a_j > 0$ . Wenn zu einem Zeitpunkt  $t$  die Anzahl der infizierten Personen  $n$  und die Umgebung  $j$  ist, ist die Wahrscheinlichkeit einer neuen Infektion zwischen  $t$  und  $t + dt$  mit  $dt$  unendlich klein  $a_j n(1 - n/N) dt$ . Angenommen, die Heilungsrate  $b > 0$  eines Individuums ist in beiden Umgebungen gleich. Die Wahrscheinlichkeit einer neuen Heilung in der Bevölkerung ist dann  $bn dt$  zwischen  $t$  und  $t + dt$ . Dieses Modell wurde von (Artalejo et al., 2013) untersucht, jedoch nicht in dem Maße, in dem die Größe  $N$  der Bevölkerung groß wird. Es ist außerdem ein Sonderfall des Geburts- und Todesprozesses in einer markovianischen Umgebung (Cogburn und Torrez, 1981).

Lassen Sie uns definieren

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

Also  $Q$  ist der infinitesimale Generator, während  $u_1$  (bzw.  $u_2$ ) ist der Anteil der Zeit, die in Umgebung 1 verbracht wird (bzw. 2). Für das linearisierte Modell nämlich den linearen Prozess von Geburt und Tod in einer zufälligen Umgebung von Parametern  $a_j$  und  $b$ , (Bacaër und Ed-Darraz, 2014) stellt fest, dass es mit ziemlicher Sicherheit ein Aussterben gibt, wenn und nur wenn  $R_0 \leq 1$ . Für das nichtlineare SIS-Modell gibt es dagegen eine Auslöschung, unabhängig vom Wert des Parameters  $R_0$ . Wenn jedoch die Population  $N$  groß ist, ist die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben groß, wenn  $R_0 > 1$  und klein wenn  $R_0 < 1$ . Wenn  $T_{n,j}$  ist die durchschnittliche Zeit mit anfänglich  $n$  infizierten Personen in der Umgebung  $j$ , dann für  $1 \leq n \leq N$ ,

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

Darüber hinaus  $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$ . Das Ziel dieses Artikels ist es, im überkritischen Fall zu studieren, das heißt wenn  $R_0 > 1$  das Verhalten der mittleren Zeit bis zum Aussterben, wenn die Populationsgröße  $N$  groß wird.

In einer konstanten Umgebung mit einer Kontaktrate  $a$  mit  $R_0 = \frac{a}{b} > 1$ , (Doering et al., 2005, Tabelle 1) zeigt, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben aus einem infizierten Teil der Bevölkerung  $x = n/N$  zunimmt, wenn  $N \rightarrow \infty$ , unabhängig von  $x$ , wie  $\frac{a}{(a-b)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} e^{cN}$ , wo  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ . Mit anderen Worten, wächst die durchschnittliche Zeit fast exponentiell mit  $N$ . (Bacaër, 2015) schlägt ein ähnliches Ergebnis vor, wenn die Umgebung periodisch ist, auch wenn es keine explizite Formel für den Wachstumsparameter  $c$  gibt.

In einer überkritischen zufälligen Umgebung, d. H. Mit  $R_0 > 1$  Der folgende Artikel schlägt vor, zwei Fälle zu unterscheiden: einen sehr überkritischen Fall, in dem  $a_1 > a_2 > b$  und ein schwach überkritischer Fall, in dem  $a_1 > b > a_2$ . In dem höchst überkritischen Fall wo  $a_1 > a_2 > b$  Wir vermuten, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben mit  $N$  mit einem Parameter ungefähr exponentiell ansteigt  $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$ . Genauer gesagt konvergiert der Logarithmus dieser mittleren Zeit, geteilt durch  $N$ , gegen  $c_2$ . Das asymptotische Verhalten ist daher dasselbe, als ob die Umgebung in Zustand 2 blockiert geblieben wäre, dh das, was für die Ausbreitung der Epidemie am ungünstigsten ist und in dem das Aussterben bevorzugt stattfindet.

Wenn jedoch  $a_1 > b > a_2$  und  $R_0 > 1$  dann nehmen wir an, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben mit zunimmt  $N^\omega$  mit

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

In diesem Fall  $R_0 > 1$  ist äquivalent zu  $\omega > 0$ . Intuitiv kommt es von Zeit zu Zeit vor, dass man sehr lange im Zustand 2 bleibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Dauer größer als  $\tau$  ist, ist  $e^{-q_2\tau}$ . In Zustand 2 liegt die durchschnittliche Extinktionszeit für  $N$  groß in der Größenordnung von  $\tau \simeq \frac{\log N}{b - a_2}$  (Doering et al., 2005); Dies kann auch aus der Quasi-Extinktionsgleichung erraten werden  $e^{-(b-a_2)\tau} = 1/N$ . Schließlich liegt die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens während einer Periode in Zustand 2 in der Größenordnung von  $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$ . Dies legt nahe, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben in der Größenordnung der Umkehrung liegt, d.h.  $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$ . Nach unserer Analyse ist die Größenordnung tatsächlich  $N^\omega$  mit  $\omega$  gegeben durch (3).

Beachten Sie auch, dass wenn  $q_1$  und  $q_2$  werden multipliziert mit  $1 + \varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$  dann  $R_0$  bleibt aber unverändert  $\omega$  wird multipliziert mit  $1 + \varepsilon$ : In diesem Modell erhöht eine erhöhte Umgebungsvariabilität tendenziell die durchschnittliche Extinktionszeit.

Dieses Gesetz in  $N^\omega$  scheint in der Lage zu sein, im Fall einer Umgebung mit  $J$ - Zuständen zu verallgemeinern, wenn

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

Wir haben

$$R_0 = \left( \sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

wenn  $Q$  der infinitesimale Generator ist und wenn  $u$  der einzige Vektor mit ist

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(Bacaër und Ed-Darraz, 2014).  $A$  und  $B$  bezeichnen die Diagonalmatrizen  $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$  und  $\text{diag}(b, \dots, b)$ . Betrachten Sie die Spektralgrenze

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

wo  $\sigma(\cdot)$  bezeichnet das Spektrum einer Matrix und  $\Re(\cdot)$  der Realteil einer komplexen Zahl. Wir zeigen

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

Wir vermuten dann, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben mit zunimmt  $N^\omega$ . In dem besonderen Fall wo  $a_j \neq b$  für alle  $j$  ist die Zahl  $\omega$  einfach der Eigenwert des größten Realteils der Matrix  $(A - B)^{-1}Q$ . Diese Matrix und der Ausdruck ihres Eigenwerts  $\omega$  durch (3) für  $I = 2$  sind bereits in (Sawyer und Slatkin, 1981, Gleichungen (14) und (20)) für ein Populationsmodell ohne demografische Stochastizität in der unterkritischer Fall ( $R_0 < 1$ ); In diesem Fall erhöht sich die mittlere Zeit bis zum Erlöschen jedoch als Logarithmus von  $N$ .

Mehrere Autoren haben ein Potenzgesetz für die mittlere Zeit bis zum Aussterben in Populationsmodellen in einer Brownschen Zufallsumgebung gefunden (Ludwig, 1976; Leigh, 1981; Lande, 1993). Sie verwenden eine Diffusionsgleichung als Ausgangspunkt. (Gaveau et al., 1996) und (Doering et al., 2005) haben jedoch gezeigt, dass diese Gleichung zu einer ungenauen Formel für den Parameter  $c$  führt. Tatsächlich repräsentiert diese Gleichung nicht immer gut den Schwanz der quasistationären Verteilung, was genau der wichtigste Teil ist, um den Extinktionsprozess zu untersuchen. Es ist jedoch zu beachten, dass (Kamenev et al., 2008) das Problem der Auslöschung für Populationen in einer zufälligen Umgebung mit farbigem Rauschen unter Verwendung von Pfadintegralen angesprochen hat.

Abschnitt 2 zeigt die quasistationäre Verteilung des Modells. Abschnitt 3 verwendet die Methode von Brillouin, Kramers und Wentzel (BKW), um gültige Näherungen in den Zonen des Parameters  $x = n/N$  zu erhalten, in denen die Verteilung schnell variiert. Abschnitt 4 verwendet eine andere Annäherung in dem Bereich, in dem sich die Verteilung langsam ändert. Abschnitt 5 verwendet eine Diffusionsgleichung, um die beiden vorherigen Näherungen zu verbinden: Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen von Kummer und Tricomi ersetzen hier die Gauß-Fehlerfunktion, die insbesondere von (Meerson und Sasorov, 2008) verwendet wird. Abschnitt 6 schätzt den mit der quasistationären Verteilung verbundenen Eigenwert.

Da keine dieser Näherungen rigoros erhalten wurde, enthält Abschnitt 7 dennoch numerische Simulationen, die den numerischen Wert der Exponenten für das Exponentialgesetz im stark überkritischen Fall und für das Potenzgesetz im schwach überkritischen Fall zu bestätigen scheinen. Abschnitt 8 fügt einige Bemerkungen hinzu. Insbesondere vergleichen wir im schwach überkritischen Regime den Fall einer markovschen Umgebung und den einer periodischen Umgebung mit dem gleichen Zeitanteil in einem günstigen oder ungünstigen Zustand: Das erste führt zu einem Potenzgesetz für die mittlere Zeit bis zum Aussterben das zweite nach einem Exponentialgesetz. Abschnitt 9 betrachtet den Fall einer Markov-Kette mit einer endlichen Anzahl von Zuständen und erörtert andere Verallgemeinerungen.

## 2 Quasistationäre Verteilung

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich zum Zeitpunkt  $t$   $n$  infizierte Personen in der Umgebung  $j$  befinden :  $p_{n,j}(t)$ . Also

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - \left[ a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] p_{n,1} + b(n+1) p_{n+1,1} \\ & + a_1 (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - \left[ a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] p_{n,2} + b(n+1) p_{n+1,2} \\ & + a_2 (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Lassen Sie uns definieren

- $P = (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2})$  : ein Spaltenvektor
- $A_n = \text{diag}[a_1 n (1 - \frac{n}{N}), a_2 n (1 - \frac{n}{N})]$  : eine diagonale Matrix der Ordnung zwei
- $B_n = \text{diag}[bn, bn]$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

Das System (4) - (5) hat die Form

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

Die Eigenwerte von  $M$  sind die von  $Q$  und die von  $R$ . Die Eigenwerte von  $Q$  sind 0 und  $-(q_1 + q_2)$ . Die Koeffizienten der Matrix  $R$  außerhalb der Diagonale sind positiv oder Null. Darüber hinaus ist die Matrix  $R$  *nicht* reduzierbar, wie wir mit dem zugehörigen Graphen sehen können. Eine Folgerung aus dem Satz von Perron und Frobenius (Smith, 1995, Folgerung 3.2) zeigt, dass die Matrix  $R$  einen reellen Eigenwert  $\lambda$  hat, der einfach, streng größer als der Realteil aller anderen Eigenwerte und mit einem zugehörigen Eigenvektor ist mit streng positiven Komponenten. Wenn  $\mathbf{1}$  der Linienvektor  $[1, 1, \dots, 1]$  der Größe  $2N$  ist, dann

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

Nach (Berman und Plemmons, 1994, Satz 6.2.3, L33) haben wir  $\lambda < 0$ . Wir wählen  $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$  ein Eigenvektor von  $M$ , der dem Eigenwert  $\lambda$  zugeordnet ist:  $M\pi = \lambda\pi$ . Mit anderen Worten,

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,1} = & - \left[ a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] \pi_{n,1} + b(n+1) \pi_{n+1,1} \\ & + a_1 (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,2} = & - \left[ a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] \pi_{n,2} + b(n+1) \pi_{n+1,2} \\ & + a_2 (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Normalisieren wir den Eigenvektor, indem wir zum Beispiel auferlegen

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

Abbildung 1 zeigt  $\pi_{n,1}$  und  $\pi_{n,2}$  als Funktion von  $n/N$  für  $n \geq 1$  in zwei Fällen: ein Fall, in dem  $R_0 > 1$  und  $a_1 > a_2 > b$ , ein Fall, in dem  $R_0 > 1$  und  $a_1 > b > a_2$ . Der Eigenvektor  $\pi$  wird mit der Scilab-Software berechnet. Der Höhepunkt von  $\pi_{n,1}$  ist nah an  $x_1 = 1 - b/a_1$ , wie Sie es erwarten würden, wenn Sie über die mittlere Feldgleichung für den Anteil  $i$  infizierter Personen nachdenken

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1-i) - bi.$$

In der Tat  $x_1$  ist der einzige stabile Gleichgewichtszustand dieser Gleichung. Der Höhepunkt von  $\pi_{n,2}$  ist nah an  $x_2 = 1 - b/a_2$  wenn  $a_2 > b$  und in der Nähe von  $x = 0$  wenn  $a_2 < b$ .

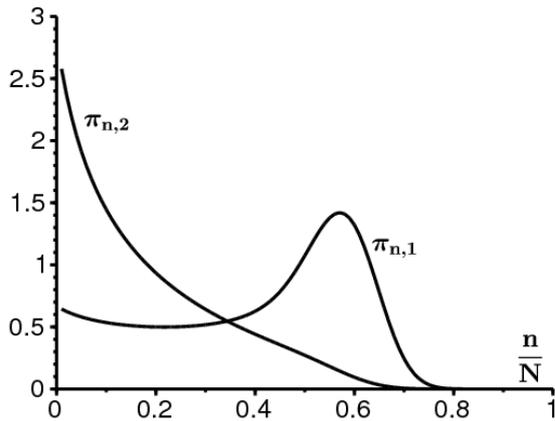
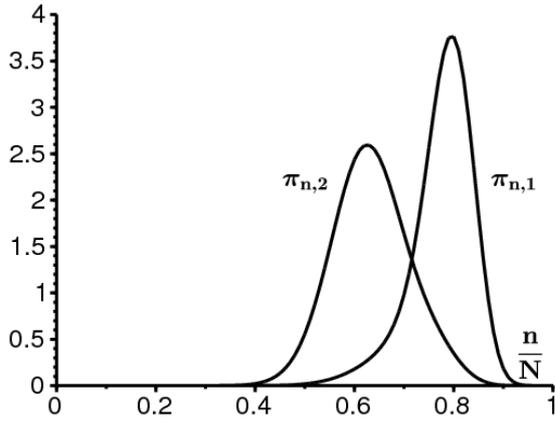


Abbildung 1. Die Komponenten  $\pi_{n,1}$  und  $\pi_{n,2}$  für  $n \geq 1$  des Eigenvektors  $\pi$  als Funktion von  $n/N$ , wenn  $N = 100$ ,  $q_1 = 1$  und  $q_2 = 1$ . Andere Parameterwerte: a)  $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$ , b)  $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$ .

Lassen Sie uns definieren

- $\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$
- $\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2})$ .

Das lineare System (1) - (2) kann in der Form geschrieben werden

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n(1 - \frac{n}{N})(T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

Die Systeme (8) - (9) und (6) - (7) zeigen dies

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

wobei der Stern \* die Transposition von Vektoren oder Matrizen anzeigt. Wenn wir das übliche Punktprodukt nehmen, erhalten wir  $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$ . Also

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

Mit anderen Worten,  $-1/\lambda$  ist eine lineare Kombination von  $(T_{n,j})$  für  $n \geq 1$  und  $j = 1, 2$ . Im Folgenden interessieren wir uns hauptsächlich für  $\lambda$ . Wir studieren  $(T_{n,j})$  in Abschnitt 7 durch numerische Simulationen.

### 3. BKW-Näherung

**Der Fall**  $x > x_1 = 1 - b/a_1$ . Mit  $R_0 > 1$ , wir vermuten das  $\lambda \rightarrow 0$  wenn  $N \rightarrow +\infty$ . Wir werden a posteriori, wie zum Beispiel (Meerson und Sasorov, 2008) für ein anderes Modell, überprüfen, ob dies tatsächlich der Fall ist. Die linke Seite von (6) - (7) kann somit vernachlässigt werden. Für  $x > x_1$  Suchen wir nach einer BKW-Näherung (Bender und Orszag, 1978) der Form

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

wo  $x = n/N$ . Eine Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 für  $S(x)$  und der Ordnung 1 für  $\Sigma(x)$  schlägt das vor

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

Wir erhalten durch Ersetzen in (6) und Vereinfachen durch  $e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in  $O(N)$  geben

$$0 \simeq N x \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] \left[ a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

Der erste Term in eckigen Klammern ist nur für konstante Funktionen null  $S(x)$ . Wählen Sie die Lösung, mit der der zweite Term in eckigen Klammern abgebrochen wird

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

das heißt

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

mit Ausnahme einer additiven Konstante. Dies impliziert  $S''(x) = \frac{1}{1-x}$ . Die Funktion  $\Sigma(x)$  wird mit den Ausdrücken in  $O(1)$  erhalten :

$$\begin{aligned} 0 &\simeq a_1 N \left[ x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[ 1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ &\quad + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[ 1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1. \end{aligned}$$

Durch Ersetzen  $S(x)$  durch seinen Ausdruck bekommen wir

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right), \\ \Sigma(x) &= \sigma_1(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right). \end{aligned}$$

Die Funktion  $c(x)$  in  $\pi_{n,2}$  wird aus (7) erhalten. Die Form von  $\pi_{n,2}$  wurde gewählt, um die verschiedenen Ausdrücke auszugleichen. In der Tat gibt die höchste Ordnung

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ N a_2 x (1 - x) \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] + b N x \left( e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

Durch Ersetzen  $S(x)$  durch seinen Ausdruck bekommen wir

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2) x (x - x_1)}.$$

Zusammenfassend vermuten wir für  $x > x_1$ ,

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-N s_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N (a_1 - a_2) x (x - x_1)}, \quad (10)$$

für eine bestimmte Konstante  $k_1$ . Betrachten Sie insbesondere das Verhalten von  $\pi_{n,1}$  und von  $\pi_{n,2}$  für  $x > x_1$  und  $x$  in der Nähe von  $x_1$ . Lassen Sie uns definieren  $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$ . Wir haben  $s_1'(x_1) = 0$ . Eine Taylor-Entwicklung gibt

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s_1''(x_1) (x - x_1)^2 / 2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b} (x - x_1)^2.$$

Also

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{N c_1 - N \frac{a_1}{2b} (x - x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1 - b} - 1}}{\sqrt{1 - x_1} (x - x_1)^{\frac{q_1}{a_1 - b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N (a_1 - a_2) x_1 (x - x_1)}. \quad (11)$$

**Der Fall**  $x < x_2 = 1 - b/a_2$  **wenn**  $a_1 > a_2 > b$ . Lassen Sie uns symmetrisch nach einer Lösung suchen, wenn  $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x)-\Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x)-\Sigma(x)}$$

für  $x < x_2 = 1 - b/a_2$ . Das System (6) - (7) führt wie oben zu

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1-x) \log(1-x)$$

mit Ausnahme einer additiven Konstante, während

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x_2-x}{x} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}} \right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1-a_2)x(x_2-x)}.$$

Zusammenfassend vermuten wir für  $x < x_2$ ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x)-\sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1-a_2)x(x_2-x)}, \quad (12)$$

für eine bestimmte Konstante  $k_2$ . Für  $x < x_2$  und  $x$  in der Nähe von  $x_2$ ,

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}}{\sqrt{1-x_2} (x_2-x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1-a_2)x_2(x_2-x)}. \quad (13)$$

Die Abbildungen 2 und 3 zeigen  $-(\log \pi_{n,1})/N$  und  $-(\log \pi_{n,2})/N$  abhängig von  $n/N$  für  $1 \leq n \leq N$ , mit  $\pi_{n,i}$  berechnet mit dem System (6) - (7). Die Figuren zeigen auch die Näherungen (10) und (12) in dunkelblau und rot. Die Konstante  $k_1$  in (10) wird so gewählt, dass  $\pi_{n,1}$  stimmt mit seiner Näherung für  $n = N-1$  überein. Die Konstante  $k_2$  in (12) wird bestimmt durch  $k_1$  wie in Abschnitt 5 unten erläutert.

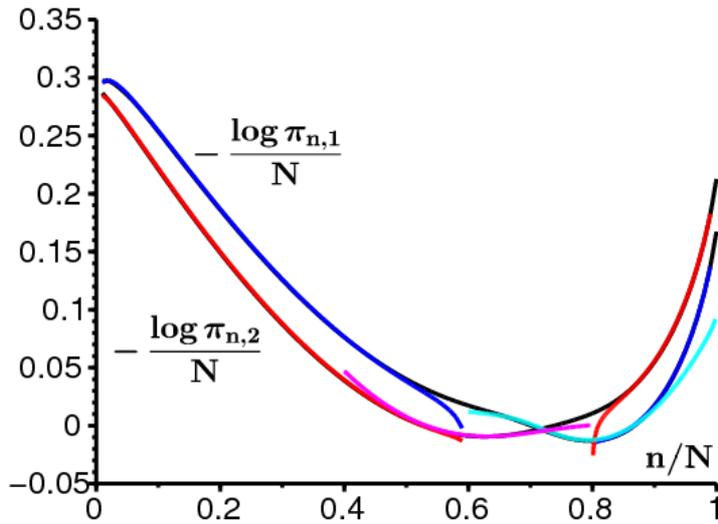


Abbildung 2. Das Beispiel mit  $a_1 > a_2 > b$ . In schwarz unter den anderen Kurven:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  und  $-(\log \pi_{n,2})/N$  abhängig von  $x = n/N$ .

Für  $\pi_{n,1}$ : in dunkelblau, Annäherungen (10) für  $x > x_1$  und (12) für  $x < x_2$ ; in hellblau, diffusive Approximation (25) für  $x \simeq x_1$ .

Für  $\pi_{n,2}$ : in rot, Annäherungen (10) für  $x > x_1$  und (12) für  $x < x_2$ ; in pink die diffusive Näherung (31) für  $x \simeq x_2$ .

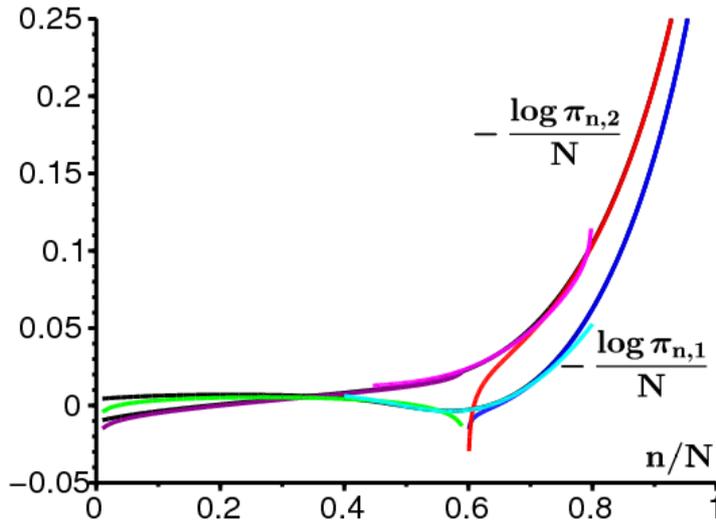


Abbildung 3. Das Beispiel mit  $a_1 > b > a_2$ . In schwarz unter den anderen Kurven:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  und  $-(\log \pi_{n,2})/N$  abhängig von  $x = n/N$ .

Für  $\pi_{n,1}$ : in dunkelblau die Näherung (10) für  $x > x_1$ ; in grün, Näherung (20) für  $x < x_1$ ; in hellblau, diffusive Approximation (25) für  $x \simeq x_1$ .

Für  $\pi_{n,2}$ : in rot die Näherung (10) für  $x > x_1$ ; in lila, Näherung (19) für  $x < x_1$ ; in rosa, diffusive Näherung (31) für  $x \simeq x_1$ .

## 4 Annäherung im Bereich der langsamen Variation

Wir suchen eine Annäherung an  $\pi_{n,1}$  und  $\pi_{n,2}$  für  $x_2 < x < x_1$  wenn  $a_1 > a_2 > b$  und für  $0 < x < x_1$  wenn  $a_1 > b > a_2$ . In diesen Intervallen  $S(x) = 0$ . Betrachten wir das System (6) - (7) und versuchen Sie direkt die kontinuierliche Approximation  $\pi_{n,1} \simeq y(x)$ ,  $\pi_{n,2} \simeq z(x)$  mit  $x = n/N$ . Eine Taylor-Entwicklung gibt

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

Mit  $\lambda \simeq 0$  führt dies zur diffusiven Approximation

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

Durch Vernachlässigung von  $1/N$  erhalten wir die Gleichungen

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

die die gleiche Form haben wie die Gleichungen (29) - (30) von (Slatkin, 1978). Durch Hinzufügen der Gleichungen (16) und (17) finden wir

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

Die Funktion zwischen eckigen Klammern ist daher konstant. Da  $x$  ein Faktor ist, deutet dies darauf hin  $x \rightarrow 0$  dass diese Konstante Null ist:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

Dies ermöglicht es auszudrücken  $y(x)$  abhängig von  $z(x)$ . Durch Ersetzen in (17) erhalten wir nach einigen Manipulationen

$$\frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)},$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \quad (19)$$

für eine Konstante  $C$ . Diese Annäherung ist in Abbildung 3 in lila dargestellt. Die Konstante  $C$  wird bestimmt durch  $k_1$  wie in Abschnitt 5 unten gezeigt. Dann zeigen die Gleichungen (18) und (19) dies

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1 x(1-x) - bx} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

Diese Annäherung ist in Abbildung 3 grün dargestellt  $x \simeq x_1$  mit  $x < x_1$  bekommen wir

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1 x_1} \left( \frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}. \quad (21)$$

Wenn  $a_1 > b > a_2$  finden wir für  $x \approx 0$

$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} x^{-1 + \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

Denken Sie daran  $R_0 = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$  ist äquivalent zu  $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$  in diesem Fall. Insbesondere das Integral von  $z(x)$  in der Nähe von  $0^+$  ist konvergent. Wenn  $a_1 > a_2 > b$ , dann zeigt (19)

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2 x_2} \left( \frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1} \quad (24)$$

in der Nähe von  $x_2$  mit  $x > x_2$ .

## 5 Diffusionsnäherung in der Nähe $x_1$ und $x_2$

**Die Situation in der Nähe  $x_1$ .** In der Nähe von  $x = x_1$  und  $x = x_2$  kann die Diffusion in (14) - (15) nicht mehr vernachlässigt werden. Analyse von Übergangszonen in  $x_1$  und  $x_2$  muss zulassen, dass die Konstante  $C$  in (21) und (24) mit den Konstanten verknüpft wird  $k_1$  aus (10) und  $k_2$  aus (12). Lassen Sie uns definieren  $x = x_1 + \xi_1 / \sqrt{N}$ . Dann kann der Koeffizient der Ableitung der Ordnung 1 in (14) durch eine Taylor-Erweiterung der Ordnung 1 angenähert werden

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

Wir vernachlässigen  $q_2 z$  vor  $q_1 y$  wenn  $x \simeq x_1$  ::

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left( 1 - \frac{q_1}{a_1 - b} \right) y.$$

Mit

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

Wir haben die Hermite-Differentialgleichung

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

Wir suchen nach einer Lösung in Form einer ganzen Reihe

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

Wir erhalten die Wiederholungsrelation

$$w_{n+2} = \frac{2(n + 2\alpha_1)}{(n + 2)(n + 1)} w_n,$$

wo  $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$ . Wir haben also zwei linear unabhängige Lösungen

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

wo  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind Konstanten und

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)$$

ist Kummers konfluente hypergeometrische Funktion. Nach (Maroni, 1997, Gleichung (93)) haben wir  $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta}$  wenn  $z \rightarrow +\infty$ , wobei  $\Gamma$  Eulers Gammafunktion ist. Also

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1-1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta_1 \rightarrow -\infty.$$

Also  $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  hat das gleiche asymptotische Verhalten wie (21) wenn  $\eta_1 \rightarrow -\infty$  vorausgesetzt, dass

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (26)$$

Wenn im Gegenteil  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ , (11) schlägt das vor  $Y(\eta_1)$  muss sich wie eine bestimmte Konstante multipliziert mit verhalten  $\eta_1^{-2\alpha_1}$ . Die Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen (Maroni, 1997) zeigt, dass es notwendig ist, aufzuerlegen

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

für eine bestimmte Konstante  $K$ , um ein solches asymptotisches Verhalten zu erhalten. In der Tat haben wir dann

$$Y(\eta_1) = K \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

das heißt  $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$  für  $\eta_1 > 0$ , wo  $\Psi(\alpha, \beta; z)$  ist die konfluente hypergeometrische Funktion von Tricomi, definiert durch

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

Nach (Maroni, 1997, Gleichung (90)) haben wir  $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$  wenn  $z \rightarrow +\infty$ . Also  $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$  wenn  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ .

Das Äquivalent von  $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  stimmt dann mit (11) überein, vorausgesetzt, dass

$$K \left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{-\frac{q_1}{a_1-b}} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

Zusammenfassend bestimmen die Beziehungen (26), (27) und (29)  $K$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und  $C$  abhängig von  $k_1$ . Insbesondere weil  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  und  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  gibt Gleichung (26)

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b-a_2(1-x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

Eine alternative Form kann unter Verwendung der Legendre-Gauss-Formel erhalten werden  $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$ .

**Die Situation in der Nähe  $x_2$ .** Wenn  $a_2 > b$  machen wir eine ähnliche Analyse mit (15) nahe  $x = x_2 = 1 - b/a_2$ . Wir vernachlässigen  $q_1 y$  vor  $q_2 z$ . Wenn

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

so

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

wo  $\delta_1$  und  $\delta_2$  sind Konstanten. Das Verhalten für  $\eta_2 \rightarrow +\infty$  stimmt mit (24) überein, sofern

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left( \frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C[a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b}+\frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

Lassen Sie uns definieren

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

für eine bestimmte Konstante  $\hat{K}$  (Beachten Sie das Minuszeichen für  $\delta_2$ ). Also  $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$  wenn  $\eta_2 < 0$ . Also  $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$  für  $\eta_2 \rightarrow -\infty$ . Dies stimmt mit (13) überein, sofern

$$\hat{K} \left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

Wie oben geben (32) und (33) an

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C [a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

Also die Konstanten  $k_2$ ,  $\hat{K}$ ,  $\delta_1$  und  $\delta_2$  werden durch die bestimmte Konstante  $C$ .

## 6 Eigenwert

Denken Sie daran  $M\pi = \lambda\pi$ . Durch Addieren aller Linien dieses Gleichungssystems erhalten wir  $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$ . Aber  $\lambda < 0$ . Also

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

Die ersten beiden Zeilen des Systems sind

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}. \end{aligned}$$

Indem wir sie hinzufügen, finden wir

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

Betrachten wir zunächst den Fall, in dem  $a_1 > b > a_2$  mit  $R_0 > 1$ . So zeigt (19)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

wo  $\kappa_1$  ist eine positive Konstante unabhängig von  $N$ . Unter Verwendung der Tatsache, dass der Peak von  $\pi_{n,1}$  ist nah an  $x = n/N = x_1$  und Beziehungen (25), (28) und (30) finden wir

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

wo  $\kappa_j$  (Oben und unten) sind noch positive Konstanten sind, welche unabhängig von  $N$ . Der dominante Term für  $N$  groß im Nenner von (36) ist also der mit  $\pi_{n,2}$ . Im Zähler  $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$  und  $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$  wo  $y(x)$  und  $z(x)$  sind gegeben durch (22) - (23), das bekommen wir

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

Mit anderen Worten,  $-1/\lambda$  steigt mit  $N$  als Potenzgesetz, dessen Exponent ist

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

wie in der Einleitung angekündigt. Wir bemerken außerdem, dass  $\omega$  gegen konvergiert  $+\infty$  wenn  $a_2$  konvergiert gegen  $b$  durch niedrigere Werte.

Betrachten Sie nun den Fall, in dem  $a_1 > a_2 > b$ . Lassen Sie uns zur Vereinfachung die Notation einführen  $f \approx g$  (Nicht zu verwechseln mit dem informellen Symbol  $\simeq$  oben verwendet) wenn  $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$  wenn  $N \rightarrow +\infty$ . Insbesondere  $N^\beta \approx 1$  für alle  $\beta$ . Dann zeigt (12) mit  $x = 1/N$  das  $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$ . Darüber hinaus

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s_2'(0)} \approx k_2.$$

Weiterhin ist der Peak von  $\pi_{n,1}$  ist nah an  $x = n/N = x_1$  während das von  $\pi_{n,2}$  ist nah an  $x_2$ . Somit ist (37) noch gültig und zeigt

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

während (31), (33) und (35) geben

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

Aber (34) und (35) zeigen

$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

Somit gibt (36)  $-\lambda \approx e^{-Nc_2}$  und  $-1/\lambda \approx e^{Nc_2}$ . Schließlich  $-1/\lambda$  wächst ungefähr exponentiell mit einem Parameter  $c_2$ .

## 7 Die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben

Das lineare System (8) - (9) kann mit der von (Artalejo et al., 2013) vorgestellten numerischen Methode gelöst werden. Das Verfahren verwendet nur quadratische Matrizen der Ordnung 2 und verringert die numerische Instabilität. Denken Sie daran  $q_1 = q_2 = 1$  und  $b = 2$ .

**Erstes Beispiel:**  $a_1 > a_2 > b$ . Lass uns nehmen  $a_1 = 10$  und  $a_2 = 5$ . Abbildung 4a zeigt  $T_{n,1}$  und  $T_{n,2}$  abhängig von  $x = n/N$ . Abbildung 4b legt nahe, dass die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben, beispielsweise bei  $N$  Personen, die in Umgebung 1 infiziert sind, ungefähr exponentiell zunimmt:  $T_{N,1} \approx e^{cN}$ . Lineare Regression gibt  $c \simeq 0.32$ . Beachten Sie das  $c_1 \simeq 0.81$  und  $c_2 \simeq 0.32$ , was darauf hindeutet  $c = c_2$ .

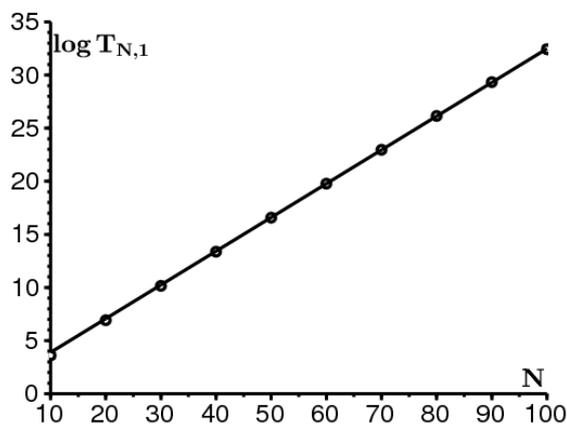
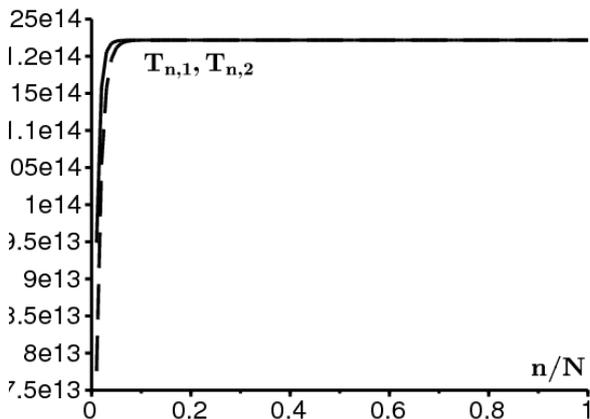


Abbildung 4. Der Fall  $a_1 > a_2 > b$ . a)  $T_{n,1}$  [durchgezogene Linie] und  $T_{n,2}$  [gepunktete Linie] abhängig von  $n/N$  wenn  $N = 100$ . b)  $\log T_{N,1}$  abhängig von  $N$ .

**Zweites Beispiel:**  $a_1 > b > a_2$  und  $R_0 > 1$ . Lass uns nehmen  $a_1 = 5$  und  $a_2 = 1$ . Also  $R_0 = 1.5 > 1$ . Abbildung 5a zeigt  $T_{n,1}$  und  $T_{n,2}$  abhängig von  $x = n/N$ . Abbildung 5b zeigt  $\log T_{N,1}$  abhängig von  $\log N$ . Wir bekommen eine gerade Linie, die ein

Potenzgesetz vorschlägt  $T \sim \kappa N^\omega$ . Die durch lineare Regression erhaltene Steigung beträgt  $\omega \simeq 0.67$ . In diesem Fall haben wir  $\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ , was gut der gemessenen Steigung entspricht.

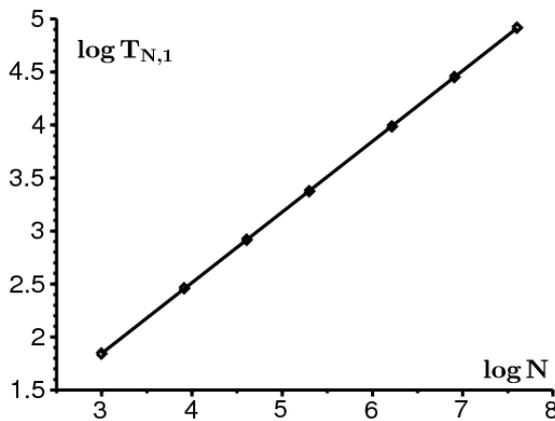
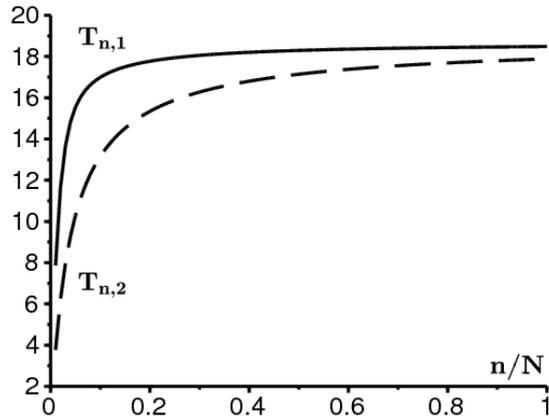


Abbildung 5. Der Fall  $a_1 > b > a_2$  mit  $R_0 > 1$ . a)  $T_{n,1}$  und  $T_{n,2}$  abhängig von  $x = n/N$  wenn  $N = 100$ . b)  $\log T_{N,1}$  abhängig von  $\log N$ .

## 8 Hinweise

### *Vergleich mit dem periodischen Fall.*

Um den Unterschied zwischen einer zufälligen Umgebung und einer periodischen Umgebung hervorzuheben, nehmen wir den Fall, in dem  $a_1 = 5$  und  $a_2 = 1$  während  $q_1 = q_2 = 1$  und  $b = 2$ . Also  $u_1 = u_2 = 0.5$ : Die Umgebung verbringt durchschnittlich die Hälfte der Zeit in Zustand 1, die andere Hälfte in Zustand 2. Abbildung 6 zeigt auf der einen Seite, wie  $T_{N,1}$  erhöht sich als Funktion von  $N$  als Potenzgesetz. Betrachten Sie andererseits dasselbe SIS-Modell, jedoch in einer periodischen Umgebung (Bacaër, 2015): Wählen wir  $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ,  $a(t) = a_1$  für  $0 < t < u_1 T$  und  $a(t) = a_2$  für  $u_1 T < t < T$ . Für dieses Modell  $e^{\Lambda T}$  ist der Floquet-Multiplikator, der dem Extinktionsprozess zugeordnet ist. Abbildung 6 zeigt wie  $-1/\Lambda$  wächst exponentiell mit  $N$ .

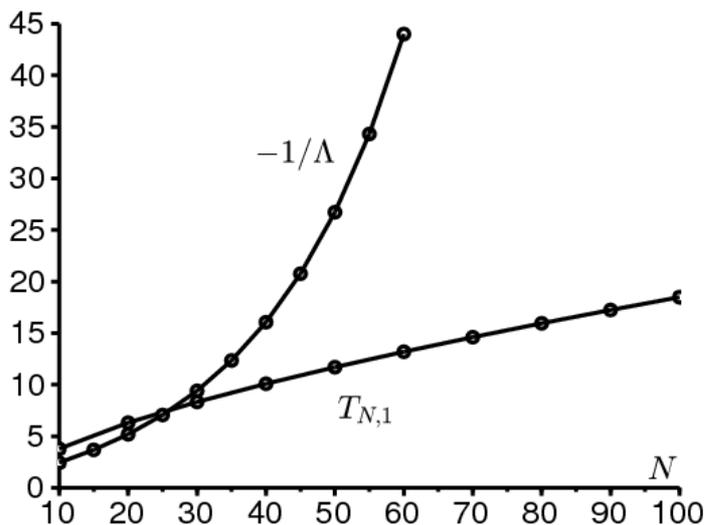


Abbildung 6. Durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben  $T_{N,1}$  in einer zufälligen Umgebung und  $-1/\Lambda$  in einer periodisch ähnlichen Umgebung.

**Die mittleren Feldgleichungen.** Es kann nützlich sein, sich daran zu erinnern (Bacaër und Ed-Darraz, 2014), dass die mittleren Feldgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,\end{aligned}$$

Sobald sie in der Nähe des Gleichgewichtszustands  $(0,0)$  linearisiert sind, führen sie zur Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

Aber wir können gleichzeitig haben

- ein streng positiver Eigenwert, so dass das triviale Gleichgewicht instabil ist,
- $R_0 < 1$ .

**Eine weitere Grenze.** Die erhaltenen Ergebnisse berücksichtigen die Parameter  $q_j$ ,  $a_j$  und  $b$  sind fest, während  $N$  gegen unendlich konvergiert. Die Dinge sind offensichtlich anders, wenn zum Beispiel  $q_1$  und  $q_2$  konvergieren gegen unendlich mit einem konstanten Verhältnis  $q_1/q_2$ . Das Modell nähert sich dann einem in einer konstanten Umgebung homogenisierten Modell mit einem gemittelten Kontaktparameter  $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$ .

**Der unterkritische Fall.** Wir haben den unterkritischen Fall nicht angesprochen  $R_0 < 1$  mit  $a_1 > b > a_2$  oder sonst  $b > a_1 > a_2$ . Das Verhalten der durchschnittlichen Zeit bis zum Aussterben ist dann ungefähr das gleiche wie in einer konstanten Umgebung: Ausgehend von einem festen Anteil der infizierten Bevölkerung liegt die durchschnittliche Zeit in der Größenordnung von  $\log N$  (Doering et al., 2005). Ausgehend von einer infizierten Fraktion  $I/N$  konvergiert die durchschnittliche Zeit im Gegenteil gegen eine Grenze. Im Falle einer zufälligen Umgebung schlagen dies auch digitale Simulationen vor.

## 9 Markov-Kette mit endlicher Anzahl von Zuständen

Mit  $J$  Zustände, denken Sie daran, dass der Infinitesimalgenerator  $Q$  ist so, dass  $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$  für alles  $j$ . Angenommen, diese Matrix  $Q$  ist irreduzibel und das  $a_1 > a_2 > \dots > a_J$ . Wenn  $a_J > b$  dann steigt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben ungefähr exponentiell mit der Größe  $N$  der Bevölkerung mit einer Rate an  $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$ . In der Tat ist das Aussterben in der Umgebung  $J$  am wahrscheinlichsten.

Wenn auf der anderen Seite  $b > a_J$  und  $R_0 > 1$ , beachten Sie  $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$  mit  $x = n/N$ . In der Nähe von  $x = 0$  wird das System (16) - (17)

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

Auf der Suche nach einer Lösung  $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$  mit  $\omega > 0$  und  $\theta_j > 0$  für alle  $j$  finden wir

$$0 \simeq \omega(b - a_j)\theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}\theta_k$$

für  $1 \leq j \leq J$ . Mit den Notationen der Einleitung haben wir daher das Problem des verallgemeinerten Eigenwerts  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  mit  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ .

Wir werden zeigen

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$  ist eine diagonale Matrix. Für jede reelle Zahl  $s$ ,

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$  hat alle seine Koeffizienten außerhalb der Diagonale, die positiv oder Null sind. Außerdem ist diese Matrix nicht reduzierbar. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Perron und Frobenius (Smith, 1995, Folgerung 3.2),  $\mu(s)$  ist ein einfacher Eigenwert von  $Q - sD$  (als dominanter Eigenwert bezeichnet) und es gibt einen Eigenvektor  $\phi(s)$  alle deren Komponenten sind streng positiv, so dass

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

Dieser Eigenvektor ist bei der Normalisierung eindeutig

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

Nach der gleichen Folgerung ist die Existenz eines Vektors  $\theta$  mit  $\theta_j > 0$  für alles  $j$  und  $(Q - \omega D)\theta = 0$  tatsächlich beträgt  $\mu(\omega) = 0$ . Es geht also darum zu zeigen, dass die Gleichung  $\mu(\omega) = 0$  mit  $\omega > 0$  hat eine einzigartige Lösung.

In Bezug auf die Existenz stellen wir zunächst fest, dass der Infinitesimalgenerator  $Q$  entspricht  $s = 0$ : wir haben  $\mu(0) = 0$  und wir stellen fest  $u = \phi(0)$  der Eigenvektor rechts. Linienvektor  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$  ist ein Eigenvektor links von  $Q$  assoziiert mit dem Eigenwert 0. Somit

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

Nach dem einfachen Eigenwert-Störungssatz ist die Funktion  $\mu(s)$  ist differenzierbar in  $s = 0$  und

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

Aber  $R_0 > 1$  ist äquivalent zu  $\mathbf{1}Du = \sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$ . Also  $\mu'(0) < 0$ . Darüber hinaus haben wir  $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$  für alles  $s > 0$ . Wenn  $s \rightarrow +\infty$  haben wir  $Q/s - D \rightarrow -D$ . Durch die Kontinuität des Spektrums,

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j(-D_{j,j}) = \max_j(b - a_j) = b - a_J > 0.$$

Also  $\mu(s) \rightarrow +\infty$  wenn  $s \rightarrow +\infty$ . Weil  $\mu(0) = 0$  und  $\mu'(0) < 0$  schließen wir, dass es gibt  $\omega > 0$  mit  $\mu(\omega) = 0$ .

In Bezug auf die Einzigartigkeit ist zunächst zu beachten, dass die Funktion  $\mu(s)$  ist konvex. In der Tat für alle reellen Zahlen  $\omega_1, \omega_2$  und  $0 < \varepsilon < 1$  das sehen wir  $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$  ist der dominante Eigenwert der Matrix  $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$ . Nach einem Satz von (Cohen, 1981) ist dieser Eigenwert kleiner oder gleich  $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$ . Dies beweist die Konvexität. Nehmen wir jetzt an, dass es gibt  $\omega_1 > \omega_2 > 0$  mit  $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$ . Weil  $\mu(0) = 0$  und weil  $\mu(s)$  ist konvex, schließen wir  $\mu(s) = 0$  für  $0 \leq s \leq \omega_1$ . Dies widerspricht  $\mu'(0) < 0$ .

$A - B$  ist eine invertierbare Matrix, wenn  $a_j \neq b$  für alle  $j$ . Also  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  ist äquivalent zu  $(A - B)^{-1}Q\theta = \omega\theta$ . Also  $\omega$  ist der Eigenwert von  $(A - B)^{-1}Q$  der Realteil davon ist der größte.

Schließlich wird Gleichung (36)

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

Im Zähler haben wir  $\pi_{1,j} \simeq \theta_j(1/N)^{\omega-1}$ . Im Nenner haben wir

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

Also  $-1/\lambda$  steigt mit  $N$  als  $N^\omega$ .

Es ist zweifellos möglich, ein solches Ergebnis zu verallgemeinern, wenn die Umgebung beispielsweise durch eine stochastische Differentialgleichung bestimmt wird

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

Lassen Sie uns definieren  $L^*$  der Differentialoperator

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}(f(\xi)u(\xi)).$$

Wir gehen davon aus  $u(\xi)$  ist eine unveränderliche Wahrscheinlichkeit:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

Im Fall von Langevins Gleichung haben wir also

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

Wir gehen davon aus, dass die Kontaktrate  $a(\cdot)$  ist eine Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $\min a(\cdot) < b$  und

$$R_0 = \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

Die durchschnittliche Extinktionszeit nimmt mit  $N$  als  $zN^\omega$ , wo  $\omega$  ist die einzige positive Zahl, für die der Differentialoperator gilt  $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$  hat einen Haupteigenwert gleich 0. Für die Konvexität dieses Eigenwertes als Funktion von  $\omega$  siehe (Kato, 1982). Beachten Sie, dass der Assistent Operator von  $L^*$  ist

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

und  $L\mathbf{1} = 0$  wenn  $\mathbf{1}$  bezeichnet die konstante Funktion gleich 1.

## 10 Eine Umgebung, die sowohl periodisch als auch zufällig ist

Kehren wir zum Fall einer endlichen Menge von Umgebungen zurück. Wir nehmen nun an, dass der Infinitesimalgenerator  $Q(t)$

- ist eine periodische Funktion der Periode  $\mathcal{T}$
- ist eine stetige oder stückweise stetige Funktion,
- ist mindestens über ein Intervall von  $t$  irreduzibel .

Das System (4) - (5) nimmt die Form an  $\frac{dP}{dt} = M(t)P$ . Nach (Bacaër, 2015) gibt es dann ein einziges Paar  $(\lambda, \pi)$  mit

- $\lambda < 0$
- $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$  ist eine periodische Funktion der Periode  $\mathcal{T}$

$$\lambda \pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$$

- $\pi_{n,j}(t) > 0$  für  $1 \leq n \leq N$  und  $1 \leq j \leq J$ .

Darüber hinaus

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

Es gibt auch eine einzigartige Funktion  $\mathcal{T}$ -periodisch  $u(t)$  mit

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

Als (Bacaër und Ed-Darraz, 2014) definieren wir

$$R_0 = \left( \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

Wir vermuten, dass wenn  $a_1 > \dots > a_J > b$  dann steigt die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben wieder exponentiell mit  $N$  mit einer Rate an

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

Wenn auf der anderen Seite  $a_J < b$  aber  $R_0 > 1$  die Annäherung  $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$  führt zu verallgemeinern (38) in der Nähe von  $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

Eine Lösung der Form  $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$  mit einer Funktion  $\theta(t) = (\theta_j(t))$   $\mathcal{T}$ -periodisch, muss überprüfen

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

Es gibt eine einzige reelle Zahl  $\mu(\omega)$  für welche  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  ist der dominante Floquet-Multiplikator des Systems

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

Diese Matrix ist eine periodische Funktion der Periode  $\mathcal{T}$ . Die Koeffizienten außerhalb der Diagonale sind positiv oder Null. Die Matrix ist über ein Intervall von  $t$  nicht reduzierbar. Wir können zeigen, dass es eine einzigartige gibt  $\omega > 0$  mit  $\mu(\omega) = 0$ . Wir verwenden wie in Abschnitt 9

- die Konvexität von  $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$  wenn  $R_0 < 1$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$  wenn  $a_J < b$ .

Beachten Sie, dass die Konvexität von  $\mu(\omega)$  wird durch einfache Verallgemeinerung des Arguments von (Cohen, 1981) demonstriert. Wir benutzen

- Die logarithmische Konvexität des Spektralradius von Matrizen mit Koeffizienten in der Menge der Null- oder logarithmisch konvexen Funktionen in  $\omega$  wird notiert  $\mathfrak{S}$
- $\mathfrak{S}$  ist durch Addition, Multiplikation und Übergang zur Grenze stabil

(Kingman, 1961). In der Tat,  $Q(t)$  ist eine stückweise kontinuierliche periodische Funktion, die durch eine Schrittfunktion erreicht werden kann.  $Q_k$  ist die ungefähre Matrix über das Intervall  $(\tau_k, \tau_{k+1})$  für  $k = 0, \dots, K-1$  mit  $\tau_0 = 0$  und  $\tau_K = \mathcal{T}$ . Wenn  $Q(t)$  war diese Treppenfunktion,  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  wäre gleich dem spektralen Radius des Matrizenprodukts

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

Nach (Cohen, 1981) hat jede dieser Matrizen ihre Koeffizienten in  $\mathfrak{S}$ . Das Produkt der Matrizen ist also auch mit Koeffizienten in  $\mathfrak{S}$ . Sein spektraler Radius ist in  $\omega$  log-konvex.

Weil

$$\lambda = -b \frac{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

wir schließen wie zuvor  $-1/\lambda$  steigt wahrscheinlich mit  $N$  als  $N^\omega$ .

## Danksagung

Dieser Artikel wurde durch ein Treffen am *Instituto de Ciencias Matemáticas* in Madrid im Oktober 2014, durch Kurse an der Universität Tlemcen im Mai 2015 und durch ein Seminar an der *Universidade Nova de Lisboa* im Juni 2015 angeregt.

## Referenzen

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herreo MJ (2013). Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511

- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York
- Cogburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284
- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random catastrophes. *Am Nat* 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment. *J Theor Biol* 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction. *SIAM–AMS Proceedings* 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel. Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise–driven unlimited population growth. *Phys Rev E* 78 : 060103
- Nåsell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment. *Ecology* 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size. *Theor Popul Biol* 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence