

# نموذج الستوكاستك SIS لوباء في بيئة عشوائية

866–847 (2016) 73 J. Math. Biol.

<http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-0974-8>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01414037>

Nicolas Bacaër

Bondy, France, Institut de Recherche pour le Développement  
Pierre and Marie Curie University, Les Cordeliers, Paris, France  
nicolas.bacaer@ird.fr

## الملخص

في بيئة عشوائية هي سلسلة ماركوف في وقت متواصل من دولتين، فإن متوسط وقت انقراض النموذج العشوائي SIS لوباء يزداد، في الحالة فوق الحرجة، بشكل كبير فيما يتعلق بحجم السكان إذا كان كلاهما الدول مواتية، ووفقاً لقانون السلطة إذا كانت إحدى الدول مواتية بينما كانت الأخرى غير مواتية للانتشار.

## 1 مقدمة

دع  $N$  يكون حجم السكان، على افتراض أنه ثابت. في النموذج العشوائي SIS للوباء، يكون كل فرد إما صحيحاً (S) أو مصاباً (I) (Nåsell, 2011). تخيل أن البيئة تتبع سلسلة ماركوف في وقت متواصل مع دولتين  $q_j$  ( $j = 1, 2$ ) هو معدل الخروج من الولاية  $j$ . في البيئة  $j$ ، يكون معدل الاتصال لكل فرد  $a_j > 0$ . إذا في وقت  $r$  عدد المصابين هو  $n$  والبيئة هي  $i$ ، واحتمال حدوث عدوى جديدة بين  $r$  و  $r + 1$  ديناراً مع ديناراً متناه في الصغر، هو  $a_j n(1 - n/N) dt$ . افترض أن معدل الشفاء  $b > 0$  للفرد هو نفسه في كلتا البيئتين. ومن ثم يكون احتمال الشفاء الجديد من السكان  $n dt$  بين  $t$  و  $t + dt$ . تمت دراسة هذا النموذج من قبل (Artalejo et al., 2013) ولكن ليس إلى الحد الذي يصبح فيه حجم  $N$  من السكان كبيراً. علاوة على ذلك، فهي حالة خاصة لعملية الولادة والوفاة في بيئة ماركوف (Cogburn and Torrez, 1981).

دعونا نحدد

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}, \quad u_2 = \frac{q_1}{q_1 + q_2}, \quad R_0 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{b}.$$

ثم  $Q$  هو المولد اللامتناهي، بينما  $u_1$  (ريب.  $u_2$ ) هي نسبة الوقت المنقضي في البيئة 1 (استجابة 2). للنموذج الخطي، أي العملية الخطية للولادة والموت في بيئة عشوائية من المعلمات  $a_j$  و  $b$ ، (باقر وإد الدراز، 2014) يلاحظ أنه من شبه المؤكد أن هناك انقراض إذا فقط  $R_0 \leq 1$ . بالنسبة لنموذج SIS غير الخطي، من ناحية أخرى، هناك انقراض مهما كانت قيمة المعلمة  $R_0$ . ومع ذلك، عندما يكون عدد السكان  $N$  كبيراً، يكون متوسط الوقت للانقراض كبيراً إذا  $R_0 > 1$  وصغيرة إذا  $R_0 < 1$ . إذا  $T_{n,j}$  هو متوسط الوقت مع  $n$  المصابين في البداية في البيئة  $j$ ، ثم  $1 \leq n \leq N$ .

$$T_{n,1} = \frac{1 + a_1 n(1 - n/N)T_{n+1,1} + bnT_{n-1,1} + q_1 T_{n,2}}{a_1 n(1 - n/N) + bn + q_1}, \quad (1)$$

$$T_{n,2} = \frac{1 + a_2 n(1 - n/N)T_{n+1,2} + bnT_{n-1,2} + q_2 T_{n,1}}{a_2 n(1 - n/N) + bn + q_2}. \quad (2)$$

بالإضافة إلى ذلك  $T_{0,1} = T_{0,2} = 0$ . الهدف من هذه المقالة هو الدراسة في الحالة فوق الحرجة، وهذا يعني إذا  $R_0 > 1$ ، سلوك متوسط الوقت حتى الانقراض عندما يصبح حجم السكان  $N$  كبيراً.

في بيئة ثابتة بمعدل اتصال كان مع  $R_0 = \frac{a}{b} > 1$  (Doering et al., 2005) يوضح أن متوسط وقت الانقراض من جزء مصاب من السكان  $x = n/N$  يزيد عندما  $N \rightarrow \infty$ ، بغض النظر عن  $x$ ، مثل  $e^{cN} \sqrt{\frac{2\pi}{N}}$ ، أين  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ ، وبعبارة أخرى، فإن متوسط الوقت يتزايد أضعافاً مضاعفة تقريباً مع  $N$ . (Bacaër, 2015). يقتصر نتيجة مشابهة عندما تكون البيئة دورية، حتى لو لم تكن هناك صيغة صريحة لمعلمة النموذج.

في بيئة عشوائية فوق الحرجة ، أي مع  $R_0 > 1$  ، تشير المقالة التالية إلى أنه يجب التمييز بين حالتين: حالة فوق الحرجة للغاية حيث  $a_1 > a_2 > b$  وحالة ضعيفة للغاية حيث  $a_1 > b > a_2$ . في حالة فوق الحرجة للغاية حيث  $a_1 > a_2 > b$  ، نفترض أن متوسط الوقت حتى الانقراض يزداد بشكل كبير تقريباً مع  $N$  مع معلمة  $c_2 = b/a_2 - 1 - \log(b/a_2)$  وبشكل أكثر دقة ، فإن لوغاريتم متوسط الوقت ، مقسوماً على  $N$  ، يتقارب إلى  $c_2$ . وبالتالي فإن السلوك المقارب هو نفسه كما لو كانت البيئة مغلقة في الحالة 2 ، وهذا يعني أن الأقل ملائمة لانتشار الوباء والذي يحدث فيه الانقراض بشكل تفضيلي.

ومع ذلك ، إذا  $a_1 > b > a_2$  و  $R_0 > 1$  ، ثم نفترض أن متوسط الوقت للانقراض يزيد كما  $N^\omega$  مع

$$\omega = \frac{q_2}{b - a_2} - \frac{q_1}{a_1 - b}. \quad (3)$$

في هذه الحالة ،  $R_0 > 1$  ما يعادل  $\omega > 0$ . بشكل حدسي ، يحدث من وقت لآخر أن يبقى المرء في الحالة 2 لفترة طويلة جداً. احتمالية أن تكون هذه المدة أكبر من  $\tau$  هي  $e^{-q_2\tau}$ . في الحالة 2 ، متوسط وقت الانقراض لـ  $N$  large هو من  $\frac{\log N}{b-a_2} \simeq \tau$  (دورينغ وآخرون ، 2005) ؛ يمكن تخمين ذلك أيضاً من معادلة شبه الانقراض  $1/N = e^{-(b-a_2)\tau}$ . لذا ، فإن احتمال الانقراض خلال فترة في الحالة 2 يكون في النهاية في الواقع  $N^\omega$  مع  $\omega$  المعطى بواسطة (3).  $e^{-q_2\tau} \simeq N^{-\frac{q_2}{b-a_2}}$  هذا يشير إلى أن متوسط وقت الانقراض هو من حيث حجم العكسي ، أي  $N^{\frac{q_2}{b-a_2}}$ . وفقاً لتحليلنا ، فإن ترتيب الحجم هو

لاحظ أيضاً أنه إذا  $q_1$  و  $q_2$  مضروبة في  $1 + \varepsilon$  مع  $\varepsilon > 0$  ، ثم  $R_0$  يبقى دون تغيير ولكن  $\omega$  مضروبة في  $1 + \varepsilon$  : في هذا النموذج ، تميل زيادة التقلبية البيئية إلى زيادة متوسط وقت الانقراض.

هذا القانون في  $N^\omega$  يبدو أنه قادر على التعميم في حالة البيئة مع حالات  $J$  إذا

$$a_1 > a_2 > \dots > a_J, \quad b > a_J, \quad R_0 > 1.$$

لقد فعلنا

$$R_0 = \left( \sum_{j=1}^J a_j u_j \right) / b$$

إذا كان  $Q$  هو المولد اللامتناهي وإذا كان  $u$  هو المتجه الوحيد مع

$$Qu = 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j = 1, \quad u_j > 0 \quad \forall j$$

(بكار وإد الدراز ، 2014). دع  $A$  و  $B$  يدلان على المصفوفات القطرية  $\text{diag}(a_1, \dots, a_J)$  و  $\text{diag}(b, \dots, b)$ . النظر في الحد الطيفي

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - s(A - B))\},$$

أين  $\sigma(\cdot)$  يدل على طيف مصفوفة و  $\Re(\cdot)$  الجزء الحقيقي من العدد المركب. نظهر

$$\exists! \omega > 0, \quad \mu(\omega) = 0.$$

ثم نفترض أن متوسط الوقت للانقراض يزيد كما  $N^\omega$ . في حالة معينة حيث  $a_j \neq b$  لجميع  $j$  ، الرقم simply هو ببساطة القيمة الذاتية لأكبر جزء حقيقي من المصفوفة  $(A - B)^{-1}Q$ . تم العثور على هذه المصفوفة والتعبير عن القيمة الذاتية  $\omega$  المعطاة بواسطة (3) لـ  $I = 2$  بالفعل في (سوير وسلاتكين ، 1981 ، المعادلتان (14) و (20)) لنموذج السكان دون العشوائية الديموغرافية في حالة دون الحرجة ( $R_0 < 1$ ) ؛ في هذه الحالة ، فإن الوقت نفسه حتى الانقراض ولكن يزيد كما لوغاريتم  $N$ .

لقد وجد العديد من المؤلفين قانوناً للسلطة في الوقت المتوسط للانقراض في النماذج السكانية في بيئة عشوائية براونية (لودفيج ، 1976 ؛ لي ، 1981 ؛ لاند ، 1993). يستخدمون معادلة الانتشار كنقطة انطلاق. ومع ذلك (Gaveau et al. ، 1996) و (Doering et al. ، 2005) أظهروا أن هذه المعادلة تؤدي إلى صيغة غير دقيقة للمعلمة  $c$ . في الواقع ، لا تمثل هذه المعادلة دائماً بشكل جيد ذيل التوزيع شبه الثابت ، وهو بالتحديد أهم جزء لدراسة عملية الانقراض. لاحظ أن (Kamenev et al. ، 2008) عالج مشكلة الانقراض بالنسبة للسكان في بيئة عشوائية مع ضوضاء ملونة باستخدام تكاملات المسار.

يقدم القسم 2 التوزيع شبه الثابت للنموذج. يستخدم القسم 3 طريقة (Brillouin و Kramers و Wentzel (BKW) للحصول على تقديرات صحيحة في مناطق المعلمة  $x = n/N$  حيث يتغير التوزيع بسرعة. يستخدم القسم 4 تقريباً آخر في المنطقة التي يختلف فيها التوزيع ببطء. يستخدم القسم 5 معادلة الانتشار لربط التقريبين السابقين: تستبدل الدالات المتغيرة للهندسة المتغيرة لـ Kummer و Tricomi هنا

وظيفة خطأ Gauss المستخدمة على وجه الخصوص بواسطة (Meerson and Sasorov, 2008). يقدر القسم 6 القيمة الذاتية المرتبطة بالتوزيع شبه الثابت.

لم يتم الحصول على أي من هذه التقريبات بشكل صارم ، يقدم القسم 7 مع ذلك المحاكاة العددية التي يبدو أنها تؤكد القيمة العددية للدعاة للقانون الأسي في الحالة فوق الحرجة بقوة ولقانون القوة في الحالة فوق الحرجة الضعيفة. القسم 8 يضيف بعض الملاحظات. على وجه الخصوص ، نقارن في النظام الحرج الضعيف حالة البيئة الماركوفية وحالة البيئة الدورية بنفس النسبة من الوقت في حالة مواتية أو غير مواتية: الأول يؤدي إلى قانون السلطة في الوقت المتوسط حتى الانقراض ، والثاني لقانون أسي. القسم 9 ينظر في حالة سلسلة ماركوف مع عدد محدود من الدول ويناقش التعميمات الأخرى.

## 2 توزيع شبه ثابت

ضع في اعتبارك احتمالية وجود عدد من المصابين في البيئة زفي الوقت  $t$ :  $p_{n,j}(t)$ . ثم

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,1}}{dt} = & - \left[ a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] p_{n,1} + b(n+1)p_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1)\left(1 - \frac{n-1}{N}\right)p_{n-1,1} + q_2 p_{n,2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,2}}{dt} = & - \left[ a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] p_{n,2} + b(n+1)p_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1)\left(1 - \frac{n-1}{N}\right)p_{n-1,2} + q_1 p_{n,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

دعونا نحدد

$$\begin{aligned} P = & (p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2}) \bullet \\ A_n = & \text{diag}[a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right), a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right)] \bullet \\ B_n = & \text{diag}[b n, b n] \bullet \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} Q & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q - A_1 - B_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1 & Q - A_2 - B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & Q - B_N \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} Q & * \\ \hline 0 & R \end{array} \right).$$

النظام (4) - (5) من الشكل

$$\frac{dP}{dt} = MP.$$

والقيم الذاتية لل  $M$  هي تلك  $Q$  وتلك  $R$ . والقيم الذاتية لل  $Q$  هي  $0$  ( $q_1 + q_2$ ) - تكون معاملات المصفوفة  $R$  خارج القطر موجبة أو صفر. علاوة على ذلك ، المصفوفة  $R$  غير قابلة للاختزال ، كما نرى مع الرسم البياني المرتبط. النتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius (سميث ، 1995 ، النتيجة الطبيعية 3.2) تُظهر أن المصفوفة  $R$  لها قيمة ذاتية حقيقية بسيطة ، أكبر بدقة من الجزء الحقيقي من جميع القيم الذاتية الأخرى ، ومع المتحدثة الذاتية المرتبطة بها. بمكونات إيجابية للغاية. إذا كان  $\mathbf{1}$  هو متجه الخط  $[1, \dots, 1, 1]$  بالحجم  $2N$  ، إذن

$$\mathbf{1}R = [-b, -b, 0, 0, \dots, 0, 0].$$

وفقاً لـ (Berman and Plemmons, 1994, Theorem 6.2.3, L33) ، لدينا  $\lambda < 0$  . يتم تحديد  $\pi = (\pi_{0,1}, \pi_{0,2}, \pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2})$  المتجه الذاتي لـ  $M$  المرتبط بالقيمة الذاتية  $\lambda$ :  $M\pi = \lambda\pi$  . بعبارة أخرى ،

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,1} = & - \left[ a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_1 \right] \pi_{n,1} + b(n+1)\pi_{n+1,1} \\ & + a_1(n-1)\left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\pi_{n-1,1} + q_2 \pi_{n,2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{n,2} = & - \left[ a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) + b n + q_2 \right] \pi_{n,2} + b(n+1)\pi_{n+1,2} \\ & + a_2(n-1)\left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\pi_{n-1,2} + q_1 \pi_{n,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

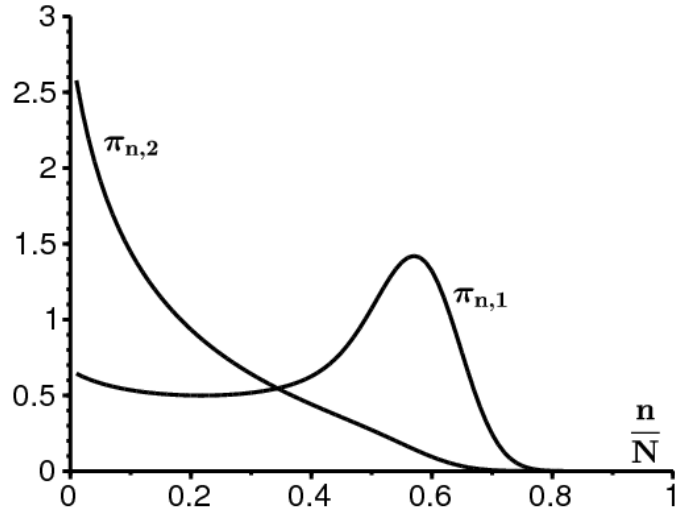
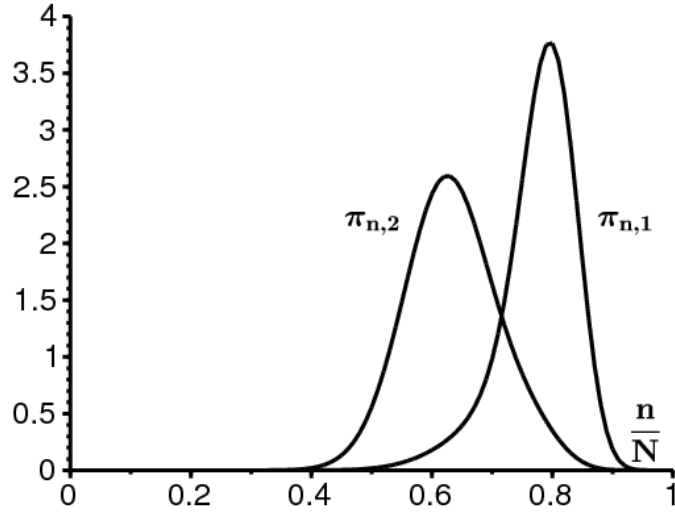
دعونا تطبيع المتجه الذاتي من خلال فرض سبيل المثال

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 1.$$

يظهر الشكل 1  $\pi_{n,1}$  و  $\pi_{n,2}$  كدالة لـ  $n/N$  لـ  $n \geq 1$  في حالتين: حالة  $R_0 > 1$  و  $a_1 > a_2 > b$ ، حالة حيث  $R_0 > 1$  و  $a_1 > b > a_2$ . يتم حساب المتجه الذاتي with مع برنامج Scilab. ذروة  $\pi_{n,1}$  قريب من  $x_1 = 1 - b/a_1$  كما قد يتوقع المرء عند التفكير في معادلة المجال يعني أن نسبة ط المصابين

$$\frac{di}{dt} = a_1 i(1 - i) - bi.$$

في الواقع  $x_1$  هي حالة التوازن المستقرة الوحيدة لهذه المعادلة. ذروة  $\pi_{n,2}$  قريب من  $x_2 = 1 - b/a_2$  إذا  $a_2 > b$  وقريبة من  $x = 0$  إذا  $a_2 < b$ .



الشكل 1. المكونات  $\pi_{n,1}$  و  $\pi_{n,2}$  لـ  $n \geq 1$  من المتجه الذاتي  $\pi$  كدالة  $n/N$  عندما  $N = 100$ ،  $q_1 = 1$  و  $q_2 = 1$ . قيم  
المعطيات الأخرى:  $a_1 = 10 > a_2 = 5 > b = 2$  (ب)  $a_1 = 5 > b = 2 > a_2 = 1$ .

دعونا نحدد

$$\hat{\pi} = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,1}, \pi_{N,2}) \bullet$$

$$\hat{T} = (T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{N,1}, T_{N,2}) \bullet$$

يمكن كتابة النظام الخطي (1) - (2) في النموذج

$$-1 = q_1(T_{n,2} - T_{n,1}) + a_1 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) (T_{n+1,1} - T_{n,1}) + bn(T_{n-1,1} - T_{n,1}), \quad (8)$$

$$-1 = q_2(T_{n,1} - T_{n,2}) + a_2 n \left(1 - \frac{n}{N}\right) (T_{n+1,2} - T_{n,2}) + bn(T_{n-1,2} - T_{n,2}). \quad (9)$$

الأنظمة (8) - (9) و (6) - (7) تظهر ذلك

$$-\mathbf{1}^* = R^* \hat{T}, \quad \lambda \hat{\pi} = R \hat{\pi},$$

حيث يشير النجم \* إلى تبديل المتجهات أو المصفوفات. من خلال أخذ منتج النقطة المعتاد ، نحصل على  
لذا  $\langle -\mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle = \langle R^* \hat{T}, \hat{\pi} \rangle = \langle \hat{T}, R \hat{\pi} \rangle = \lambda \langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle$

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\langle \hat{T}, \hat{\pi} \rangle}{\langle \mathbf{1}^*, \hat{\pi} \rangle}.$$

بعبارة أخرى ،  $-1/\lambda$  هو مزيج خطي من  $(T_{n,j})$  ل  $n \geq 1$  و  $j = 1, 2$ . في ما يلي ، نحن مهتمون بشكل أساسي بـ  $\lambda$ . ندرس  $(T_{n,j})$  في القسم 7 من خلال المحاكاة العددية.

### 3. تقريب BKW

**القضية**  $x > x_1 = 1 - b/a_1$  مع  $R_0 > 1$  ، نخمن ذلك  $\lambda \rightarrow 0$  إذا  $N \rightarrow +\infty$ . سوف نتحقق من الخلفية ، كما فعلنا على سبيل المثال (Meerson and Sasorov، 2008) لنموذج مختلف ، وهذا هو الحال بالفعل. وهكذا يمكن إهمال الجانب الأيسر من (6) - (7). ل  $x > x_1$  ، دعنا نبحث عن تقريب (BKW (Bender and Orszag ، 1978) للنموذج

$$\pi_{n,1} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,2} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

أين  $x = n/N$ . تطوير تايلور من أجل 2 ل  $S(x)$  ومن أجل 1 ل  $\Sigma(x)$  يقترح ذلك

$$\pi_{n\pm 1,1} \simeq e^{-NS(x) \mp S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \Sigma(x) \mp \frac{\Sigma'(x)}{N}}.$$

نحصل عليه باستبدال (6) والتبسيط بواسطة  $e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$

$$0 \simeq a_1 N \left(x - \frac{1}{N}\right) \left(1 - x + \frac{1}{N}\right) e^{S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N}} - a_1 N x (1 - x) \\ + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x) - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N}} - b N x - q_1 + q_2 \frac{c(x)}{N}.$$

التعبيرات في  $O(N)$  تعطي

$$0 \simeq N x \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] \left[ a_1 (1 - x) - b e^{-S'(x)} \right].$$

المصطلح الأول بين قوسين فارغ فقط للوظائف الثابتة  $S(x)$ . اختر الحل الذي يلغي المصطلح الثاني بين قوسين معقوفين

$$e^{S'(x)} = \frac{b}{a_1 (1 - x)},$$

هذا يعني

$$S(x) = s_1(x) = x \log(b/a_1) + x + (1 - x) \log(1 - x)$$

باستثناء ثابت مضافة. هذا يعني  $S''(x) = \frac{1}{1-x}$  الوظيفة  $\Sigma(x)$  يتم الحصول عليها بالتعابير الواردة في  $O(1)$  :

$$0 \simeq a_1 N \left[ x(1 - x) + \frac{2x - 1}{N} \right] e^{S'(x)} \left[ 1 + \frac{S''(x)}{2N} + \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - a_1 N x (1 - x) \\ + b N \left(x + \frac{1}{N}\right) e^{-S'(x)} \left[ 1 - \frac{S''(x)}{2N} - \frac{\Sigma'(x)}{N} \right] - b N x - q_1.$$

بتعويض  $S(x)$  من خلال التعبير ، نحصل

$$\Sigma'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} + \frac{q_1}{a_1 - b} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\Sigma(x) = \sigma_1(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x - x_1}{x} \right]^{\frac{q_1}{a_1 - b}} \right).$$

الوظيفة  $c(x)$  في  $\pi_{n,2}$  تم الحصول عليه من (7). شكل  $\pi_{n,2}$  تم اختياره لموازنة التعبيرات المختلفة. في الواقع ، يعطي أعلى ترتيب

$$0 \simeq \frac{c(x)}{N} \left\{ Na_2 x(1-x) \left[ e^{S'(x)} - 1 \right] + bNx \left( e^{-S'(x)} - 1 \right) \right\} + q_1.$$

بتعويض  $S(x)$  من خلال التعبير ، نحصل

$$c(x) \simeq \frac{q_1}{(a_1 - a_2)x(x - x_1)}.$$

باختصار ، نحن نتخمين  $x > x_1$  ،

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 e^{-Ns_1(x) - \sigma_1(x)}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x(x - x_1)}, \quad (10)$$

لثابت معين  $k_1$ . النظر على وجه الخصوص في سلوك  $\pi_{n,1}$  و  $\pi_{n,2}$  ل  $x > x_1$  و  $x$  قريب  $x_1$ . دعونا نحدد  $c_1 = b/a_1 - 1 - \log(b/a_1)$ . لقد فعلنا  $s'_1(x_1) = 0$  يعطي تطور تايلور

$$s_1(x) \simeq s_1(x_1) + s''_1(x_1)(x - x_1)^2/2 \simeq -c_1 + \frac{a_1}{2b}(x - x_1)^2.$$

لذا

$$\pi_{n,1} \simeq k_1 \frac{e^{Nc_1 - N\frac{a_1}{2b}(x-x_1)^2} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{\sqrt{1-x_1} (x - x_1)^{\frac{q_1}{a_1-b}}}, \quad \pi_{n,2} \simeq \frac{q_1 \pi_{n,1}}{N(a_1 - a_2)x_1(x - x_1)}. \quad (11)$$

**القضية** إذا  $x < x_2 = 1 - b/a_2$  ، دعونا نبحث عن حل إذا  $a_2 > b$

$$\pi_{n,2} = e^{-NS(x) - \Sigma(x)}, \quad \pi_{n,1} = \frac{c(x)}{N} e^{-NS(x) - \Sigma(x)}$$

ل  $x < x_2 = 1 - b/a_2$  النظام (6) - (7) يؤدي ، كما سبق ، إلى

$$S(x) = s_2(x) = x \log(b/a_2) + x + (1-x) \log(1-x)$$

باستثناء ثابت إضافي ، بينما

$$\Sigma(x) = \sigma_2(x) = \log \left( x \sqrt{1-x} \left[ \frac{x_2 - x}{x} \right]^{\frac{q_2}{a_2 - b}} \right), \quad c(x) \simeq \frac{q_2}{(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}.$$

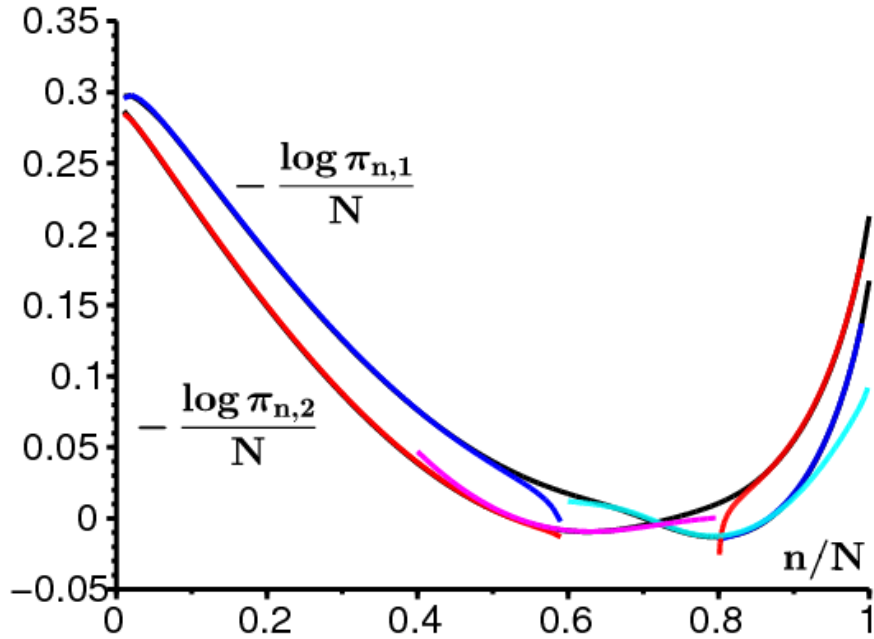
باختصار ، نحن نتخمين  $x < x_2$  ،

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 e^{-Ns_2(x) - \sigma_2(x)}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x(x_2 - x)}, \quad (12)$$

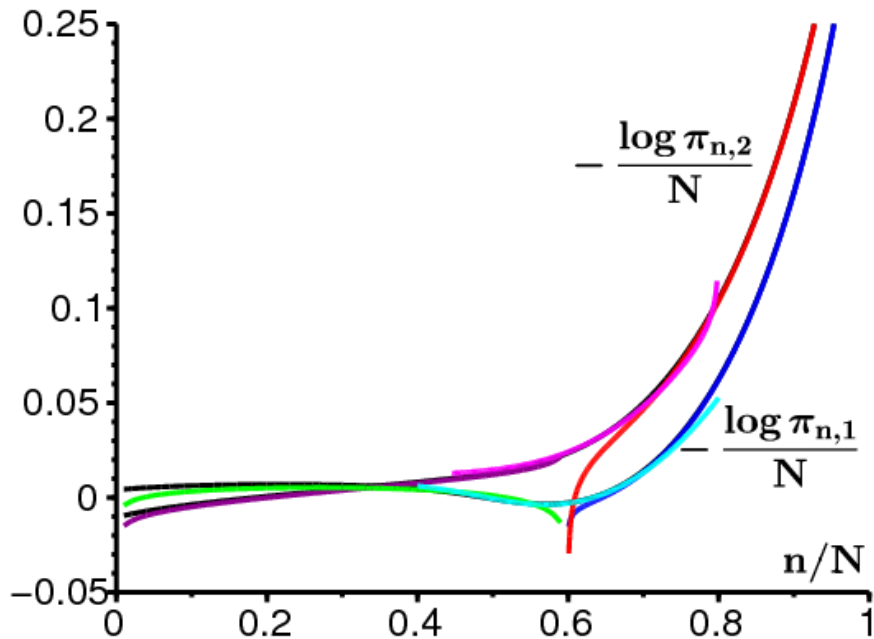
لثابت معين  $k_2$ . ل  $x < x_2$  و  $x$  قريب  $x_2$  ،

$$\pi_{n,2} \simeq k_2 \frac{e^{Nc_2 - N\frac{a_2}{2b}(x_2-x)^2} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b} - 1}}{\sqrt{1-x_2} (x_2 - x)^{\frac{q_2}{a_2-b}}}, \quad \pi_{n,1} \simeq \frac{q_2 \pi_{n,2}}{N(a_1 - a_2)x_2(x_2 - x)}. \quad (13)$$

الشكلان 2 و 3 يظهران  $-(\log \pi_{n,1})/N$  و  $-(\log \pi_{n,2})/N$  بالاعتماد على  $n/N$  لـ  $1 \leq n \leq N$  مع  $\pi_{n,i}$  محسوبة باستخدام النظام (6) - (7). كما توضح الأشكال التقريبية (10) و (12) باللون الأزرق الداكن والأحمر. الثابت  $k_1$  يتم اختيار (10) بحيث  $\pi_{n,1}$  يتزامن مع تقريبه لـ  $n = N-1$ . الثابت  $k_2$  في (12) يحددها  $k_1$  كما هو موضح في القسم 5 أدناه.



الشكل 2. الشكل مع  $a_1 > a_2 > b$ . باللون الأسود، تحت المنحنيات الأخرى:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  و  $-(\log \pi_{n,2})/N$  بالاعتماد على  $x = n/N$ .  
 لـ  $\pi_{n,1}$ : باللون الأزرق الداكن، تقريب (10) لـ  $x > x_1$  و (12) لـ  $x < x_2$ ; باللون الأزرق الفاتح، التقريب المنتشر (25) لـ  $x \simeq x_1$ .  
 لـ  $\pi_{n,2}$ : باللون الأحمر، تقريب (10) لـ  $x > x_1$  و (12) لـ  $x < x_2$ ; باللون الوردي، التقريب المنتشر (31) لـ  $x \simeq x_2$ .



الشكل 3. المثال مع  $a_1 > b > a_2$ . باللون الأسود، تحت المنحنيات الأخرى:  $-(\log \pi_{n,1})/N$  و  $-(\log \pi_{n,2})/N$  بالاعتماد على  $x = n/N$ .  
 لـ  $\pi_{n,1}$ : باللون الأزرق الداكن، التقريب (10) لـ  $x > x_1$ ; باللون الأخضر، التقريب (20) لـ  $x < x_1$ ; باللون الأزرق الفاتح، التقريب المنتشر (25) لـ  $x \simeq x_1$ .

ل  $\pi_{n,2}$  : باللون الأحمر ، التقريب (10) ل  $x > x_1$  ؛ باللون الأرجواني ، تقريب (19) ل  $x < x_1$  باللون الوردي ، تقريب انتشاري (31) ل  $x \simeq x_1$ .

## 4 التقريب في مجال التباين البطيء

نحن نبحت عن تقريب  $\pi_{n,2}$  و  $\pi_{n,1}$  ل  $x_2 < x < x_1$  إذا  $a_1 > a_2 > b$  و ل  $0 < x < x_1$  إذا  $a_1 > b > a_2$ . خلال هذه الفترات ،  $S(x) = 0$  ، لناخذ في الاعتبار النظام (6) - (7) ونحاول تقريباً تقريباً مستمراً  $\pi_{n,1} \simeq y(x)$  ،  $\pi_{n,2} \simeq z(x)$  مع  $x = n/N$ . يعطي تطور تايلور

$$\pi_{n\pm 1,1} = y(x \pm 1/N) \simeq y(x) \pm \frac{y'(x)}{N} + \frac{y''(x)}{2N^2}.$$

مع  $\lambda \simeq 0$  ، يؤدي هذا إلى تقريب الانتشار

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y] - q_1y + q_2z + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_1x(1-x) + bx)y] \quad (14)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z] - q_2z + q_1y + \frac{1}{2N} \frac{d^2}{dx^2} [(a_2x(1-x) + bx)z]. \quad (15)$$

بإهمال  $N/I$  ، نحصل على المعادلات

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x)] - q_1y(x) + q_2z(x) \quad (16)$$

$$0 \simeq \frac{d}{dx} [(bx - a_2x(1-x))z(x)] - q_2z(x) + q_1y(x), \quad (17)$$

وهي من نفس شكل المعادلات (29) - (30) من (Slatkin, 1978). بإضافة المعادلتين (16) و (17) نجد

$$\frac{d}{dx} [(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x)] \simeq 0.$$

وبالتالي فإن الوظيفة بين الأقواس المربعة ثابتة. لأن  $x$  عاملاً ، هذا يوحي بالعمل  $0 \rightarrow x$  أن هذا الثابت صفر:

$$(bx - a_1x(1-x))y(x) + (bx - a_2x(1-x))z(x) \simeq 0. \quad (18)$$

هذا يسمح للتعبير  $y(x)$  بالاعتماد على  $z(x)$ . من خلال استبدال (17) ، نحصل على بعد قليل من التلاعب

$$\frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} \simeq \frac{q_1}{bx - a_1x(1-x)} + \frac{q_2}{bx - a_2x(1-x)} - \frac{b - a_2(1-2x)}{bx - a_2x(1-x)},$$

$$z(x) \simeq \frac{C}{bx - a_2x(1-x)} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} \quad (19)$$

بالنسبة لبعض مستمر  $C$ . يظهر هذا التقريب باللون الأرجواني في الشكل 3. يتم تحديد الثابت  $C$  بواسطة  $k_1$  كما هو موضح في القسم 5 أدناه. ثم تظهر المعادلتان (18) و (19) ذلك

$$y(x) \simeq \frac{C}{a_1x(1-x) - bx} \left( \frac{a_1(1-x) - b}{x} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x)}{x} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}}. \quad (20)$$

يظهر هذا التقريب باللون الأخضر في الشكل 3. إذا  $x \simeq x_1$  مع  $x < x_1$  ، نحصل

$$y(x) \sim \frac{C}{a_1x_1} \left( \frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{b - a_2(1-x_1)}{x_1} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x_1 - x)^{\frac{q_1}{a_1-b} - 1}. \quad (21)$$

إذا  $a_1 > b > a_2$  نجد  $x > 0$



$$y(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}} x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}} \quad (22)$$

$$z(x) \sim C (a_1 - b)^{\frac{q_1}{a_1-b}} (b - a_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} x^{-1+\frac{q_2}{b-a_2}-\frac{q_1}{a_1-b}}. \quad (23)$$

نذكر أن  $R_0 = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{b(q_1 + q_2)} > 1$  ما يعادل  $\frac{q_2}{b-a_2} > \frac{q_1}{a_1-b}$  في هذه الحالة. على وجه الخصوص، لا يتجزأ من  $z(x)$  على مقربة من  $0^+$  متقارب. إذا  $a_1 > a_2 > b$  ثم يظهر (19)

$$z(x) \simeq \frac{C}{a_2 x_2} \left( \frac{a_1(1-x_2) - b}{x_2} \right)^{\frac{q_1}{a_1-b}} \left( \frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{q_2}{a_2-b}} (x - x_2)^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \quad (24)$$

قريب من  $x_2$  مع  $x > x_2$ .

## 5 تقريب ناشر $x_2$ و $x_1$

**الوضع قريب  $x_1$ .** قريب من  $x_1 = x$  و  $x = x_2$ ، لم يعد بالإمكان تجاهل الانتشار في (14) - (15). تحليل المناطق الانتقالية في  $x_1$  و  $x_2$  يجب السماح للثابت  $C$  في (21) و (24) بربطه بالثوابت  $k_1$  من (10) و  $k_2$  من (12). دعونا نحدد  $x = x_1 + \xi_1/\sqrt{N}$ . ثم يمكن تقريب معامل مشتق الطلب 1 في (14) من خلال توسيع تايلور للترتيب 1

$$0 \simeq (a_1 - b) \frac{d}{d\xi_1} [\xi_1 y] - q_1 y + q_2 z + b(1 - b/a_1) \frac{d^2 y}{d\xi_1^2}.$$

نحن نهمل  $q_2 z$  أمام  $q_1 y$  إذا  $x \simeq x_1$ :

$$0 \simeq \frac{b}{a_1} \frac{d^2 y}{d\xi_1^2} + \xi_1 \frac{dy}{d\xi_1} + \left(1 - \frac{q_1}{a_1 - b}\right) y.$$

مع

$$\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{a_1}{2b}}, \quad y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1) \quad (25)$$

لدينا معادلة تفاضلية الهرميت

$$0 \simeq \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{d\eta_1^2} - \eta_1 \frac{dY}{d\eta_1} - \frac{q_1}{a_1 - b} Y.$$

نحن نبحت عن حل في شكل سلسلة كاملة

$$Y(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \eta_1^n.$$

نحصل على علاقة التكرار

$$w_{n+2} = \frac{2(n+2\alpha_1)}{(n+2)(n+1)} w_n,$$

أين  $\alpha_1 = \frac{q_1/2}{a_1-b}$ . وبالتالي لدينا حلان مستقلان خطياً

$$Y(\eta_1) = \gamma_1 \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \gamma_2 \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2),$$

أين  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  هي ثوابت و

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)} z^n}{\beta^{(n)} n!}, \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)$$

هي وظيفة كומר المتقنة للهندسة المفرطة. وفق (Maroni، 1997، المعادلة (93)) لدينا  $\Phi(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta}$  إذا  $z \rightarrow +\infty$  حيث  $\Gamma$  هي دالة جاما أويلر. لذا

$$Y(\eta_1) \sim e^{\eta_1^2} |\eta_1|^{2\alpha_1-1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right), \quad \eta \rightarrow -\infty.$$

لذا  $y(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  لديه نفس السلوك المقارب (21) عندما  $\eta_1 \rightarrow -\infty$  شريطة أن

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} - \frac{\gamma_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (26)$$

إذا كان على العكس  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ ، (11) يقترح ذلك  $Y(\eta_1)$  يجب أن تتصرف على أنها ثابتة معينة مضروبة في  $\eta_1^{-2\alpha_1}$ . تُظهر نظرية وظائف الهندسة المتقاربة (ماروني، 1997) أنه من الضروري فرضها

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} K, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} K \quad (27)$$

بالنسبة لبعض ثابت  $K$  للحصول على مثل هذا السلوك مقارب. في الواقع، لدينا بعد ذلك

$$Y(\eta_1) = K \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} \Phi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_1)} \eta_1 \Phi(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_1^2) \right), \quad (28)$$

هذا يعني  $Y(\eta_1) = K \Psi(\alpha_1, \frac{1}{2}; \eta_1^2)$  لـ  $\eta_1 > 0$ ، أين  $\Psi(\alpha, \beta; z)$  هي وظيفة ملفت للهندسة المفرطة لـ Tricomi التي تحدها

$$\Psi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \Phi(\alpha, \beta; z) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Phi(\alpha-\beta+1, 2-\beta; z).$$

حسب (Maroni، 1997، المعادلة (90)) لدينا  $\Psi(\alpha, \beta; z) \sim z^{-\alpha}$  إذا  $z \rightarrow +\infty$ . لذا  $Y(\eta_1) \sim K \eta_1^{-2\alpha_1}$  إذا  $\eta_1 \rightarrow +\infty$ .

ما يعادل  $e^{-\eta_1^2} Y(\eta_1)$  ثم يتزامن مع (11) بشرط ذلك

$$K \left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} = k_1 \frac{e^{Nc_1}}{\sqrt{1-x_1}} x_1^{\frac{q_1}{a_1-b}-1}. \quad (29)$$

باختصار، تحدد العلاقات (26) و (27) و (29)  $K$ ،  $\gamma_1$ ،  $\gamma_2$  و  $C$  بالاعتماد على  $k_1$ . على وجه الخصوص، لأن  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ ، تعطي المعادلة (26)  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  و  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_1}{2b}} \right]^{\frac{q_1}{a_1-b}-1} \frac{2\pi K}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})} = \frac{C(b - a_2(1 - x_1))^{\frac{q_2}{a_2-b}}}{a_1^{1-\frac{q_1}{a_1-b}} x_1^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (30)$$

يمكن الحصول على نموذج بديل باستخدام صيغة Legendre-Gauss  $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha_1-1}} \Gamma(2\alpha_1)$

الوضع قريب  $x_2$ . إذا  $a_2 > b$  نقوم بتحليل مشابه مع (15) قريب من  $x = x_2 = 1 - b/a_2$ . نحن نهمل  $q_1 y$  أمام  $q_2 z$ . إذا

$$x = x_2 + \frac{\xi_2}{\sqrt{N}}, \quad \eta_2 = \xi_2 \sqrt{\frac{a_2}{2b}}, \quad z(\eta_2) = e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2), \quad \alpha_2 = \frac{q_2/2}{a_2-b},$$

ثم

$$Z(\eta_2) = \delta_1 \Phi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2) + \delta_2 \eta_2 \Phi(\alpha_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \eta_2^2) \quad (31)$$

أين  $\delta_1$  و  $\delta_2$  هي ثوابت. سلوك  $\eta_2 \rightarrow +\infty$  يتزامن مع (24) بشرط أن

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \left( \frac{\delta_1 \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\delta_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \right) = \frac{C [a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (32)$$

دعونا نحدد

$$\delta_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} \hat{K}, \quad \delta_2 = -\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_2)} \hat{K} \quad (33)$$

لثابت معين  $\hat{K}$  (لاحظ علامة الطرح  $\delta_2$ ). ثم  $Z(\eta_2) = \hat{K} \Psi(\alpha_2, \frac{1}{2}; \eta_2^2)$  إذا  $\eta_2 < 0$ . لذا  $e^{-\eta_2^2} Z(\eta_2) \sim \hat{K} e^{-\eta_2^2} |\eta_2|^{-2\alpha_2}$  عندما  $\eta_2 \rightarrow -\infty$ . يتزامن ذلك مع (13) بشرط أن

$$\hat{K} \left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{-\frac{q_2}{a_2-b}} = k_2 \frac{e^{Nc_2}}{\sqrt{1-x_2}} x_2^{\frac{q_2}{a_2-b}-1}. \quad (34)$$

كما ورد أعلاه (32) و (33) يعطي

$$\left[ \sqrt{\frac{Na_2}{2b}} \right]^{\frac{q_2}{a_2-b}-1} \frac{2\pi \hat{K}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2 + \frac{1}{2})} = \frac{C [a_1(1-x_2) - b]^{\frac{q_1}{a_1-b}}}{a_2^{1-\frac{q_2}{a_2-b}} x_2^{1+\frac{q_1}{a_1-b} + \frac{q_2}{a_2-b}}}. \quad (35)$$

إذن الثوابت  $k_2, \hat{K}, \delta_1$  و  $\delta_2$  هي التي تحدد ثابت  $C$ .

## 6 القيمة الخاصة

نذكر أن  $M\pi = \lambda\pi$ . بإضافة كل خطوط نظام المعادلات هذا نحصل عليه  $\lambda \sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0$  لكن  $\lambda < 0$ . لذا

$$\sum_{n=0}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2}) = 0.$$

أول سطرين من النظام

$$\begin{aligned} \lambda \pi_{0,1} &= -q_1 \pi_{0,1} + q_2 \pi_{0,2} + b \pi_{1,1}, \\ \lambda \pi_{0,2} &= -q_2 \pi_{0,2} + q_1 \pi_{0,1} + b \pi_{1,2}. \end{aligned}$$

بإضافتها، نجد

$$\lambda = b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\pi_{0,1} + \pi_{0,2}} = -b \frac{\pi_{1,1} + \pi_{1,2}}{\sum_{n=1}^N (\pi_{n,1} + \pi_{n,2})}. \quad (36)$$

دعونا ننظر أولاً في الحالة  $a_1 > b > a_2$  مع  $R_0 > 1$ . لذلك (19) يظهر

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_0^{x_1} z(x) dx \simeq \kappa_1 C$$

أين  $\kappa_1$  ثابت إيجابي مستقل عن  $N$ . باستخدام حقيقة أن ذروة  $\pi_{n,1}$  قريب من  $x = n/N = x_1$  والعلاقات (25) و (28) و (30) نجد

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\eta_1) d\eta_1 \frac{dx}{d\eta_1} \simeq \kappa_2 \frac{K}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_3 C N^{-\frac{q_1/2}{a_1-b}}, \quad (37)$$

أين  $\kappa_z$  (فوق وتحت) لا تزال الثوابت الإيجابية، والتي هي مستقلة عن  $N$ . لذا فإن المصطلح السائد لـ  $N$  Large في مقام (36) هو المصطلح  $\pi_{n,2}$ . في البسط،  $\pi_{1,1} \simeq y(\frac{1}{N})$  و  $\pi_{1,2} \simeq z(\frac{1}{N})$  و  $y(x)$  و  $z(x)$  تعطى من (22) - (23)، نحصل على ذلك

$$\lambda \simeq -\kappa_4 \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} - 1}}{N} \simeq -\kappa_4 N^{-\frac{q_2}{b-a_2} + \frac{q_1}{a_1-b}}.$$

بعبارة أخرى،  $1/\lambda$  - يزداد مع  $N$  كقانون سلطة، يكون أسه

$$\omega = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b} > 0,$$

كما أعلن في المقدمة. علاوة على ذلك، نلاحظ أن  $\omega$  يتجه نحو  $+\infty$  إذا  $a_2$  تتحول إلى  $b$  بقيم أقل.

الآن النظر في الحالة حيث  $a_1 > a_2 > b$ . للتبسيط، دعنا نقدم التعريف  $f \approx g$  (يجب عدم الخلط بينه وبين الرمز غير الرسمي  $\simeq$  المستخدمة أعلاه) إذا  $(\log f)/N - (\log g)/N \rightarrow 0$  إذا  $N \rightarrow +\infty$ . بالخصوص  $N^\beta \approx 1$  للجميع  $\beta$ . ثم (12) مع  $s = l/N$  يظهر ذلك  $\pi_{1,1} \approx \pi_{1,2}$ . بالإضافة إلى ذلك،

$$\pi_{1,2} \approx k_2 e^{-Ns_2(1/N)} \approx k_2 e^{-s_2'(0)} \approx k_2.$$

علاوة على ذلك، ذروة  $\pi_{n,1}$  قريب من  $x = n/N = x_1$  بينما هذا  $\pi_{n,2}$  قريب من  $x_2$ . وهكذا (37) لا تزال صالحة وتظهر

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,1} \approx C,$$

بينما (31) و (33) و (35) يعطون

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{n,2} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} z(\eta_2) d\eta_2 \frac{dx}{d\eta_2} \simeq \kappa_5 \frac{\hat{K}}{\sqrt{N}} \simeq \kappa_5 C N^{-\frac{q_2/2}{a_2-b}} \approx C.$$

ولكن (34) و (35) تظهر

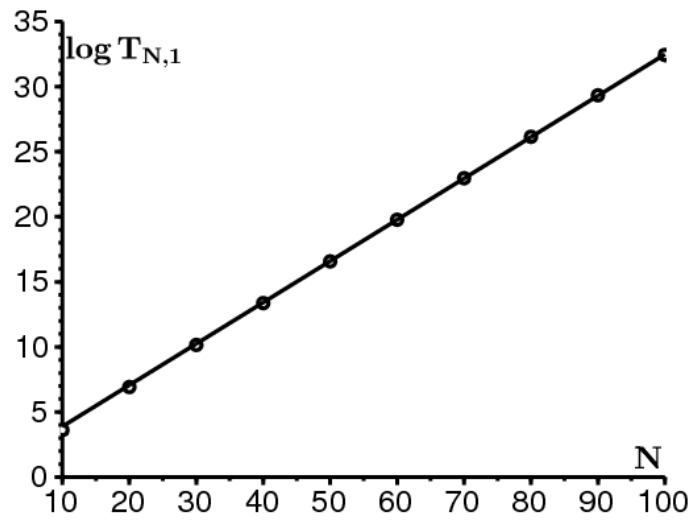
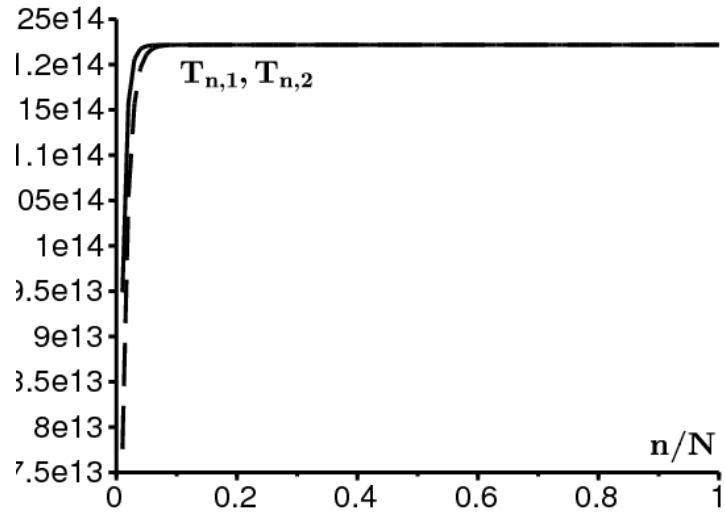
$$C \approx \hat{K} \approx k_2 e^{Nc_2}.$$

وهكذا (36) يعطي  $e^{-Nc_2} \approx -\lambda$  و  $e^{Nc_2} \approx -1/\lambda$ . أخيرًا،  $1/\lambda$  ينمو بشكل كبير مع المعلمة  $c_2$ .

## 7 متوسط الوقت للانقراض

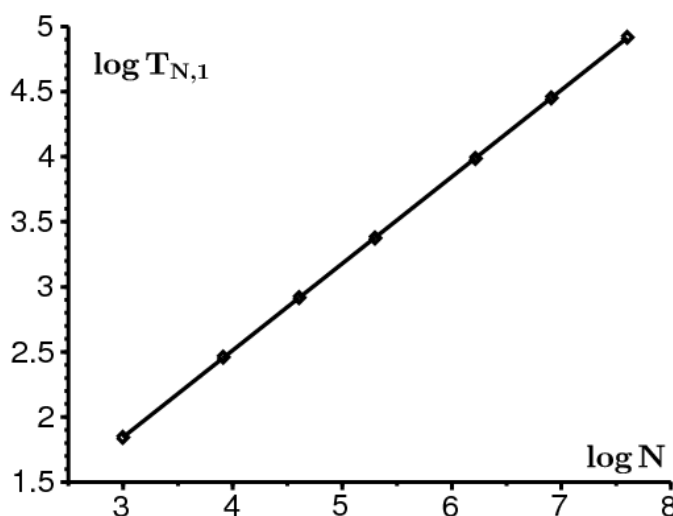
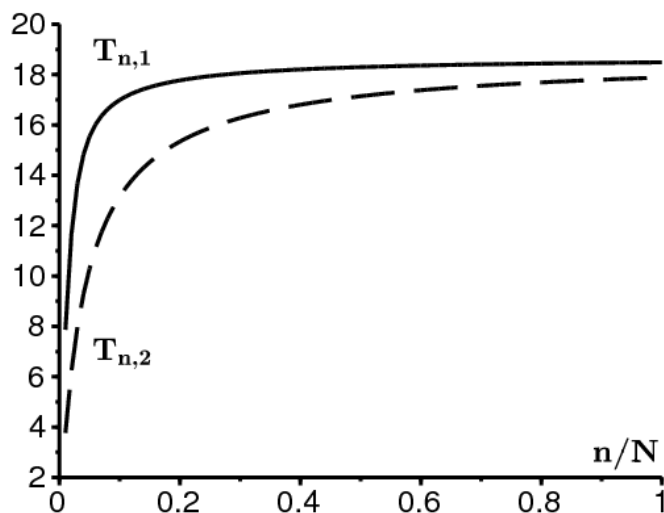
يمكن حل النظام الخطي (8) - (9) بالطريقة العددية المقدمة من (Artalejo et al., 2013). تستخدم الطريقة مصفوفات مربعة فقط من الترتيب 2 وتقل من عدم الاستقرار العددي. نذكر أن  $q_1 = q_2 = 1$  و  $b = 2$ .

**المثال الأول:**  $a_1 > a_2 > b$ . لناخذ  $a_1 = 10$  و  $a_2 = 5$ . ويبين الشكل 4  $T_{n,1}$  و  $T_{n,2}$  بالاعتماد على  $x = n/N$ . يقترح الشكل 4 ب أن متوسط وقت الانقراض، على سبيل المثال من الأشخاص المصابين بفيروس  $N$  في البيئة 1، يزداد بشكل كبير:  $T_{N,1} \approx e^{cN}$ . يعطي الانحدار الخطي  $c \approx 0.32$ . لاحظ ذلك  $c_1 \approx 0.81$  و  $c_2 \approx 0.32$ ، مما يوحي بذلك  $c = c_2$ .



الرقم 4 الشكل  $a_1 > a_2 > b$  الى  $T_{n,1}$  [خط صلب] و  $T_{n,2}$  [خط منقط] حسب  $n/N$  إذا  $N = 100$  ب)  $\log T_{N,1}$  بالاعتماد على  $N$ .

**المثال الثاني:**  $a_1 > b > a_2$  و  $R_0 > 1$ . لنأخذ  $a_1 = 5$  و  $a_2 = 1$ . لذا  $R_0 = 1.5 > 1$ . ويبين الشكل 5  $T_{n,1}$  و  $T_{n,2}$  بالاعتماد على  $x = n/N$ . ويبين الشكل 5 ب)  $\log T_{N,1}$  بالاعتماد على  $\log N$ . نحصل على خط مستقيم يقترح قانون السلطة  $T \sim \kappa N^\omega$ . المنحدر ، الذي تم الحصول عليه عن طريق الانحدار الخطي ، هو  $\omega \simeq 0.67$  ، في هذه الحالة ، لدينا  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{q_2}{b-a_2} - \frac{q_1}{a_1-b}$  ، والذي يتوافق بشكل جيد مع المنحدر المقاس.

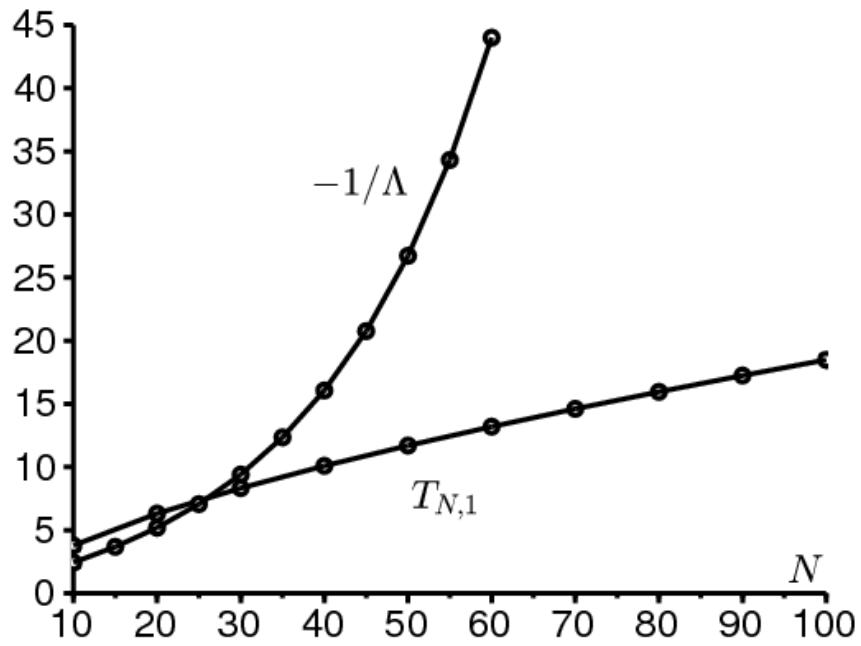


الرقم 5. الشكل  $a_1 > b > a_2$  مع  $R_0 > 1$  الى  $T_{n,1}$  و  $T_{n,2}$  بالاعتماد على  $x = n/N$  إذا  $N = 100$ . (ب)  
 $\log T_{N,1}$  بالاعتماد على  $\log N$ .

## 8 ملاحظات

### مقارنة بالحالة الدورية.

لإبراز الفرق بين البيئة العشوائية والبيئة الدورية ، دعنا نأخذ الحالة  $a_1 = 5$  و  $a_2 = 1$  بينما  $q_1 = q_2 = 1$  و  $b = 2$ . ثم  $u_1 = u_2 = 0.5$  : تتفق البيئة في المتوسط نصف الوقت في الحالة 1 ، والنصف الآخر في الحالة 2. يوضح الشكل 6 على جانب واحد كيف  $T_{N,1}$  يزيد كدالة لـ  $N$  كقانون سلطة. من ناحية أخرى ، ضع في اعتبارك نموذج SIS نفسه ولكن في بيئة دورية (Bacaër, 2015): دعنا نختار  $T = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$  ،  $0 < t < u_1 T \cup a(t) = a_1$  و  $u_1 T < t < T \cup a(t) = a_2$ . بالنسبة لهذا النموذج ،  $e^{\Lambda T}$  هو مضاعف فلوكت المرتبط بعملية الانقراض. يوضح الشكل 6 كيف  $1/\Lambda$  ينمو بشكل كبير مع  $N$ .



الشكل 6. متوسط الوقت للانقراض  $T_{N,1}$  في بيئة عشوائية و  $-1/\Lambda$  في بيئة تشبه دورية.

معادلات المجال المتوسطة. قد يكون من المفيد أن نتذكر باتباع (Bacaër and Ed-Darraz, 2014) أن متوسط معادلات المجال

$$\frac{dI_1}{dt} = a_1 I_1 \left(1 - \frac{I_1}{N}\right) - b I_1 - q_1 I_1 + q_2 I_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = a_2 I_2 \left(1 - \frac{I_2}{N}\right) - b I_2 - q_2 I_2 + q_1 I_1,$$

بمجرد أن تصبح خطية بالقرب من حالة التوازن  $(0,0)$  ، تؤدي إلى المصفوفة اليعقوبية

$$\begin{pmatrix} a_1 - b - q_1 & q_2 \\ q_1 & a_2 - b - q_2 \end{pmatrix}.$$

ولكن يمكن أن يكون لدينا في نفس الوقت

- قيمة ذاتية إيجابية تمامًا ، بحيث يكون التوازن التافه غير مستقر ،
- $R_0 < 1$ .

**حد آخر.** النتائج التي تم الحصول عليها تعتبر أن المعلمات  $q_j$  ،  $a_j$  و  $b$  يتم إصلاحها بينما  $N$  تتقارب إلى ما لا نهاية. الأمور تختلف بشكل واضح إذا على سبيل المثال  $q_1$  و  $q_2$  تتلاقى إلى ما لا نهاية ، بنسبة ثابتة  $q_1/q_2$ . ثم يقتررب النموذج من نموذج متجانس في بيئة ثابتة بمعامل اتصال متوسط  $\bar{a} = a_1 u_1 + a_2 u_2$ .

**القضية دون الدرجة.** لم نعالج القضية دون الدرجة  $R_0 < 1$  مع  $a_1 > b > a_2$  أو آخر  $a_1 > a_2 > b$ . سلوك متوسط وقت الانقراض يكون تقريبياً هو نفسه كما هو الحال في بيئة ثابتة: بدءاً من جزء ثابت من السكان المصاب ، يكون متوسط الوقت من ترتيب  $\log N$  (دورينج وآخرون ، 2005). بدءاً من جزء مصاب  $N/I$  ، يتقارب متوسط الوقت على عكس ذلك إلى حد. في حالة البيئة العشوائية ، هذا أيضاً ما تقترحه المحاكاة الرقمية.

## 9 سلسلة ماركوف مع عدد محدود من الدول

مع  $J$  تذكر أن المولد اللامتناهي  $Q$  مثل هذا  $Q_{j,j} = -\sum_{i=1}^J Q_{i,j}$  للجميع  $j$ . افترض أن هذه المصفوفة  $Q$  غير قابل للاختزال وذاك  $a_1 > a_2 > \dots > a_J$ . إذا  $a_J > b$  ، ثم يزيد متوسط وقت الانقراض بشكل كبير تقريبياً مع حجم  $N$  من السكان ، بمعدل  $c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J)$ . والواقع أن الانقراض هو على الأرجح في البيئة  $J$ .

إذا ، من ناحية أخرى  $b > a_J$  و  $R_0 > 1$  ، ملاحظة  $\pi_{n,j} \simeq y_j(x)$  مع  $x = n/N$  على مقربة من  $x = 0$  يصبح النظام (16) -

$$0 \simeq (b - a_j) \frac{d}{dx} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} y_k. \quad (38)$$

البحث عن حل  $y_j = \theta_j x^{\omega-1}$  مع  $\omega > 0$  و  $\theta_j > 0$  لكل  $j$ ، نجد

$$0 \simeq \omega(b - a_j) \theta_j + \sum_{k=1}^J Q_{j,k} \theta_k$$

$1 \leq j \leq J$  مع  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  لدينا مشكلة القيمة الذاتية المعممة  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  مع  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J)$ .

سوف نظهر

$$\exists! \omega > 0, \quad Q\theta = \omega(A - B)\theta, \quad \theta_j > 0 \forall j.$$

$D = A - B$  هي مصفوفة قطرية. لأي عدد حقيقي  $q$ ،

$$\mu(s) = \max\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(Q - sD)\}.$$

$Q - sD$  كل معاملاته خارج القطر تكون موجبة أو صفرية. بالإضافة إلى ذلك، هذه المصفوفة غير قابلة للاختزال. وفقاً للنتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius (سميث، 1995، النتيجة الطبيعية 3.2)،  $\mu(s)$  هو قيمة eigenvalue بسيطة  $Q - sD$  (تسمى القيمة الذاتية السائدة) وهناك متجه ذاتي  $\phi(s)$  جميع مكوناتها إيجابية للغاية

$$(Q - sD)\phi(s) = \mu(s)\phi(s).$$

هذا eigenvector فريد من نوعه مع التطبيع

$$\sum_{j=1}^J \phi_j(s) = 1.$$

وفقاً للنتيجة الطبيعية نفسها، وجود ناقل  $\theta$  مع  $\theta_j > 0$  للجميع  $j$  و  $(Q - \omega D)\theta = 0$  في الواقع يساوي  $\mu(\omega) = 0$ . وبالتالي فإن السؤال هو إظهار أن المعادلة  $\mu(\omega) = 0$  مع  $\omega > 0$  لديها حل فريد.

فيما يتعلق بالوجود، نلاحظ أولاً أن المولد اللامتناهي  $Q$  يتوافق مع  $s = 0$ : لدينا  $\mu(0) = 0$  ونلاحظ  $u = \phi(0)$  المتجه الذاتي على اليمين. خط متجهه  $[1, \dots, 1] = \mathbf{1}$  هو المتجه الذاتي على يسار  $Q$  المرتبطة 0 eigenvalue. وهكذا

$$\mathbf{1}u = \sum_{j=1}^J u_j = 1.$$

وفقاً لنظرية اضطراب القيمة الذاتية البسيطة، الوظيفة  $\mu(s)$  يختلف في  $s = 0$  و

$$\mu'(0) = -\mathbf{1}Du.$$

لكن  $R_0 > 1$  ما يعادل  $\sum_{j=1}^J (a_j - b)u_j > 0$ . لذا  $\mu'(0) < 0$ . بالإضافة إلى ذلك، لدينا  $(Q/s - D)\phi(s) = (\mu(s)/s)\phi(s)$  للجميع  $s > 0$ . إذا  $s \rightarrow +\infty$ ، لدينا  $Q/s - D \rightarrow -D$ . من خلال استمرارية الطيف،

$$\mu(s)/s \rightarrow \max_j (-D_{j,j}) = \max_j (b - a_j) = b - a_J > 0.$$

لذا  $\mu(s) \rightarrow +\infty$  إذا  $s \rightarrow +\infty$ . لأن  $\mu(0) = 0$  و  $\mu'(0) < 0$ ، نستنتج أن هناك  $\omega > 0$  مع  $\mu(\omega) = 0$ .

أما عن التفرد، فلاحظ أولاً أن الوظيفة  $\mu(s)$  هو محدب. في الواقع، لجميع الأرقام الحقيقية  $\omega_1, \omega_2$  و  $0 < \varepsilon < 1$ ، نحن نرى ذلك  $\mu(\varepsilon\omega_1 + (1 - \varepsilon)\omega_2)$  هو القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة  $Q - \varepsilon\omega_1 D - (1 - \varepsilon)\omega_2 D$ . وفقاً لنظرية (كوهين، 1981)، فإن هذه القيمة الذاتية أقل من أو تساوي  $\varepsilon\mu(\omega_1) + (1 - \varepsilon)\mu(\omega_2)$ . هذا يثبت التحدب. افترض الآن أن هناك  $\omega_1 > \omega_2 > 0$  مع  $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = 0$ . لأن  $\mu(0) = 0$  ولأن  $\mu(s)$  هو محدب، نستنتج  $\mu(s) = 0$  ل  $0 \leq s \leq \omega_1$ . هذا يتناقض  $\mu'(0) < 0$ .



$A - B$  هي مصفوفة عكسية إذا  $a_j \neq b$  للجميع  $j$ . لذا  $Q\theta = \omega(A - B)\theta$  ما يعادل  $Q\theta = \omega(A - B)^{-1}Q\theta$ . لذا  $\omega$  هي القيمة الذاتية  $(A - B)^{-1}Q$  الجزء الحقيقي منها هو الأكبر.

وأخيراً تصبح المعادلة (36)

$$\lambda = -b \frac{\sum_{j=1}^J \pi_{1,j}}{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}}.$$

في البسط ، لدينا  $\pi_{1,j} \simeq \theta_j (1/N)^{\omega-1}$  في المقام ، لدينا

$$\sum_{n=1}^N \pi_{n,j} \simeq N\theta_j \int_0^1 x^{\omega-1} dx.$$

لذا  $1/\lambda - 1$  يزيد مع  $N$  باسم  $N^\omega$ .

من الممكن بلا شك تعميم مثل هذه النتيجة إذا كانت البيئة محكومة مثلاً بمعادلة تفاضلية عشوائية

$$d\xi = f(\xi(t)) + \sigma dB(t).$$

دعونا نحدد  $L^*$  عامل التفاضل

$$(L^*u)(\xi) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} (f(\xi)u(\xi)).$$

نفترض ذلك  $u(\xi)$  هو احتمال ثابت:

$$L^*u = 0, \quad u > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) d\xi = 1.$$

لذا ، في حالة معادلة لانجفين ، لدينا

$$f(\xi) = -k\xi, \quad k > 0, \quad u(\xi) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2}} e^{-k\xi^2/\sigma^2}.$$

نفترض أن معدل الاتصال  $a(\cdot)$  هي وظيفة قيد التشغيل  $\mathbb{R}$  مع  $\min a(\cdot) < b$  و

$$R_0 = \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt \right) / b = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) u(\xi) d\xi \right) / b > 1.$$

يزداد متوسط وقت الانقراض مع  $N$  كـ  $N^\omega$ ، أين  $\omega$  هو الرقم الموجب الوحيد الذي يستخدمه عامل التفاضل  $L^* - \omega[a(\cdot) - b]$  له قيمة eigenvalue تساوي 0. لتحذب هذه القيمة الذاتية كدالة لـ  $\omega$  انظر (كاتو ، 1982). لاحظ أن عامل التشغيل المساعد  $L^*$  هو

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + f(\xi) \frac{d}{d\xi}$$

و  $L1 = 0$  إذا 1 يدل على دالة ثابتة تساوي 1.

## 10 بيئة دورية وعشوائية

لنعد إلى حالة مجموعة محدودة من البيئات. نفترض الآن أن المولد اللامتناهي  $Q(t)$

- هي وظيفة دورية للفترة  $\mathcal{T}$
- هي وظيفة مستمرة أو مجزأة ،
- غير قابل للاختزال على الأقل على مدى  $t$ .

يأخذ النظام (4) - (5) الشكل  $\frac{dP}{dt} = M(t)P$  بعد (Bacaër ، 2015) ، ثم هناك زوجين واحد  $(\lambda, \pi)$  مع

•  $\lambda < 0$   
 •  $\mathcal{T}$  هي وظيفة دورية للفترة  $\pi(t) = (\pi_{n,j}(t))_{0 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$

•  $\lambda\pi(t) + \frac{d\pi}{dt} = M(t)\pi(t)$

•  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 1$

•  $1 \leq j \leq J$  و  $1 \leq n \leq N \cup \pi_{n,j}(t) > 0$

بالإضافة إلى ذلك ،

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \pi_{n,j}(t) = 0.$$

هناك أيضا وظيفة فريدة  $\mathcal{T}$  غير دورية  $u(t)$  مع

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad u_j(t) > 0, \quad \sum_{j=1}^J u_j(t) = 1.$$

بصفتنا (Bacaër and Ed-Darraz, 2014) ، نحدد

$$R_0 = \left( \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^J a_j u_j(t) dt \right) / b.$$

نخمن أنه إذا  $a_1 > \dots > a_J > b$  ، ثم يزيد متوسط وقت الانقراض مرة أخرى بشكل كبير مع  $N$  ، بمعدل

$$c_J = b/a_J - 1 - \log(b/a_J).$$

إذا ، من ناحية أخرى  $a_J < b$  لكن  $R_0 > 1$  التقريب  $\pi_{n,j}(t) \simeq y_j(t, x)$  يؤدي إلى التعميم (38) في محيط  $x = 0$

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} \simeq (b - a_j) \frac{\partial}{\partial x} (x y_j) + \sum_{k=1}^J Q_{j,k}(t) y_k.$$

حل النموذج  $y_j(t, x) = \theta_j(t) x^{\omega-1}$  مع وظيفة  $\theta(t) = (\theta_j(t))_{\mathcal{T}}$  الدورية ، يجب التحقق

$$\frac{d\theta}{dt} = (Q(t) - \omega D)\theta(t).$$

هناك رقم حقيقي واحد  $\mu(\omega)$  التي  $e^{\mu(\omega)\mathcal{T}}$  هو المضاعف المهيمن فلوكيت للنظام

$$\frac{dX}{dt} = (Q(t) - \omega D)X.$$

هذه المصفوفة هي وظيفة دورية للفترة  $\mathcal{T}$ . المعاملات خارج القطر موجبة أو صفرية. المصفوفة غير قابلة للاختزال على مدى  $t$ . يمكننا أن نظهر أن هناك فريدة من نوعها  $\omega > 0$  مع  $\mu(\omega) = 0$ . نستخدم كما هو الحال في القسم 9

- محذب  $\mu(\omega)$
- $\mu(0) = 0$
- $R_0 < 1$  إذا  $\mu'(0) = -\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbf{1} D u(t) dt < 0$
- $\mu(\omega) \rightarrow +\infty$  إذا  $a_J < b$ .

لاحظ أن محذب  $\mu(\omega)$  يتجلى ذلك ببساطة في تعميم حجة (كوهين ، 1981). نستعمل

- التقارب اللوغاريتمي لنصف قطر الطيف من المصفوفات مع المعاملات في مجموعة الدالات الصفرية أو المحدبة في  $\mathbb{C}$  ، لاحظ  $\mathbb{C}$  مستقر عن طريق الجمع والضرب والانتقال إلى الحد

(كينجمان ، 1961). في الواقع،  $Q(t)$  هي وظيفة دورية متواصلة مجزأة ، يمكن تناولها من خلال وظيفة الخطوة  $Q_k$  هي المصفوفة التقريبية خلال الفاصل الزمني  $(\tau_k, \tau_{k+1})$  ل  $k = 0, \dots, K-1$  مع  $\tau_0 = 0$  و  $\tau_K = T$ . إذا كانت هذه وظيفة الدرج ،  $e^{\mu(\omega)T}$  ستكون مساوية لنصف قطر الطيف لمنتج المصفوفات

$$e^{(Q_{K-1}-\omega D)(\tau_K-\tau_{K-1})} \times \dots \times e^{(Q_0-\omega D)(\tau_1-\tau_0)}.$$

وفقاً لـ (Cohen، 1981) ، فإن لكل من هذه المصفوفات معاملات في  $\mathbb{C}$ . لذا فإن منتج المصفوفات هو أيضاً مع معاملات في  $\mathbb{C}$ . نصف قطرها الطيفي هو محدب لوغاريتم في  $\omega$ .

لان

$$\lambda = -b \frac{\int_0^T \sum_{j=1}^J \pi_{1,j}(t) dt}{\int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi_{n,j}(t) dt},$$

نستنتج كما قبل ذلك  $1/\lambda$  - ربما يزيد مع  $N$  باسم  $N^\omega$ .

شكر وتقدير

تم تحفيز هذه المقالة من خلال اجتماع في معهد *Ciencias Matemáticas* في مدريد في أكتوبر 2014 ، من خلال محاضرات في جامعة تلمسان في مايو 2015 وندوة في جامعة نونوا دي لشبونة في يونيو 2015.

المراجع

- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herreño MJ (2013) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. *J Math Biol* 67 : 799–831
- Bacaër N, Ed-Darraz A (2014) On linear birth-and-death processes in a random environment. *J Math Biol* 69 : 73–90
- Bacaër N (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment. *J Math Biol* 71 : 491–511
- Bender CM, Orszag SA (1978) Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw Hill, New York
- Berman A, Plemmons RJ (1979) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York
- Coghburn R, Torrez WC (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J Appl Probab* 18 : 19–30
- Cohen JE (1981) Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially nonnegative matrix. *Proc Amer Math Soc* 81 : 657–658
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Gaveau B, Moreau M, Toth J (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett Math Phys* 37 : 285–292
- Kamenev A, Meerson B, Shklovskii B (2008) How colored environmental noise affects population extinction. *Phys Rev Lett* 101 : 268103
- Kato T (1982) Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and the type. *Math Z* 180 : 265–273
- Kingman JFC (1961) A convexity property of positive matrices. *Quart J Math Oxford Ser (2)* 12 : 283–284

- Lande R (1993) Risks of population extinction from demographic and environmental stochasticity and random c  
Am Nat 142 : 911–927
- Leigh EG (1981) The average lifetime of a population in a varying environment.  
J Theor Biol 90 : 213–239
- Ludwig D (1976) A singular perturbation problem in the theory of population extinction.  
SIAM–AMS Proceedings 10 : 87–104
- Maroni P (1997) Fonctions hypergéométriques, fonctions de Bessel.  
Éditions Techniques de l'Ingénieur, Paris
- Meerson B, Sasorov PV (2008) Noise–driven unlimited population growth.  
Phys Rev E 78 : 060103
- Nally I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model.  
Springer, Berlin
- Slatkin M (1978) The dynamics of a population in a Markovian environment.  
Ecology 59 : 249–256
- Sawyer S, Slatkin M (1981) Density independent fluctuations of population size.  
Theor Popul Biol 19 : 37–57
- Smith HL (1995) Monotone dynamical systems. American Mathematical Society, Providence