



HAL
open science

Calculs de structures basés sur la technique des Level Sets et la méthode de partition de l'unité

Mohammed Moumnassi, Éric Béchet, Salim Belouettar, Vincent François, Didier Quoirin, Michel Potier-Ferry

► **To cite this version:**

Mohammed Moumnassi, Éric Béchet, Salim Belouettar, Vincent François, Didier Quoirin, et al.. Calculs de structures basés sur la technique des Level Sets et la méthode de partition de l'unité. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01413832

HAL Id: hal-01413832

<https://hal.science/hal-01413832>

Submitted on 11 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Calculs de structures basés sur la technique des Level Sets et la méthode de partition de l'unité

M. Moumnassi ^{1/2}, E. Béchet ^{1/3}, S. Belouettar ², V. François ⁴, D. Quoirin ⁵,
M. Potier-Ferry ¹

¹ Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux UMR CNRS 7554
Université de Metz, Ile du Saulcy, F-57045 Metz Cedex 1, France
E-mail : mohammed.moumnassi@tudor.lu

² Laboratoire de technologies Industrielles, Centre de Recherche Public Henri Tudor
Esch-sur-Alzette 66, rue de Luxembourg L-4221 Esch-sur-Alzette, Luxembourg

³ Université de Liège, Département A&M, Bât B52/3, Chemin des chevreuils,
1 B-4000 Liège, Belgique

⁴ Université du Québec à Trois-Rivières, Canada, CP 500,
Trois-Rivières(Québec) G9A 5H7, Canada

⁵ Numerical Methods, Simulation Technology, Goodyear Technical Center,
L-7750 Colmar-Berg, Luxembourg

Résumé : L'objet de ce travail est la mise en œuvre d'une nouvelle approche qui évite certaines difficultés liées à la génération de maillage, pour but de libérer le maillage du respect scrupuleux des surfaces représentant la structure. L'approche envisagée s'appuie sur la méthode des éléments finis étendus XFEM basée sur le concept de partition de l'unité. L'idée principale extraite de cette méthode est effectivement d'utiliser une discrétisation de l'espace ambiant comme support des fonctions de forme et de réaliser des calculs de structures par éléments finis à l'aide de la technique de représentation de surfaces par des fonctions implicites (Level sets).

Mots clés: XFEM, Level Set, Conversion Explicite-Implicite, Représentation géométrique.

1. Introduction

Depuis une dizaine d'années, de nouvelles méthodes numériques, alternatives à la méthode des éléments finis, ont été développées. Celles-ci tendent toutes à contourner les difficultés liées au maillage en construisant une partie ou la totalité de l'approximation par d'autres approches que la discrétisation spatiale par éléments. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [1], basée sur la partition de l'unité [2] couplée à la technique des Level sets (courbes de niveau) [3]. Les deux techniques utilisées permettent de réaliser une représentation fonctionnelle du domaine indépendamment du maillage, tout en gardant la robustesse de la méthode des éléments finis. Ainsi, le choix de cette représentation consiste à modéliser le mouvement ou la déformation des surfaces de la structure en évitant de nombreuses et fastidieuses opérations de remaillage qui introduisent des difficultés numériques.

La méthode XFEM a pour intérêt, dans ce domaine, de s'affranchir des difficultés de maillage dues aux frontières entre le matériau et le vide. L'utilisation de Level Set capable de décrire des géométries complexes apparaît pour la 1ère fois dans l'article de Moës et al. [4] dans le cadre de l'homogénéisation, ils ont démontré certains avantages dans le cas d'utilisation d'une seule fonction Level Set par sa simplicité d'usage et dans la possibilité qu'elle puisse être dotée d'une stratégie de raffinement géométrique local pour objectif est de respecter le plus fidèlement possible la géométrie de la structure. Cependant, il existe tout de même des inconvénients à utiliser ce type de représentation. En effet :

- malgré le caractère très utile des différentes fonctions existantes représentant les entités géométriques de base (tels que : plan, cylindre, etc...), en plus de celles qui nous permettant de construire le Level Set par des opérations booléennes (intersection, union et différence), il n'est pas possible de représenter toutes les formes d'objets possibles.
- la représentation dépend fortement du raffinement du maillage utilisé pour construire le Level Set et donc relativement capable de bien préserver les angles et les arêtes des surfaces (construites par une seule fonction Level Set).

Afin d'augmenter ce panel de forme et de surmonter les difficultés de la représentation des singularités de nature géométrique (des structures contenant des coins, des rainures, des congés de raccordement, etc...), nous proposons une modélisation volumique d'objets géométriques 3D de la manière suivante :

- Décomposition de la surface frontière d'un objet CAO en faces
- Chaque face est associée à une fonction mathématique: géométrie exacte
- Chaque fonction mathématique (fonction paramétrique) est associée à un Level Set
- Représentation implicite de la géométrie par une technique de sous-découpage
- Imposition des conditions aux limites sur les surfaces représentées implicitement
- Calcul éléments finis par la méthode XFEM

2. Conversion d'une représentation paramétrique vers une représentation Level Set

Dans l'approche XFEM, la position d'un trou par exemple est indépendante de la topologie du maillage. Elle est basée sur la représentation de la matière par des courbes de niveau d'une fonction $\varphi(\underline{x}, t)$ où t est un paramètre décrivant l'évolution spatiale de la frontière. Une frontière $\Gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$ en mouvement peut être représentée par la fonction de niveau $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où $\Gamma(t) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 / \varphi(\underline{x}, t) = 0 \}$

Dans le cas du trou la fonction de Level Set est donnée par : $\varphi(\underline{x}, t) = \pm \min(\|\underline{x} - \underline{x}_c\| - r_c)$ avec \underline{x}_c est la position de l'origine et r_c est le rayon du trou, où le signe est positif (négatif) si x est à l'intérieur (extérieur) du contour défini par $\varphi(t)$, ce qui permet de définir un intérieur et un extérieur. La fonction de niveau est calculée aux nœuds et interpolée par les fonctions de forme en fonction de ses valeurs aux nœuds. Cependant cette représentation ne permet d'étudier que des formes représentables sous forme de fonctions Level Set connues de façon analytique, ce qui restreint les possibilités aux formes des surfaces complexes. Pour remédier à ce problème, il est tout-à-fait évident qu'il faut préférer la représentation implicite directement d'une fonction explicite. Afin de représenter une surface au moyen de Level Set, la distance par rapport à chaque point doit être calculée pour construire la fonction φ , ce qui peut se révéler relativement coûteux. Cependant, on peut imaginer de construire l'iso-zéro de la fonction de niveau en partant d'une courbe où d'une surface représentées par une fonction paramétrique et engendré des Level Sets de type "droite" en 2D et "plan" en 3D à l'intérieur des éléments du maillage. Cela signifie que la fonction de niveau sera approximée par des segments de droite en 2D et de plan en 3D à l'intérieur des éléments et par conséquent le Level Set résultant est interpolé entre les nœuds d'une bande de maillage qui contient le niveau zéro. Les figures suivantes (Figure 1) illustrent les Level Sets construits à partir des fonctions paramétriques de type sinusoidal :

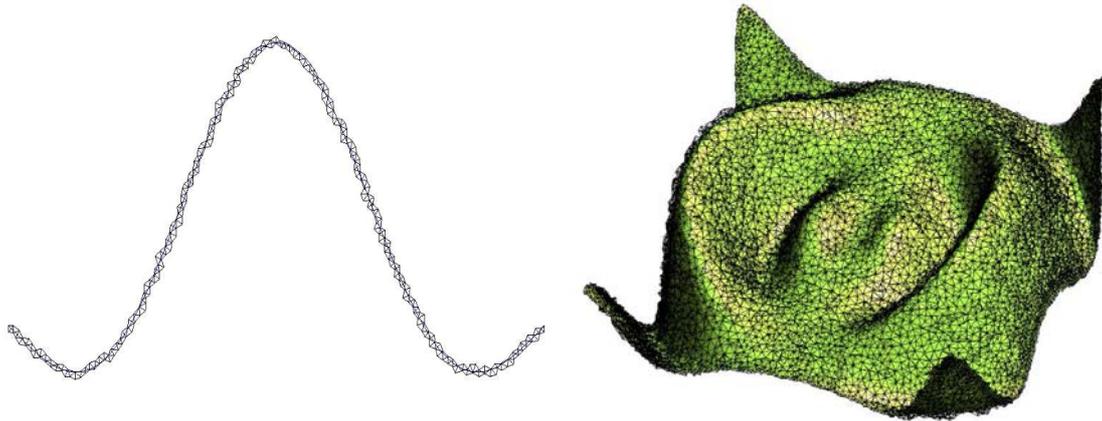


Figure 1: Exemple de Level Set complexe en 2D et 3D : interpolation effectuée sur une bande de maillage autour du niveau zéro.

3. Présentation de l'approche proposée pour représenter un objet implicitement

Les représentations géométriques proposées par Moës et al. [4] sont fondées par des frontières représentées par un unique Level Set, et la frontière résultante décrite par une combinaison de fonctions de base. Ce choix s'inscrit particulièrement bien pour une première approche en raison de la facilité que présente la mise en œuvre de cette méthode. Cependant, celle-ci est peu performante puisque des maillages relativement fins sont souvent nécessaires pour obtenir une représentation géométrique satisfaisante et n'est pas du tout adaptée pour représenter les bords et les arêtes des surfaces. De plus, la précision de la représentation des surfaces avec les éléments XFEM est fonction de la courbure de celles-ci.

Dans l'approche que l'on propose, consiste à :

- décrire chaque surface de la structure par un Level Set provenant d'une unique fonction
- interpoler la fonction de chaque Level Set avec les fonctions de forme du maillage d'une manière séparée
- traiter les intersections et le découpage des éléments de maillage par l'intermédiaire des Level Sets résultants
- combiner plusieurs Level Sets entre eux en appliquant des opérations booléennes (union, intersection et différence)

3.1 Modélisation des surfaces matériau-vide avec les éléments XFEM

Une application directe de la méthode XFEM concerne la modélisation des interfaces matériau-vide, cette extension permet la présence du vide et de la matière dans un élément du maillage. Dans ce cas particulier, le champ de déplacement doit prendre en compte une discontinuité (de type déplacement) au passage de l'interface, pour cela l'interpolation du champ va être modifiée en utilisant une fonction spécifique $V(x)$ prenant 0 comme valeur dans le vide et 1 dans la matière. Dans le cas particulier des interfaces matériau-vide, le champ est donné par la relation suivante :

$$u(x) = \sum_i u_i N_i V(x) \quad \text{avec} \quad V(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{matière} \\ 0 & \text{si } x \in \text{vide} \end{cases}$$

3.2 Intégration numérique par sous-découpage

L'intégration numérique des termes de rigidité et de second membre d'un élément traversé par une surface est réalisée par une technique qui consiste à sous-découper un élément de part et

d'autre de la surface. En conséquent, l'intégrale de l'élément XFEM est subdivisée en une somme d'intégrales sur les sous-éléments. Dans notre approche, l'ordre de découpage d'un élément de maillage dépend du nombre des Level Sets interpolés entre ses nœuds et cette découpe ne sert qu'à des fins d'intégrations, elle est purement virtuelle et aucun nœud n'est ajouté au maillage. Cette technique de sous-découpage pourrait être développée comme une amélioration de la technique la plus utilisée, qui consiste à augmenter le niveau de sous-découpage des éléments de maillage (c'est-à-dire sous-découpage des sous-éléments). Avec cette approche, plutôt que d'augmenter le niveau de raffinement du maillage pour représenter les détails de la structure, il est possible d'agir plus finement en utilisant plusieurs niveaux de sous-découpage. Chaque élément (ordre de sous-découpage 0) peut être découpé en sous-éléments (ordre de sous-découpage 1). Utiliser les sous-éléments reviendrait à utiliser des éléments plus petits (ordre de sous-découpage 2) et ainsi de suite. La (Figure 2) montre l'avantage de notre technique pour représenter correctement les détails d'une pièce (fichier CAD) d'une manière implicite indépendamment de la topologie du maillage.

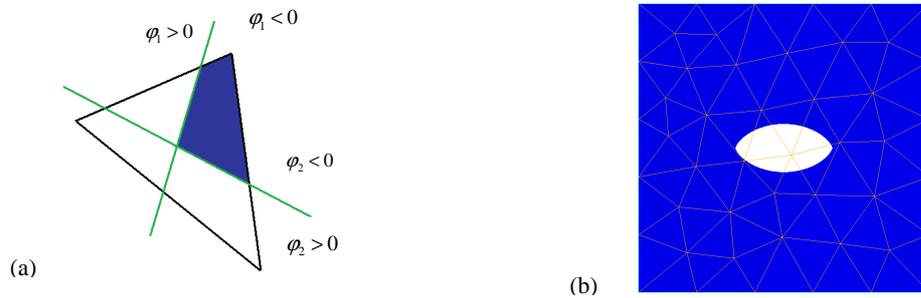
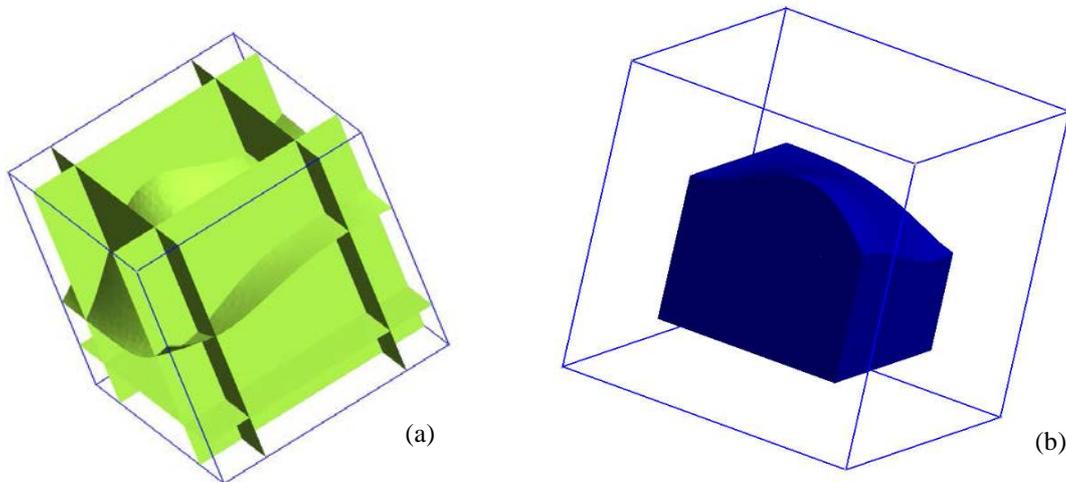


Figure 2: (a) Représentation du domaine à l'intérieur d'un élément par des opérations booléennes.
 (b) Représentation correcte du domaine (succession de Level sets de droite en 2D) :
 la courbure est idéalement représentée avec des éléments linéaires.

3.3 Exemples de représentation de formes avec plusieurs Level Sets

Le but de ces exemples est de montrer la capacité de l'approche utilisée pour remédier au problème de dépendance de la représentation au raffinement du maillage et pour représenter les bords et les arêtes des surfaces. La figure suivante (Figure 3) illustre le résultat de l'approche utilisée pour construire le domaine résultant par une combinaison des Level Sets en passant par les étapes décrites auparavant.



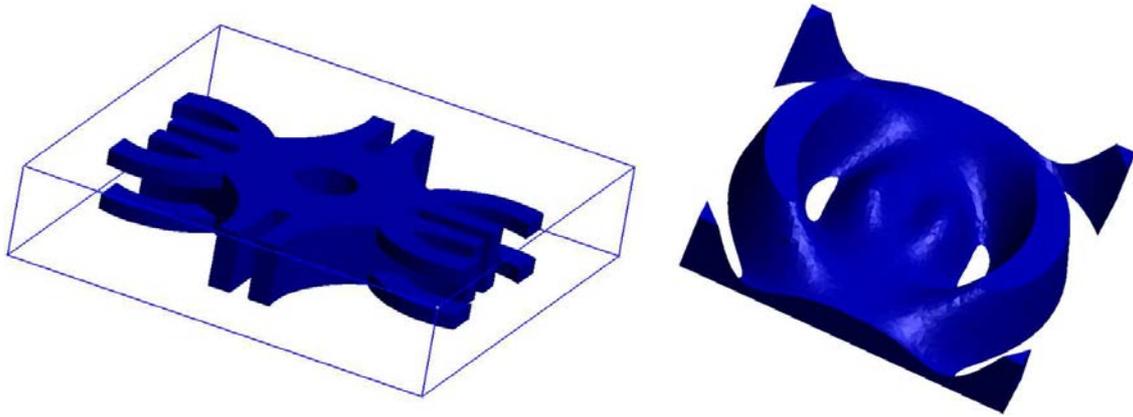


Figure 3: Représentation 3D des solides par combinaison de Level Sets, indépendamment de la topologie du maillage. (a) Les iso-zéro des Level Sets associés à chaque face de la structure
 (b) Représentation du domaine délimité par l'intersection des Level Sets

Après avoir introduit cette représentation implicite d'un objet complet, nous décrivons les étapes pour imposer les conditions aux limites sur la surface de l'objet, pour but d'effectuer le calcul éléments finis.

4. Imposition des conditions aux limites sur des surfaces représentée implicitement

L'imposition des conditions aux limites de type Neumann dans l'approche XFEM semble être bien maîtrisée et les ordres de convergence établis. Dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet nous utiliserons l'algorithme de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange proposé par Béchet et al. [5] dans le cadre de l'imposition de conditions de Dirichlet sur une interface. La figure ci-dessous montre l'imposition correcte des conditions aux limites sur des surfaces représentées par des Level Sets.

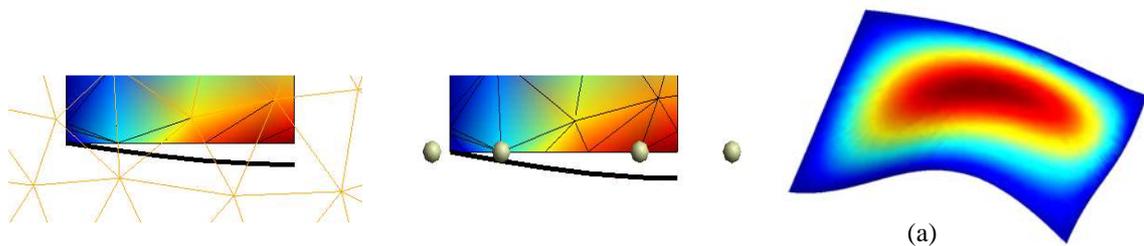


Figure 4: Illustration des endroits qui concerne l'intégration numérique de second membre et la restriction du choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange.

(a) Condition au limite délimité par les iso-zéro des autres Level Sets (face supérieure de la structure Fig. 3(b))

Après avoir introduit une représentation implicite d'un objet complet et imposer les conditions aux limites d'une manière correcte sur les surfaces de la structure, nous abordons l'étape finale de notre approche : réaliser les calculs éléments finis.

5. Validation de l'approche proposée par des calculs éléments finis

Le but de ce cas test est de valider la qualité de l'approche proposée au travers d'un exemple numérique tridimensionnel. Nous proposons d'étudier un problème de Poisson dans un cube unité avec une solution analytique connue. Les surfaces de la géométrie utilisée sont représentées implicitement et le calcul est réalisé indépendamment du maillage.

Les résultats en terme de convergence de l'erreur en énergie par rapport à l'énergie exacte et en potentiel par rapport à la solution exacte du problème sont représentés sur la figure ci-dessous :

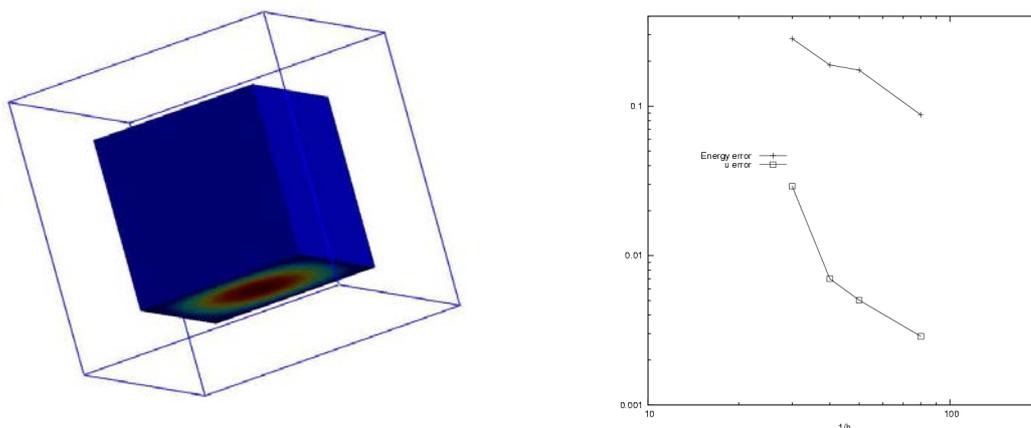


Figure 5: Solution du problème de Poisson en 3D et convergence de l'erreur en énergie et du potentiel.

Les taux de convergences calculés sont en bon accord avec ceux des éléments finis classique. Cependant, la méthode proposée montre une principale difficulté liée à l'imposition de deux types de conditions aux limites à l'intérieur d'un élément aux endroits des coins et les arêtes des surfaces.

6. Conclusions

Nous avons présenté une approche baptisée “*Calculs de structures basés sur la technique des Level Sets et la méthode de partition de l'unité*”, est considérée comme une extension de la méthode XFEM, dont les améliorations permettent un traitement complet d'un objet. Nous avons élargi les représentations disponibles des Level Sets en utilisant des fonctions paramétriques. Ensuite, nous avons présenté les performances de cette technique en terme de représentation des structures d'une manière implicite en 2D et 3D.

Les conditions aux limites sont mises en place de sorte que la simulation se fait en toute indépendance du maillage. Ensuite, la validation de cette approche a été réalisée sur un exemple numérique en 3D. Les résultats satisfaisants nous ont conduits à envisager de transcrire des fichiers CAD en Level Sets automatiquement pour objectif principal d'aller de la CAO vers le calcul.

Acknowledgments

This study has been supported by the Fond National de la Recherche FNR of Luxembourg. The first author would like to thank the Luxembourgish Ministry of Research for financing this research effort as AFR scholarship (07/070). We are also grateful to Gaston RAUCHS and Wael ZAKI of the Modelling and Simulation (ModSi) Unit CRP Henri Tudor for helpful discussions.

Références

- [1] Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 46, pp. 131-150, 1999
- [2] Melenck J. M., Babuska I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139, pp. 289-314, 1996
- [3] Osher S., Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics.* 79 (1), pp. 12-49, 1988.
- [4] Moës N., Cloirec M., Cartraud P., Remacle J.F., A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, pp. 3163-3177, 2003
- [5] Béchet E., Moës N., Wohlmuth B., A stable lagrange multiplier space for the stiff interface conditions within the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* Submitted