



**HAL**  
open science

# Identification non itérative de défauts par la méthode de sensibilité topologique en élastodynamique temporelle

Cédric Bellis, Marc Bonnet

## ► To cite this version:

Cédric Bellis, Marc Bonnet. Identification non itérative de défauts par la méthode de sensibilité topologique en élastodynamique temporelle. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01413784

**HAL Id: hal-01413784**

**<https://hal.science/hal-01413784>**

Submitted on 11 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Identification non itérative de défauts par la méthode de sensibilité topologique en élastodynamique temporelle

C. Bellis<sup>1</sup>, M. Bonnet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides (UMR 7649 CNRS)  
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex  
{bellis,bonnet}@lms.polytechnique.fr

---

**Résumé** — L'identification de défauts dans un solide élastique est étudiée par la méthode de sensibilité topologique dans un cadre dynamique transitoire récemment développé. Cette méthode, qui permet de construire de façon non itérative un indicateur de la présence de défauts, est d'abord mise en œuvre dans un cadre éléments finis 2D et 3D. L'étude paramétrique de ces résultats permettra d'évaluer l'efficacité de cette approche et de démontrer sa simplicité d'utilisation. Enfin une nouvelle formulation permettant d'étendre cette méthode à l'identification de fissures sera présentée.

**Mots clés** — Diffraction inverse, Sensibilité topologique, Méthode de champ adjoint

---

## Introduction

Soit  $\Omega_{\text{vrai}}$  un solide élastique borné dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ) par la surface extérieure  $S$  et caractérisé par le module de cisaillement  $\mu$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et la masse volumique  $\rho$  et contenant un défaut  $B_{\text{vrai}}$ . On définit ainsi le solide de référence  $\Omega$  sans défaut, de sorte que  $\Omega_{\text{vrai}} = \Omega \setminus B_{\text{vrai}}$ . L'identification du défaut est fondée sur la mesure  $u_{\text{obs}}$  sur une partie  $S_{\text{obs}} \subset S$  du champ de déplacement élastodynamique  $u_{\text{vrai}}$  correspondant à l'application temporelle d'un chargement sur  $\Omega_{\text{vrai}}$ . Une mesure de l'écart entre  $\Omega_{\text{vrai}}$  et un domaine test  $\Omega_{\text{test}}$  est définie au moyen d'une fonction coût  $\mathbb{J}$  dépendant de la durée  $T$  de l'expérience

$$\mathbb{J}[\Omega_{\text{test}}, T] = \int_0^T \int_{S_{\text{obs}}} \varphi[u_{\text{test}}(\xi, t), \xi, t] d\xi dt$$

et exploitant les données ainsi que le champ élastodynamique  $u_{\text{test}}$ , correspondant au cas test, via une fonction d'écart  $\varphi$ . Le défaut  $B_{\text{vrai}}$  est ainsi recherché de façon à ce que  $\Omega_{\text{vrai}}$  minimise  $\mathbb{J}$ .

En considérant le défaut test infinitésimal  $B(x, \varepsilon) = x + \varepsilon \mathcal{B}$ , centré en  $x$ , et caractérisé par la forme du domaine unitaire  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ , la taille  $\varepsilon > 0$ , et définissant le solide  $\Omega(x, \varepsilon) = \Omega \setminus B(x, \varepsilon)$ , la dérivée topologique  $\mathbb{T}$  de  $\mathbb{J}$  est définie à travers le développement asymptotique :

$$\mathbb{J}[\Omega(x, \varepsilon), T] = \mathbb{J}[\Omega, T] + \eta(\varepsilon) |\mathcal{B}| \mathbb{T}(x, T) + o(\eta(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (1)$$

où  $|\mathcal{B}|$  est la mesure (volume) de  $\mathcal{B}$ , et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$ .

L'approche heuristique considérée ici, faisant suite à des travaux antérieurs pour des cas d'inclusions acoustiques [6, 4] ou de cavités élastiques [2], consiste à chercher  $\Omega_{\text{vrai}}$  là où le champ de dérivée topologique  $\mathbb{T}(x, T)$  atteint ses valeurs négatives extrémales, c.à.d. la où l'apparition d'un défaut infinitésimal induirait la plus forte décroissance de  $\mathbb{J}$ . La dérivée topologique  $\mathbb{T}(x, T)$  est ainsi utilisée comme indicateur local de la présence de défaut.

# 1 Formulation par la méthode de champ adjoint

Le champ de déplacement élastodynamique  $u_\varepsilon$  résultant du chargement dynamique du domaine  $\Omega(x, \varepsilon)$  qui peut être décomposé sous la forme  $u_\varepsilon = u + \tilde{u}_\varepsilon$ , où  $u$  est la réponse du domaine de référence  $\Omega$  et  $\tilde{u}_\varepsilon$ , la perturbation induite par la présence du défaut infinitésimal virtuel  $B(x, \varepsilon)$ , est solution du problème

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [C : \nabla \tilde{u}_\varepsilon](\xi, t) &= \rho \ddot{\tilde{u}}_\varepsilon(\xi, t) & (\xi \in \Omega(x, \varepsilon), 0 \leq t \leq T) \\ t[\tilde{u}_\varepsilon](\xi, t) &= -t[u](\xi, t) & (\xi \in \partial B(x, \varepsilon), 0 \leq t \leq T) \\ t[\tilde{u}_\varepsilon](\xi, t) &= 0 & (\xi \in S_N, 0 \leq t \leq T) \\ \tilde{u}_\varepsilon(\xi, t) &= 0 & (\xi \in S_D, 0 \leq t \leq T) \\ \tilde{u}_\varepsilon(\xi, 0) &= \dot{\tilde{u}}_\varepsilon(\xi, 0) = 0 & (\xi \in \Omega(x, \varepsilon)) \end{aligned} \quad (2)$$

où  $S_N$  et  $S_D$  représentent des parties de  $S$  où sont imposées des conditions de Neumann et de Dirichlet. Le vecteur traction  $t[w] = C : \nabla w \cdot n = \sigma[w] \cdot n$  étant associé au déplacement  $w$  et à la normale  $n$ , via le tenseur  $C$  du quatrième ordre représentant la loi de Hooke.

La perturbation induite par le défaut disparaissant avec celui-ci, i.e.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{u}_\varepsilon(\xi, t)\| = 0$ , la dérivée topologique définie par (1) peut être définie via le passage à la limite

$$\eta(\varepsilon) |\mathcal{B}| \mathbb{T}(x, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{S_{\text{obs}}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} [u(\xi, t), \xi, t] \tilde{u}_\varepsilon(\xi, t) d\xi dt \quad (3)$$

L'analyse asymptotique de (3) et (2) permet de montrer [3] que la dérivée topologique  $\mathbb{T}(x, T)$  de  $\mathbb{J}[\Omega_{\text{test}}, T]$  en  $\Omega_{\text{test}} = \Omega$  est donnée par

$$\mathbb{T}(x, T) = \{\sigma[\hat{u}] \star (A : \sigma[u]) + \rho \hat{u} \star \dot{u}\}(x, T), \quad \eta(\varepsilon) = \varepsilon^d \quad (4)$$

où  $d$  est la dimension d'espace,  $\hat{u}$  le champ adjoint défini par

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [C : \nabla \hat{u}](\xi, t) &= \rho \ddot{\hat{u}}(\xi, t) & (\xi \in \Omega, 0 \leq t \leq T) \\ t[\hat{u}](\xi, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} [u(\xi, T-t), \xi, T-t] & (\xi \in S_{\text{obs}}, 0 \leq t \leq T) \\ t[\hat{u}](\xi, t) &= 0 & (\xi \in S_N \setminus S_{\text{obs}}, 0 \leq t \leq T) \\ \hat{u}(\xi, t) &= 0 & (\xi \in S_D, 0 \leq t \leq T) \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \dot{\hat{u}}(\xi, 0) = 0 & (\xi \in \Omega) \end{aligned} \quad (5)$$

et  $A$  le tenseur de polarisation dépendant de la nature et de la forme du défaut infinitésimal utilisé dans l'analyse asymptotique. Ce tenseur est connu explicitement pour un certains nombre de cas [1, 2, 5, 6]. Dans le cas où le défaut infinitésimal est une cavité, le tableau 1 recense les tenseurs de polarisation exprimés en termes des tenseurs identité symétriques du quatrième et second ordres  $I_4^{\text{sym}}$  et  $I_2$ .

## 2 Mise en œuvre numérique

### 2.1 Identification de cavités

Les résultats présentés portent sur l'étude de l'identification de cavités ou d'inclusions contenues dans un domaine élastique unitaire carré ou cubique initialement au repos. Un modèle éléments finis contenant 1988 nœuds (version 2D) et 19683 (version 3D) a été utilisé pour produire une mesure  $u_{\text{obs}}$  sur l'ensemble de la surface extérieure du domaine. La face inférieure ( $x_2 = 0$ ) est encadrée tandis qu'un chargement uniforme en compression est appliqué sur la face supérieure durant un intervalle de temps  $0 \leq t \leq T$ . La dérivée topologique est calculée à partir de la relation

Défaut	Modèle	A
Cavité	2D - Contraintes planes	$\frac{1}{\mu(1+\nu)} \left( 2I_4^{\text{sym}} - \frac{2\nu^2 - \nu + 1}{2(1+\nu)(1-\nu)} I_2 \otimes I_2 \right)$
	2D - Déformations planes	$\frac{1-\nu}{\mu} \left( 2I_4^{\text{sym}} - \frac{1}{2(1+\nu)} I_2 \otimes I_2 \right)$
	3D	$\frac{3(1-\nu)}{2\mu(7-\nu)} \left( 5I_4^{\text{sym}} - \frac{1+5\nu}{2(1+\nu)} I_2 \otimes I_2 \right)$

Tableau 1: Tenseurs de polarisation

(4) et des données du tableau 1 en utilisant une fonction coût définie par une fonction d'écart aux moindres carrés sur  $S_{\text{obs}} \equiv S$  par

$$\Phi[u, \xi, t] = \frac{1}{2} \|u - u_{\text{obs}}(\xi, t)\|^2$$

Deux types de représentations sont utilisés pour l'exploitation des résultats numériques : d'une part les valeurs négatives du champ de dérivée topologique  $\mathbb{T}(x, T)$ , et d'autre part la région  $\Omega(\alpha) = \{x \in \Omega \mid \mathbb{T}(x, T) \leq \alpha \min_{\xi \in \Omega} \mathbb{T}(\xi, T)\}$  de  $\Omega$  où  $\mathbb{T}(x, T)$  atteint des valeurs négatives jugées suffisamment grandes (c.à.d. inférieures au seuil  $\alpha \min_{\xi \in \Omega} \mathbb{T}(\xi, T)$  choisi).

Notons que l'évaluation du champ  $\mathbb{T}(x, T)$  ne nécessite le calcul que du champ libre  $u$ , et du champ adjoint  $\hat{u}$ , tous deux définis sur le domaine de référence  $\Omega$  sans défaut. Cette méthode d'inversion, qualitative par nature, est ainsi beaucoup plus rapide qu'une méthode quantitative d'optimisation itérative.

Ces résultats (Figures 1, 2 et 3) mettent en évidence une identification qualitativement correcte du défaut au moyen de la dérivée topologique relative à l'ajout d'une cavité infinitésimale. Ce type de résultats ainsi que ceux disponibles dans d'autres études [5, 2, 6, 4] démontrent l'utilité de la dérivée topologique comme indicateur de défaut.

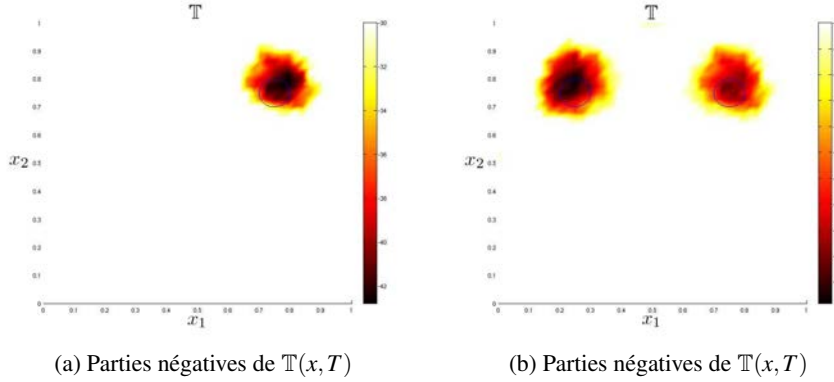


Figure 1: Identification bidimensionnelle d'une seule cavité (gauche) ou de deux cavités (droite)

## 2.2 Identification étendue aux inclusions

Les résultats présentés ici sont issus de la mise en œuvre du calcul du gradient topologique relatif aux cavités afin d'identifier des inclusions. Ces inclusions sont caractérisées par le module de cisaillement  $\mu^* = \bar{\mu} \cdot \mu$ , le coefficient de Poisson  $\nu^* = \nu$  et la masse volumique  $\rho^* = \rho$ . L'étude est limitée aux cas où  $\bar{\mu} \leq 1$  (i.e. inclusions moins rigides que le milieu de référence).

Au vu des résultats (Figure 4) obtenus, l'extension de la méthode à ce type de configuration est satisfaisante. Le cas d'inclusions rigides n'étant pas abordable avec la formulation relative aux cavités, il convient d'utiliser une formulation spécifique à l'ajout d'une inclusion infinitésimale rigide conduisant à l'obtention d'un nouveau tenseur de polarisation.

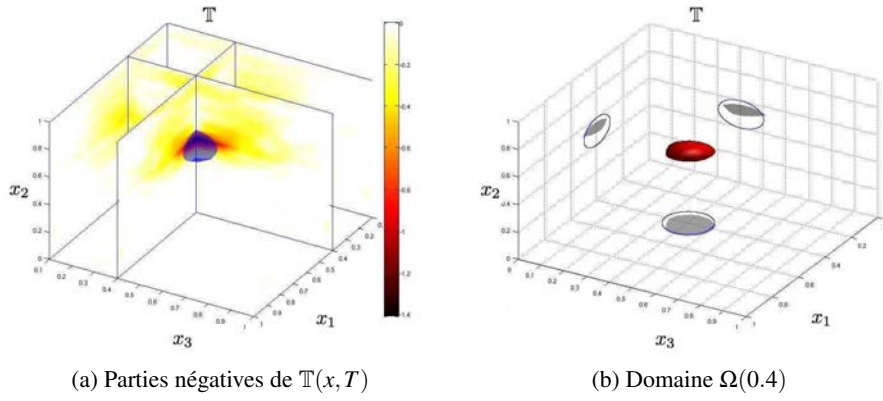


Figure 2: Dérivée topologique tridimensionnelle pour une seule cavité

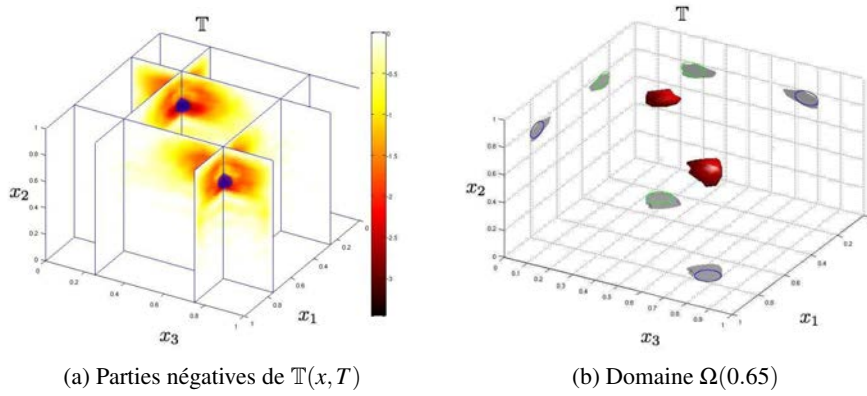


Figure 3: Dérivée topologique tridimensionnelle pour deux cavités

### 2.3 Facteurs limitants pour l'identification

Considérons l'identification d'une cavité dans le contexte établi précédemment. Nous nous attachons à présenter des cas où l'identification est affectée par certains paramètres, le nombre de points d'observation, puis l'utilisation de données bruitées, afin d'attester de la relative robustesse de ce type d'inversion.

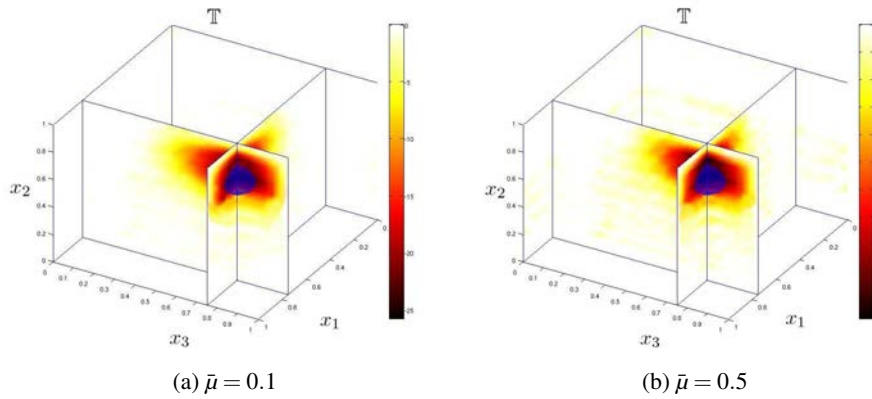


Figure 4: Parties négatives de  $\mathbb{T}(x, T)$

**Observation limitée.** Les résultats présentés (Figure 5) sont relatifs à la mise en œuvre de l'identification d'une cavité grâce à des mesures obtenues sur la surface  $S_{\text{obs}} \equiv S$  discrétisée en une grille de  $N \times N$  points.

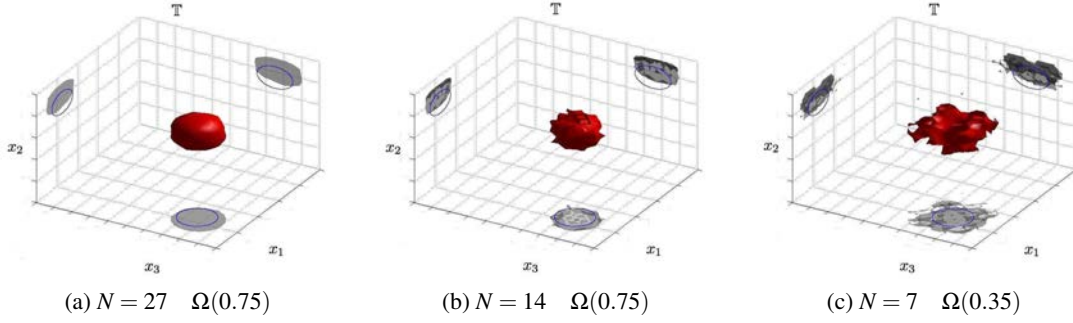


Figure 5: Effets liés à une observation limitée

**Données bruitées.** Ces résultats (Figure 6) utilisent des mesures la frontière  $S$  du domaine qui ont été corrompues par un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma$  relativement à l'amplitude des mesures.

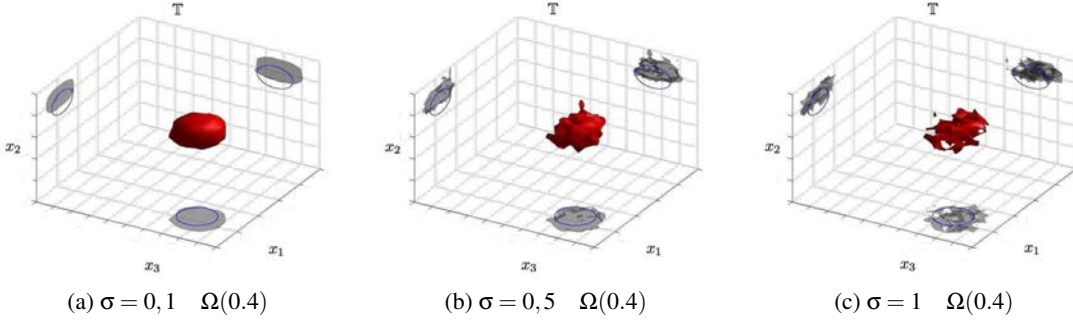


Figure 6: Effets liés à des données bruitées

### 3 Formulation pour l'identification de fissure

Dans le cas tridimensionnel ( $d = 3$ ), où le défaut  $B_{\text{vrai}}$  à identifier est une fissure, il convient de formuler la dérivée topologique (1) en employant une fissure infinitésimale. Pour cela on définit  $\Omega(x, \varepsilon) = \Omega \setminus \Gamma(x, \varepsilon)$ , où  $\Gamma(x, \varepsilon) = x + \varepsilon \bar{\Gamma}$  désigne une fissure centrée  $x$  de taille caractéristique  $\varepsilon$ , et de forme définie par la surface unitaire  $\bar{\Gamma}$ . La perturbation infinitésimale  $\tilde{u}_\varepsilon$  est maintenant solution du problème (2) où la condition aux limites sur la fissure s'écrit

$$t^\pm[\tilde{u}_\varepsilon^\pm](\xi, t) = -t^\pm[u](\xi, t) \quad (\xi \in \Gamma(x, \varepsilon)^\pm, 0 \leq t \leq T)$$

où  $\Gamma(x, \varepsilon)^\pm$  représentent les deux faces de la fissure associées aux normales extérieurs respectives  $n^\pm$  (telles que  $n^+ = -n^-$ ) et aux déplacements  $\tilde{u}_\varepsilon^\pm$ , tels que  $t^\pm[w^\pm] = C : \nabla w^\pm \cdot n^\pm$  sur  $\Gamma(x, \varepsilon)^\pm$ . La méthode de calcul de la dérivée topologique (1) par champ adjoint permettant de traiter de façon générique différents types de défaut, les équations (3,5) restant valides. La dérivée asymptotique obtenues après l'analyse asymptotique s'écrit

$$\mathbb{T}(x, T) = \{\sigma[\hat{u}] \star (A : \sigma[u])\}(x, T)$$

où, dans le cas d'une fissure circulaire plane de normale  $n$ , le tenseur de polarisation  $A$  est obtenu comme

$$A = \frac{8(1-\nu)}{3\mu}(n \otimes n \otimes n \otimes n)$$

La mise en œuvre de cette formulation pour l'identification de fissure circulaire plane (Figure 7) met en évidence sa pertinence pour l'identification qualitative de fissure.

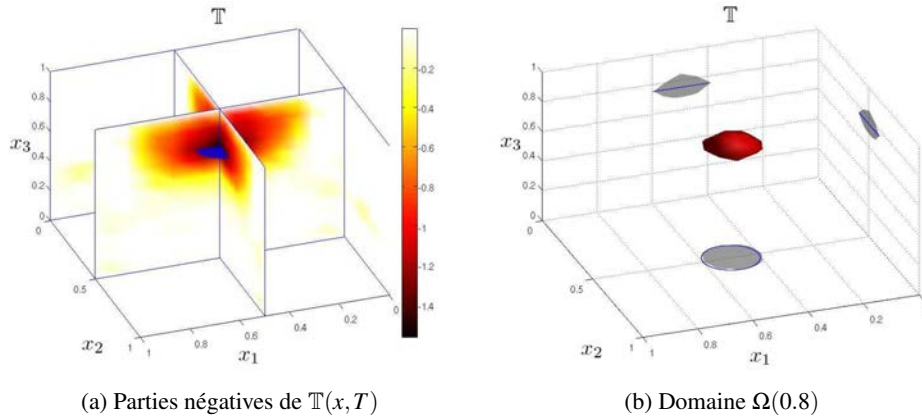


Figure 7: Identification d'une fissure circulaire plane horizontale

## 4 Conclusion

La mise en œuvre numérique, dans un cadre éléments finis standard, de l'approche temporelle de la méthode de sensibilité topologique permet de mettre en évidence l'efficacité de cette approche, son domaine de bon fonctionnement, et sa simplicité d'application. L'extension de la méthode à l'identification de fissures permet d'étendre le principe de l'approche non-itérative à une grande variété de défauts (cavités, inclusion, fissure). Notre approche (ainsi que d'autres récemment proposées telles que la *linear sampling method* [7]) montre ainsi que des indicateurs de défauts fiables, faciles à mettre en œuvre et très économiques en coût de calcul par rapport aux processus d'optimisation itératifs classiques sont maintenant disponibles.

## Références

- [1] H. Ammari, H. Kang *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. Lecture Notes in Mathematics 1846. Springer-Verlag (2004).
- [2] M. Bonnet, B. B. Guzina. Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Wiley, 2344-2373, 2004.
- [3] M. Bonnet. Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Elsevier, 5239-5254, 2006.
- [4] M. Bonnet, B. B. Guzina, N. Nemitz. Fast non-iterative methods for defect identification. *Rev. Eur. Mécanique Numérique*, Hermes Lavoisier, 571-582, 2008.
- [5] S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi. The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case. *J. Control Optim.*, SIAM, 1756-1778, 2001.
- [6] B. B. Guzina, M. Bonnet. Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics. *Inverse Problems*, IOP, 1761-1785, 2006.
- [7] S. Nintcheu Fata, B. B. Guzina. Elastic scatterer reconstruction via the adjoint sampling method. *J. Appl. Math.*, SIAM, 1330-1352, 2007.