HAL open science

Fiabilité dynamique des structures par une approche hybride et métamodèles robustes

Neji Rabhi, Mohamed Guedri, Hedi Hassis, Noureddine Bouhaddi

To cite this version:

Neji Rabhi, Mohamed Guedri, Hedi Hassis, Noureddine Bouhaddi. Fiabilité dynamique des structures par une approche hybride et métamodèles robustes. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01413782

HAL Id: hal-01413782

https://hal.science/hal-01413782v1

Submitted on 11 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Fiabilité dynamique des structures par une approche hybride et métamodèles robustes

N. Rabhi[1], M. Guedri[1], H. Hassis[2], N. Bouhaddi[3]

[1] Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Nabeul (IPEIN)
8000 M'rezgua, Nabeul - TUNISIE
neji.rabhi@ipein.rnu.tn
mohamed.guedri@isetn.rnu.tn

[2] Laboratoire de Génie Civil, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT)
BP 37, Le Belvédère 1002, Tunis - TUNISIE
hedi.hassis@enit.rnu.tn

[3] Institut FEMTO-ST, UMR 6174 – Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat,
24 Chemin de l'Epitaphe, 25000 Besançon - FRANCE
noureddine.bouhaddi@univ-fcomte.fr

Résumé – La modélisation mathématique du comportement d'un phénomène réel est un point essentiel pour mieux comprendre et si possible pour maîtriser ce phénomène. Cependant, Les informations disponibles sur les paramètres de conception des systèmes multiphysiques, leur géométrie, leur physique et les actions appliquées, sont souvent insuffisantes. Dans un contexte fiabiliste, la prise en compte des incertitudes sur ces paramètres est devenue incontournable dans une démarche de conception robuste. On rencontre, généralement des problèmes de modélisation des incertitudes pour connaître parfaitement le problème étudié, liés à l'insuffisance du modèle pour décrire les phénomènes physiques mis en jeu. La simulation de Monte Carlo reste l'outil le plus fiable pour la détermination de la probabilité de défaillance ses résultats sont la seule référence, mais elle est très coûteuse surtout pour les systèmes complexes comportant des modèles éléments finis de grandes tailles, des phénomènes multiphysiques couplés, de nombreux paramètres de conception ...

Dans ce travail, nous proposons un couplage de la méthode de fiabilité en dynamique avec des métamodèles (modèles condensés) pour bien mener des études de fiabilité et d'optimisation fiabiliste sur de tels systèmes.

En fonction de l'information disponible sur les paramètres de conception incertains, un modèle hybride combinant les approches possibiliste et probabiliste est envisagée dans ce travail pour la propagation des incertitudes dans le modèle.

La méthode proposée a été mise en œuvre et appliquée à des structures académiques pour les différents métamodèles. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats de référence utilisant la simulation directe de Monte Carlo. Ils ont permis de mettre en évidence la robustesse et l'efficacité de la méthodologie proposée pour le calcul de la fiabilité en dynamique des structures complexes.

Mots clés – approche hybride, dynamique des structures, fiabilité, métamodèle robuste.

1 Introduction

Dans le domaine de la fiabilité, la question que l'on se pose est comment obtenir un design avec un niveau de fiabilité acceptable vis à vis des informations disponibles sur les incertitudes des paramètres de conceptions ? Ces incertitudes peuvent être modélisés par un aléa probabilisable et dans certains cas où les informations sont insuffisantes on peut évaluer ces incertitudes à priori ou bien utiliser des paramètres intervalles [6]. L'objectif de cette modélisation est de construire des modèles théoriques ou numériques qui doivent représenter le plus fidèlement et le plus précisément possible la physique du phénomène étudié. La simulation de Monte Carlo est la solution la plus fréquemment utilisée pour propager les incertitudes en vue d'analyser la robustesse du comportement. Cependant deux problèmes se posent lors de l'utilisation de cette méthode dans une approche fiabiliste : le temps de calcul et la complexité de modélisation du problème mécanique. En effet, l'étude de fiabilité fait appel de nombreuses fois au calcul des réponses mécaniques, ce qui peut conduire à des coûts de calcul prohibitifs.

Ce travail se place dans la perspective de proposer des méthodes de calculs mécaniques efficaces pour l'analyse de fiabilité dont l'objectif est de gagner un ordre de grandeur sur le temps de calcul.

En effet, lors de la modélisation d'une structure ou d'un système mécanique, les sources d'erreurs proviennent généralement de la complexité du modèle étudié et de l'insuffisance des informations sur les paramètres de conception. Ces imperfections affectent inévitablement la réponse de la structure aux différentes sollicitations et par conséquent sa fiabilité. C'est pourquoi il s'avère primordial de prendre en compte ces imperfections dans le but d'améliorer la modélisation, et donc la qualité des modèles numériques. Pour ce faire, une première solution consiste à réaliser un couplage entre les méthodes fiabilistes en dynamique avec des métamodèles (surface de réponses [2, 3], modèles condensés [8]) surtout pour les structures complexes dont les modèles éléments finis sont de grandes tailles. D'autre part, quant les informations sur certains paramètres sont insuffisantes il est possible d'utiliser des aléas probabilistes pour modéliser ces paramètres et d'utiliser l'approche possibiliste pour la modélisation des autres paramètres, ce qui constitue la seconde solution, appelée méthode hybride qui est basée sur un couplage entre les approches possibiliste et probabiliste.

2 Métamodèles fiabilistes

L'objectif est d'améliorer les méthodes fiabilistes dans le but de réduire le temps de calcul requis par les résolutions fiabilistes en remplaçant le modèle initial (complet) par un modèle approché qui se base sur les paramètres les plus influents dans la réponse et qui est plus rapide à mettre en œuvre.

2.1 Méthodes fiabilistes

Méthodes d'approximations

Ces méthodes s'attachent à déterminer la probabilité de défaillance d'une structure dans des cas où une simulation directe de Monte Carlo (MC) serait très difficile à mettre en œuvre. Pour ce faire, quelle que soit la densité de probabilité des variables physiques aléatoires X, on se ramène toujours dans un espace où les variables (notées U) sont Gaussiennes, normées et centrées, c'est à dire de moyenne nulle et d'écart type unitaire.

La fonction de performance physique $G(X)$ est transformée en la fonction $H(U)$ dans l'espace normé (Figure 1).

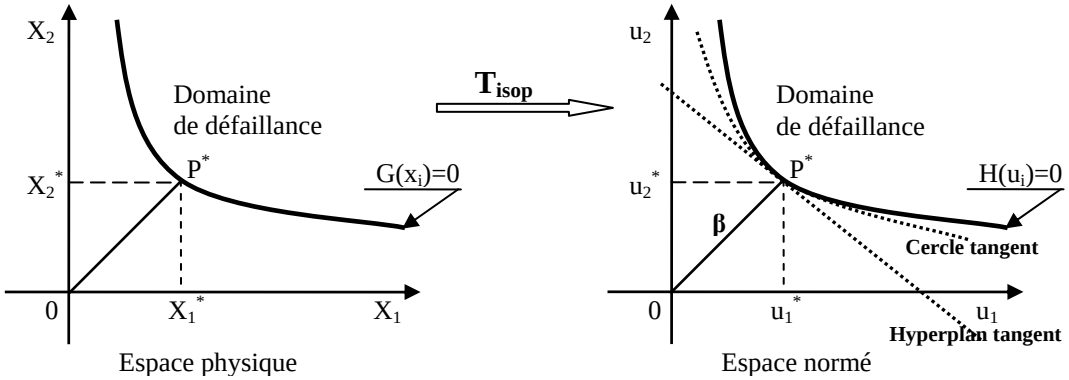

Figure 1 - principe des méthodes d'approximations FORM/SORM

Dans ce nouvel espace, ces techniques d'approximations sont appliquées pour se rapprocher de l'état-limite qui décrit le critère de défaillance. Classiquement la probabilité de défaillance est estimée par l'intermédiaire du calcul de l'indice de fiabilité β de Hasofer [9]. En effet on cherche le point P^*, appelé point de conception. Graphiquement l'indice de défaillance β est la distance OP^* indiquée sur la figure 1. Géométriquement l'indice de défaillance est définit comme étant le minimum de la distance de l'origine de l'espace des variables normées construit à la fonction d'état-limite $H(U)$, ce qui donne :

$$\beta = \min_{H(U)\leq 0} \sqrt{U^T.U} \tag{1}$$

Connaissant alors le point de conception, on peut évaluer la probabilité de défaillance :

- Soit par une approximation FORM du premier ordre [7] : en remplaçant la fonction d'état-limite par un hyperplan tangent au P^* (Figure 1).

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \tag{2}$$

- Soit par une approximation SORM de second ordre qui prend en compte les courbures principales de la fonction de performance, la fonction d'état-limite est approchée par une courbe plus riche au voisinage du point de conception P^* (Figure 1).

$$P_f = \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}(1+\beta k_i)^{-1/2} \tag{3}$$

Pour l'évaluation de la probabilité de défaillance à l'aide des méthodes d'approximation, on doit auparavant évaluer l'indice de défaillance β, c'est-à-dire déterminer le point de conception. Ce qui se traduit par un problème d'optimisation sous la contrainte suivante : trouver le point de conception P^* associé aux paramètres de la fonction d'état-limite dans l'espace normé $H(U)$ telle que $H(U) = 0$, qui minimise la distance OP^*.

Dans ce contexte, Plusieurs algorithmes ont été développés pour trouver efficacement le point de conception P^*. Citons celui de Rackwitz-Fiessler qui est basé sur le calcul des gradients de chaque variable [11, 12]. Il a été amélioré par Abdo [1] qui prend en compte les termes du second ordre. Connaissant les gradients, on peut alors estimer linéairement le point de

conception, et reprendre la même stratégie autour de ce nouveau point P^* jusqu'à la convergence.

2.2 Métamodèles

2.2.1 Modèle dynamique stochastique

Lorsqu'on attribut à des zones ou des sous-structures un niveau d'incertitude, l'équation d'équilibre stochastique de la structure amortie soumise à une excitation harmonique déterministe, s'écrit sous la forme :

$$\left(-\omega^2 M(\theta) + i\,\omega B(\theta) + K(\theta)\right) U(\omega,\theta) = f_e(\omega) \tag{4}$$

avec $M(\theta)$, $B(\theta)$ et $K(\theta)$, respectivement les matrices stochastiques de masse, d'amortissement et de raideur ; $U(\omega,\theta)$, le vecteur réponse stochastique du modèle et $f_e(\omega)$, le vecteur forces appliquées.
Ou encore :

$$\left[Z_0(\omega) + \Delta Z(\omega,\theta)\right] U(\omega,\theta) = f_e(\omega) \tag{5}$$

avec : $Z_0(\omega) = \left(-\omega^2 M_0 + (1+i\eta) K_0\right)$, la matrice moyenne de raideur dynamique ;

$\Delta Z(\omega,\theta) = \sum_{r=1}^{q} \left(-\omega^2 M_r + (1+i\eta) K_r\right) \xi_r$ la matrice stochastique de raideur dynamique.

L'équation (5) peut être réécrite sous la forme :

$$Z_0(\omega) U(\omega,\theta) = f_\Delta(\omega,\theta) + f_e(\omega) \tag{6}$$

$f_\Delta(\omega,\theta) = -\Delta Z(\omega,\theta) U(\omega,\theta)$ est le vecteur des forces aléatoires associées aux modifications inconnues de la structure initiale. La relation (6) est alors interprétée comme l'équation d'équilibre dynamique du modèle initial soumis aux sollicitations $f_\Delta(\omega,\theta)$.

Dans la pratique, la résolution du problème (6), utilisant la simulation de Monte Carlo, est très coûteuse. La condensation de ce modèle par une méthode de réduction standard s'avère insuffisante en terme de robustesse vis-à-vis des perturbations paramétriques. On propose alors d'utiliser une méthode de condensation dynamique adaptée aux modèles stochastiques [8].
Ainsi, la réponse dynamique du système perturbé (6) peut s'exprimer à l'aide d'une base de transformation standard T_0 obtenue à partir du modèle moyen, enrichie de résidus statiques R telle que :

$$U(\omega,\theta) \simeq T_0\, c(\omega,\theta) + R\, f_\Delta(\omega,\theta) \tag{7}$$

La base de réduction T est construite à l'aide de la base de condensation T_0 et des déplacements statiques $R\, f_\Delta$ associés à une suite de chargements statiques F_Δ représentatifs des perturbations $\Delta Z(\omega,\theta)$:

$$T = \left[T_0 \;\vdots\; \Delta T \right] \quad ; \quad \Delta T = R\, f_\Delta \tag{8}$$

La base de réduction T_0 est généralement une base de Ritz de type Craig-Bampton [4].

2.2.2 Condensation robuste vis-à-vis des incertitudes

Le modèle stochastique condensé par une base de réduction du modèle nominal T_0 s'écrit, dans le domaine fréquentiel, sous la forme :

$$Z_0^c(\omega)\, U^c(\omega,\theta) = f_\Delta^c(\omega,\theta) + f_e^c(\omega) \tag{9}$$

$Z_0^c(\omega) = T_0^T Z_0(\omega) T_0 = \left(-\omega^2 M_0^c + (1+i\eta) K_0^c\right)$ est la matrice moyenne de raideur dynamique condensée; $f_\Delta^c(\omega,\theta) = -\Delta Z^c(\omega,\theta)\, U^c(\omega,\theta)$ est le vecteur condensé des forces stochastiques ; $f_e^c(\omega)$, le vecteur condensé des forces appliquées.

Dans la configuration d'interfaces bloquées de Craig-Bampton, la base de Ritz s'exprime sous la forme :

$$U = \begin{Bmatrix} U_j \\ U_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_j & 0 \\ \Psi & \Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j \\ c \end{Bmatrix} \tag{10}$$

où : $c \in \mathbb{R}^{p,1}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{i,j}$, $\Theta \in \mathbb{R}^{i,p}$ sont respectivement le vecteur des coordonnées généralisées et les bases statique et dynamique. La base statique $\Psi = -K_{0ii}^{-1} K_{0ij}$ correspond aux modes contraints et la base dynamique Θ correspond aux $\boldsymbol{p}$ premiers modes normaux à interfaces bloquées.

Une alternative pour rendre plus robuste la base de réduction (10) et l'analyse dynamique des modèles stochastiques nettement moins coûteuse, consiste à étendre la transformation T_0 donnée par l'équation (8). La correction $\Delta T = E\left\{R\; f_\Delta(\theta)\right\}$ est la variation inconnue due au terme stochastique ΔZ (E présente le 1er moment). La base de réduction enrichie se met alors sous la forme :

$$U = T\, U^c = \left[\begin{array}{cc:c} I_j & 0 & 0 \\ \Psi & \Theta & R_\Delta \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_j \\ c \\ f_\Delta \end{Bmatrix} \tag{11}$$

La base de force associée aux modifications stochastiques est générée par l'approximation :

$$f_\Delta(\omega,\theta) \approx -\Delta Z(\omega,\theta)\, U_0(\omega) \tag{12}$$

Pour chaque zone stochastique (i), on définit une sous base de force $F_{\Delta i}$ à partir des propriétés modales initiales (Y, Λ) et des matrices de raideur et de masse des zones stochastiques $K_i(\theta)$ et $M_i(\theta)$:

$$F_{\Delta i}(\theta)=\left[F_{\Delta i}^{K} \mid F_{\Delta i}^{M}\right]=\left[\sum_{r=1}^{q} K_r^i\, \xi_r(\theta)\, Y \;\middle|\; \sum_{r=1}^{q} M_r^i\, \xi_r(\theta)\, Y\, \Lambda\right] \tag{13}$$

On obtient la base de force représentative de l'ensemble des modifications stochastiques par concaténation des sous bases $F_{\Delta i}(\theta)$ et on construit finalement la base des vecteurs statiques aléatoires :

$$R_{\Delta}(\theta)=R\,F_{\Delta}(\theta) \tag{14}$$

avec : $R=K_0^{-1}-Y\,\Lambda^{-1}Y^T$ la matrice des résidus statiques du modèle nominal.

3 Méthode hybride

Dans le cadre d'élaboration des nouvelles techniques de simulation qui permettent l'amélioration de la fiabilité de systèmes mécaniques aux différentes étapes de leur processus de conception. Un modèle hybride repose sur l'utilisation de toutes les informations disponibles sur les paramètres incertains dans le but de mise en place un concept plus large regroupant probabilité et possibilité pour la propagation des incertitudes (figure 3). En particulier dans le domaine de la fiabilité, ce modèle hybride consiste à utiliser parallèlement, la théorie de probabilité (Statistique bayésienne) lorsqu'il s'agit des informations insuffisantes sur les paramètres, et la théorie de possibilité (arithmétique des intervalles) lorsque l'on ne dispose que d'informations sur les bornes des paramètres (min, max).

3.1 Formulation probabiliste

L'approche bayésienne permet d'améliorer l'estimation du taux de défaillance en fonction d'un jugement d'expert. Rappelons que la statistique bayésienne s'appuie en premier temps sur les lois de probabilité a priori sur les variables étudiées, puis la mise à jour de ces lois de probabilité en les combinant avec les données. Pour cela, on utilise la formule de Bayes pour tout événement A :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap H_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A\mid H_i)\,P(H_i) \tag{15}$$

Cette formule signifie que pour déterminer la probabilité de *A*, il suffit simplement de déterminer les probabilités de *A* sachant chacune des hypothèses H_i et les probabilités de H_i. Or :

$$P(A\cap H_i)=P(A\mid H_i)\,P(H_i)=P(H_i\mid A)\,P(A) \tag{16}$$

D'où :

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\,P(A\mid H_i)}{P(A)} \tag{17}$$

En exprimant $P(A)$ par la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i)} \tag{18}$$

Ainsi, se donnant une distribution de probabilité a priori sur les événements H_i, on peut déterminer par l'observation de l'événement A la distribution a posteriori de l'événement H_i sachant la réalisation de A. Par construction, l'approche bayésienne permet donc d'intégrer une connaissance experte énoncée sous la forme de lois de probabilité a priori L'interprétation des résultats d'une analyse bayésienne est simple et directe, et porte sur l'ensemble des variables inconnues.

En effet, pour un phénomène aléatoire de densité de probabilité $f_{\Theta}(x)$ dépendante du paramètre Θ. Après n observations, on disposera donc d'un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de taille n. Les observations étant indépendantes et de même loi, la densité de l'échantillon (notée $L_{\Theta}(x_1, \cdots, x_n)$) est le produit des densités :

$$L_{\Theta}(x_1, \cdots, x_n) = f_{\Theta}(x_1)\, f_{\Theta}(x_2) \cdots f_{\Theta}(x_n) \tag{19}$$

La méthode bayésienne consiste à supposer que le paramètre Θ est une variable aléatoire de densité de probabilité $\pi_0(\theta)$ appelée densité a priori de Θ. Même si cette hypothèse est fausse (comme la moyenne de la loi par exemple), cette technique permet d'intégrer dans l'estimation du paramètre Θ une connaissance a priori sur sa valeur, et le but de l'estimation bayésienne servira à modifier cette connaissance en fonction des données observées [10]. Pour cela, on considère que la densité de l'échantillon $L_{\Theta}(x_1, \cdots, x_n)$ est une densité conditionnelle sachant la valeur du paramètre Θ, c'est-à-dire que pour $L_{\Theta}(x_1, \cdots, x_n)$ est la densité conditionnelle de l'échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ sachant que $\Theta = \theta$.

La formule de Bayes permet alors de calculer la distribution a posteriori $\pi(\theta)$ sachant les observations du phénomène, puisque :

$$\pi(\theta) = \frac{L_{\theta}(x_1, \cdots, x_n)\pi_0(\theta)}{\int L_{\theta}(x_1, \cdots, x_n)\pi_0(\theta)\, d\theta} \tag{20}$$

L'estimation de la valeur du paramètre θ s'obtient alors par calcul de l'espérance de Θ pour la distribution a posteriori, soit :

$$\hat{\Theta} = \int \theta\, \pi(\theta)\, d\theta \tag{21}$$

3.2 Formulation possibiliste

L'estimation par intervalle d'un paramètre inconnu θ consiste à calculer, à partir d'un estimateur, les bornes d'un intervalle contenant vraisemblablement la valeur correspondante du paramètre. L'intervalle est défini par une ou deux limites (θ_{inf} et θ_{sup}) auxquelles est associée une certaine probabilité, fixée à l'avance, de contenir la valeur vraie du paramètre.

Les bornes θ_{inf} et θ_{sup} sont fonction des observations, donc elles sont aléatoires, et encadrent la vraie valeur du paramètre, inconnue, avec une probabilité $(1-\alpha)$ fixée a priori.

La quantité $(1-\alpha)$ s'appelle niveau de confiance de l'intervalle. En réalité, les bornes étant aléatoires, l'estimateur est compris dans cet intervalle avec la probabilité $(1-\alpha)$ lorsque l'on recueille une infinité d'échantillons d'observations.
Dans le domaine de la fiabilité, d'après Cremona [5] il y a une ressemblance entre la théorie des possibilités et celle de probabilité. En conséquence, pour la détermination de la possibilité de défaillance Π_f.
D'une part on doit normaliser l'espace (Figure 2) et d'autre part if faut déterminer le point de conception.

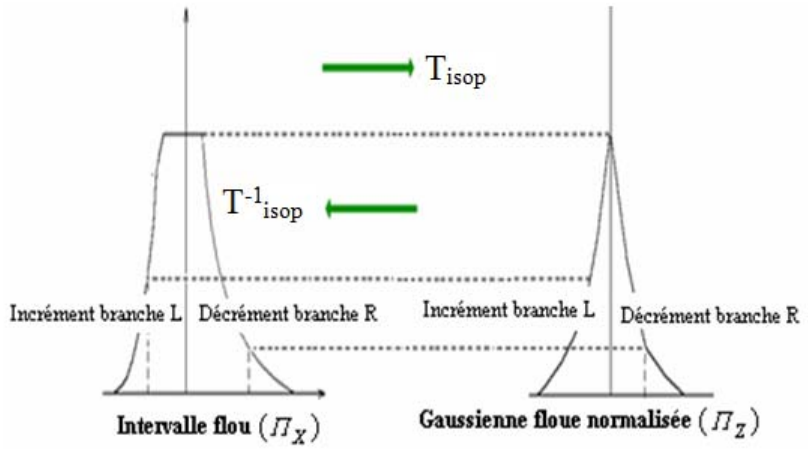

Figure 2 - Normalisation de l'espace physique

Comme dans le cas l'approche probabiliste, considérons un état limite Z :

$$Z = g\left(X_1, \ldots, X_n\right) \tag{22}$$

La possibilité de défaillance est défini par :

$$\Pi_f = \Pi\left(Z \leq 0\right) \tag{23}$$

En appliquant la transformation T_{isop} [5], on peut exprimer la possibilité de défaillance directement en terme de variables floues Gaussienne normalisés :

$$\Pi_f = \Pi\left(g\left(\{X\}\right)\right) = \Pi\left(g\left(\mathrm{T}_{isop}^{-1}\left(\{u\}\right)\right)\right) = \Pi\left(g_u\left(\{u\}\right)\right) \tag{24}$$

Selon la théorie des possibilités [13], on détermine le point de conception avec les coordonnés $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ par :

$$\Pi_Z = \pi_1\left(u_1^*\right) = \pi_2\left(u_2^*\right) \tag{25}$$

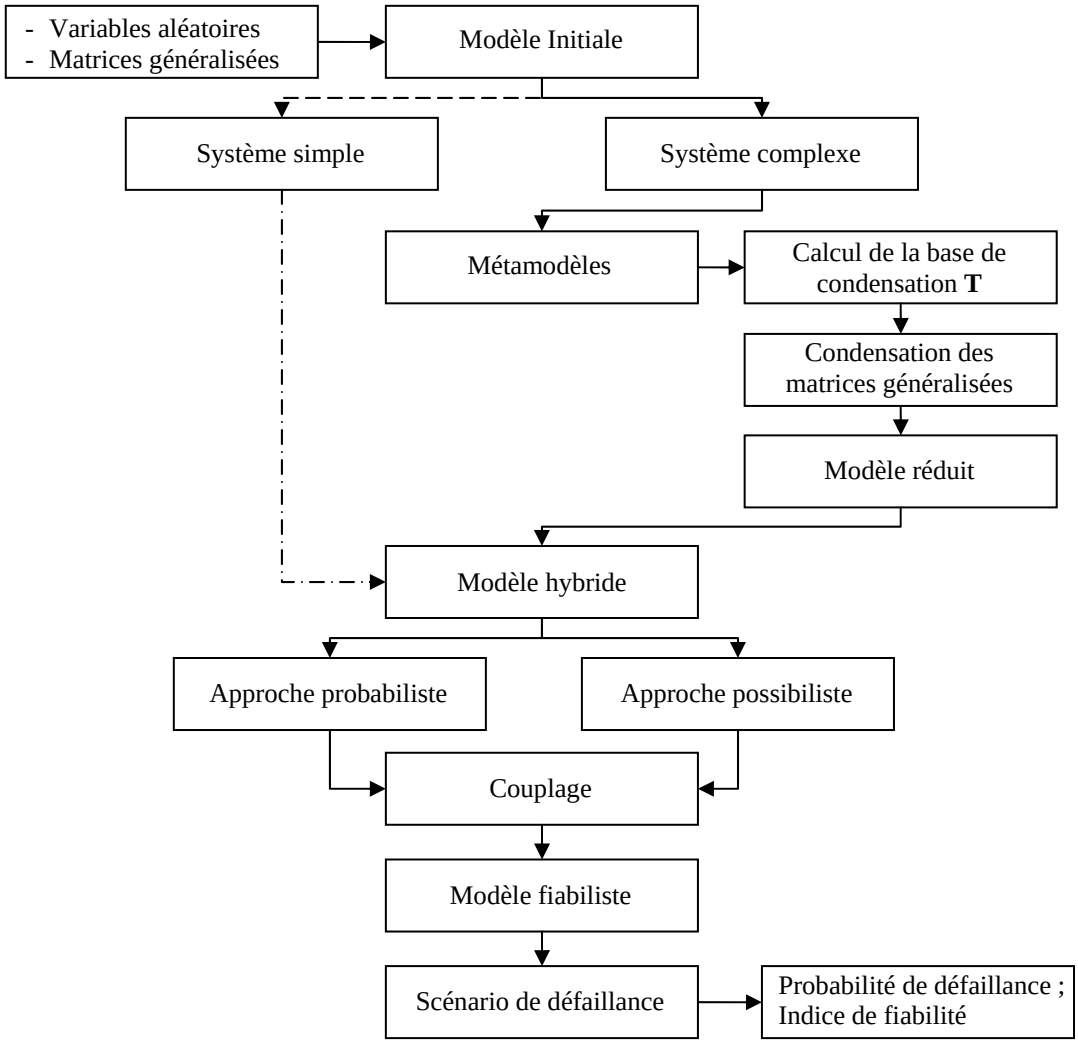

Figure 3 – Approche hybride en fiabilité

4 Simulations numériques

4.1 Exemple 1

Dans cette simulation, l'étude concerne la validation du couplage entre l'approche probabiliste et l'approche possibiliste (approche hybride).

L'exemple proposé est une structure portique (Figure 4) discrétisée par des éléments finis poutres 2D (3 ddls par nœud U_x, U_y, θ_z). Le modèle éléments finis comporte 36 ddls. L'analyse dynamique est réalisée dans la bande fréquentielle [0–10 Hz] fixée a priori et comportant les 8 premiers modes propres. La structure est soumise à une force d'excitation localisée au nœud N_f. Le point d'observation de la réponse est choisi au noeud N_0 (Figure 4).

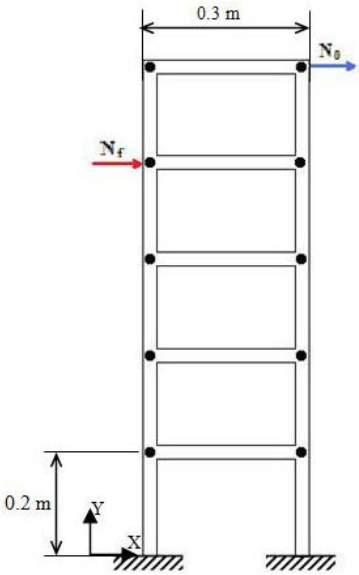

Figure 4 - Portique à plusieurs étages

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont groupées dans le tableau 1.

b(m)	h(m)	Aire (m^2)	E_0 (N /m^2)	ρ_0 (Kg/m^3	ν
25×10^{-3}	36×10^{-3}	b×h	2.1e11	7800	0.3

Tableau 1 - Caractéristiques géométriques et mécaniques

Pour définir le problème de la fiabilité, considérons l'état-limite du portique sous la contrainte de déplacement (seuil=1mm). Alors l'état-limite de ce problème peut se traduire sous la forme :

$$G = d - \left|\delta u\left(x\right)\right| \tag{26}$$

4.1.1 Exploitation de la méthode intervalle

Toutes les paramètres sont considérés comme des variables gaussiennes floues ($x = \left(\mu_x, \alpha_x, \beta_x\right)_{LR}$) et sont groupés dons le tableau 2.

Variable	Moyenne (μ)	Ecart-type (σ)	Intervalle
E(N /m^2)	2.1e11	10 %	[-3 σ, 3σ]
F(N)	1	10 %	[-3 σ, 3σ]
H(mm)	36	10 %	[-3 σ, 3σ]
D(mm)	1	10 %	[-3 σ, 3σ]

Tableau 2 - Variables intervalles

En utilisant l'expression de la réponse, l'état limite s'écrit sous la forme suivante :

$$G = d - \left(-\omega^2 M + \left(1 + j\eta\right) K\right)^{-1} F \tag{27}$$

$G(E,F,h,d)$ est un incrément en fonction de d, E, et h, mais un décrément en fonction de F. En utilisant la proposition 1 dans [13], l'état-limite devient :

$$\begin{aligned} G &= \mu_d + \alpha_d u_d - \ldots \\ &\left(-\omega^2 M\left(\mu_h + \alpha_h u_h\right) + \left(1 + j\eta\right)\left(\mu_E + \alpha_E u_E\right) K\left(\mu_h + \alpha_h u_h\right)\right)^{-1} \times F\left(\mu_F + \beta_F u_F\right) \end{aligned} \tag{28}$$

Et d'après la loi de signe [13], on trouve $u^* = u_F = -u_h = -u_E = -u_d$, ensuite on transforme l'état limite en variable u^* et finalement la résolution de l'équation obtenu nous permet d'obtenir l'indice de fiabilité et la possibilité de défaillance (équation 25).

Les résultats obtenus par les trois méthodes ; simulation directe de Monte Carlo, SORM et arithmétique des intervalles sont reportés dans le tableau 3. Le temps de calcul de la méthode des intervalles est inférieur aux autres méthodes et sa précision est comparable à la simulation de référence Monte Carlo.

Méthodes	Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité	Temps
Monte Carlo	6.1035e-004	3.234	100 %
SORM	7.1136e-004	3.190	19 %
Intervalles	1.5653e-005	3,326	8 %

Tableau 3 - possibilité de défaillance

4.1.2 Exploitation de l'approche hybride

Les variables aléatoires (h, F, et d) traitées ici sont de même nature que celles considérées en 4.1.1, mais pour le module d'Youg E, on suppose que les informations disponibles sont insuffisantes. Alors, on suppose que $E_{moy} = E_0$ et pour estimer l'erreur possible, choisissons une probabilité assez grande $1-\alpha$ (par exemple entre 0.9 et 0.99) telle qu'un évènement de probabilité $1-\alpha$ puisse être considéré comme certain et déterminons la valeur ε pour laquelle on a :

$$P\left(\left|E_0 - E\right| < \varepsilon\right) = 1 - \alpha \tag{29}$$

Cette égalité signifie qu'avec une probabilité égale à $1-\alpha$, l'intervalle aléatoire $\left[E_0 - \varepsilon, E + \varepsilon\right]$ contiendra la valeur inconnue du paramètre E. Une estimation de cet intervalle, appelé intervalle de confiance de niveau de confiance $1-\alpha$, sera alors $\left[E_0 - \varepsilon, E + \varepsilon\right]$. Et finalement, pour approcher l'intervalle ou bien la valeur ε, grâce au théorème central limite, à chaque itération on obtient une nouvelle valeur de ε en se basant sur la connaissance qu'on a supposé (connaissance à priori).

Méthodes	Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité	Temps
Monte Carlo	6.1035e-004	3.234	100 %
Intervalles	1.5653e-005	3,326	7 %
Hybride	1.4945e-005	3,333	14 %

Tableau 4 - Possibilité de défaillance et probabilité de défaillance

Les résultats obtenus dans le tableau 4, montre la robustesse de l'approche hybride, ainsi que son avantage pour la résolution du problème de l'insuffisance des informations sur certains

paramètres, au prix d'un coût de calcul supplémentaire limité en comparaison avec la méthode intervalles.

4.2 Exemple 2

Dans cette simulation, l'étude a pour objectif la validation de la méthode de couplage entre les méthodes fiabilistes et les métamodèles.

La structure considérée (Figure 5) est un assemblage rigide de deux plaques planes en L. Son modèle éléments finis contient 2695 degrés de liberté (ddls). Cette structure est divisée en deux sous-structures. Le modèle de la sous-structure 1 contient 1650 ddls dont 55 ddls de jonction et celui de la deuxième sous-structure contient 1100 ddls dont 55 ddls de jonction. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont groupées dans le tableau 5.

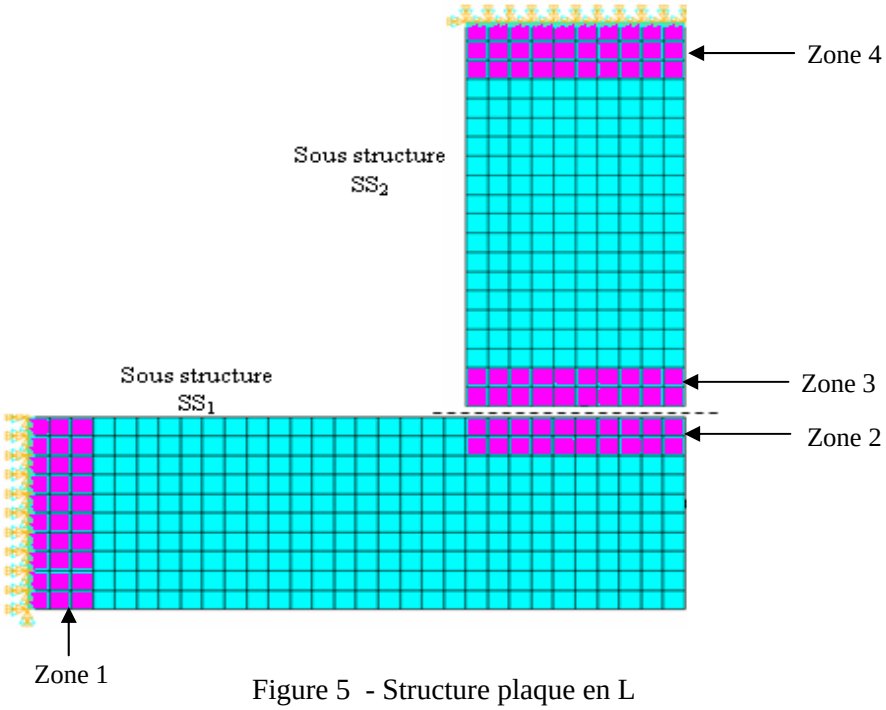

Figure 5 - Structure plaque en L

	Module d'Young [N/m^2]	Coefficient de Poisson	Densité [Kg/m^3]	Epaisseur [mm]	Longueur [mm]	Largeur [mm]
SS_1	70.3x10^9	0.345	2750	2	60	20
SS_2	70.3x10^9	0.345	2750	2	20	40

Tableau 5 : Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure plaque en L

On considère la structure avec les incertitudes sur des variables aléatoires par zone (Tableau 6).

Par la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton (CB), le modèle initial à 2695 ddls est ramené à un modèle condensé à 164 ddls (57 ddls de SS1, 52 ddls de SS2, 55 ddls de jonctions). Après l'enrichissement de la base de transformation de Craig-Bampton par 30 résidus statiques aléatoires, on obtient un nouveau modèle condensé robuste à 194 ddls (CBE).

La figure 6 représente la réponse fréquentielle exacte et celle du modèle réduit. L'examen de ces résultats montre que l'utilisation d'une base CBE permet une bonne représentation dynamique dans la bande de fréquence [0 – 200 Hz] fixée a priori. La qualité du modèle réduit CBE par rapport à la référence est également mise en évidence par la courbe de différence de

réponses représentée sur la même figure.

Variables		Valeur Moyenne	Coefficient de variation
Module d'Young (N/m^2)	E1	70.3×10^9	10 %
	E2	70.3×10^9	10 %
	E3	70.3×10^9	10 %
	E4	70.3×10^9	10 %
Epaisseur (mm)	h1	2	5 %
	h2	2	5 %
	h3	2	5 %
	h4	2	5 %
Densité (kg/m^3)	P1	2750	10 %
	P2	2750	10 %
	P3	2750	10 %
	P4	2750	10 %
Seuil de déplacement (mm)	d	[0.2 - 1]	10 %
Fréquence tolérable pour mode n°1 (Hz)	Fréq	[6 - 10]	10 %
Force (N)	F	1	10 %

Tableau 6 - Variables aléatoires

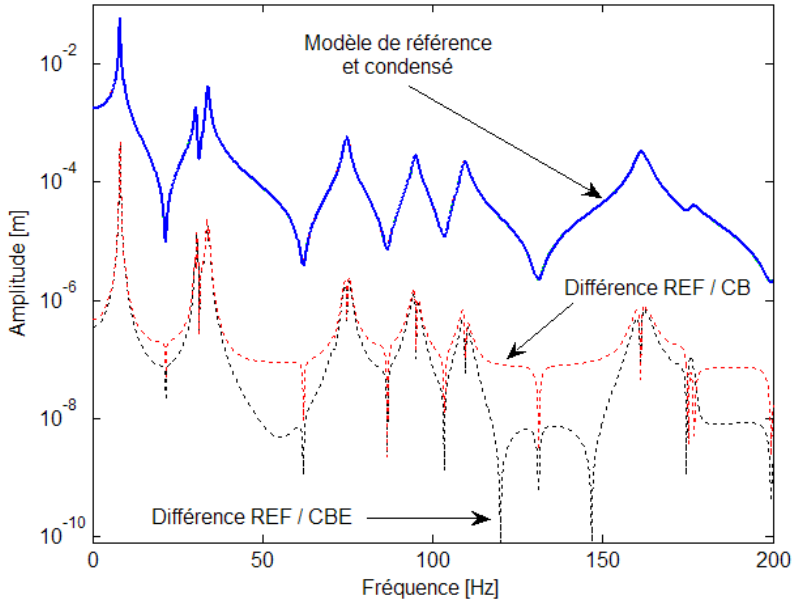

Figure 6 - Réponse fréquentielle exact et réduit

4.2.1 Contrainte sur le déplacement : 1er scénario de défaillance

Pour ce scénario le problème de défaillance est définie comme la probabilité dans la quelle le déplacement de la plaque due à la force d'excitation est plus petit qu'un seuil de déplacement d = 1mm. La simulation numérique conduit aux résultats présentés dans les tableaux 7 et 8.

Méthodes	Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité	Temps
Monte Carlo (Modèle de référence)	4.6476e-007	4.906	100 %
Métamodèle CB	4.1141e-004	3.345	7 %
Métamodèle CBE	5.0418e-007	4.890	8 %

Tableau 7 - Probabilité de défaillance

Méthodes	Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité	Temps
Monte Carlo	4.6476e-007	4.906	100 %
SORM	6.66909e-007	4.8346	22 %
Métamodèle CBE+SORM	6.83648e-007	4.8297	2 %

Tableau 8 – Performance du couplage Métamodèle-SORM

On compare dans les tableaux (7, 8), les probabilités de défaillance calculés par les deux métamodèles (CB et CBE) et ceux de la référence obtenues par MC. La méthode CBE donne une précision très satisfaisante, en comparaison avec la méthode standard de CB qui a un niveau de prédiction plus limité.

La figure 7 montre l'influence de la variation du déplacement tolérable sur la probabilité de défaillance en utilisant le couplage entre les méthodes fiabilistes et métamodèle. Dans cette simulation apparaît un résultat logique : la probabilité de défaillance diminue quand le déplacement diminue. De plus, le couplage entre la méthode SORM et le métamodèle donne une bonne approximation en comparaison avec les résultats de la simulation de Monte Carlo. D'autre part, la figure 8 illustre la variation de l'indice de fiabilité en fonction du déplacement.

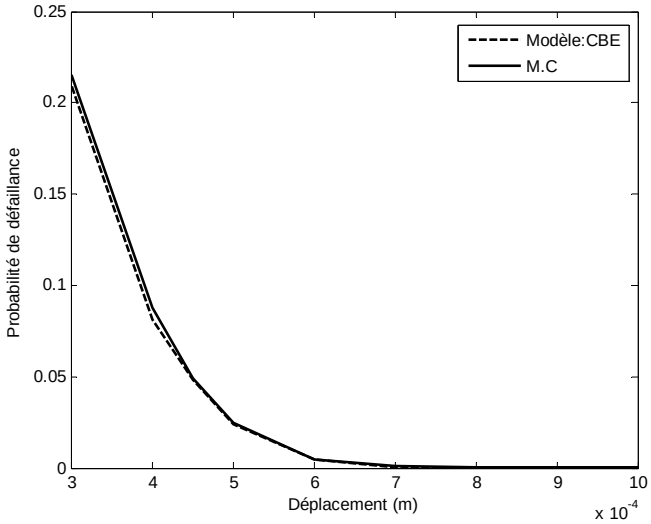

Figure 7- Evolution de la probabilité de défaillance pour différents déplacements

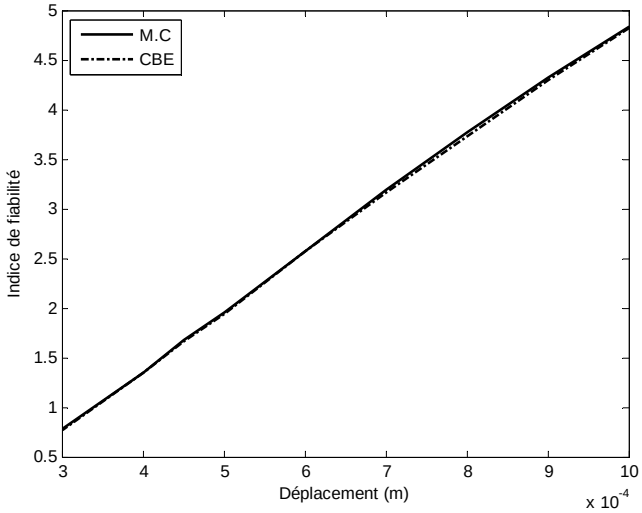

Figure 8- Evolution de l'indice de fiabilité pour différents déplacements

4.2.2 Contrainte sur la fréquence propre : 2ème scénario de défaillance

La contrainte imposée est que la première fréquence propre ne doit pas dépasser une valeur maximale 8 Hz.

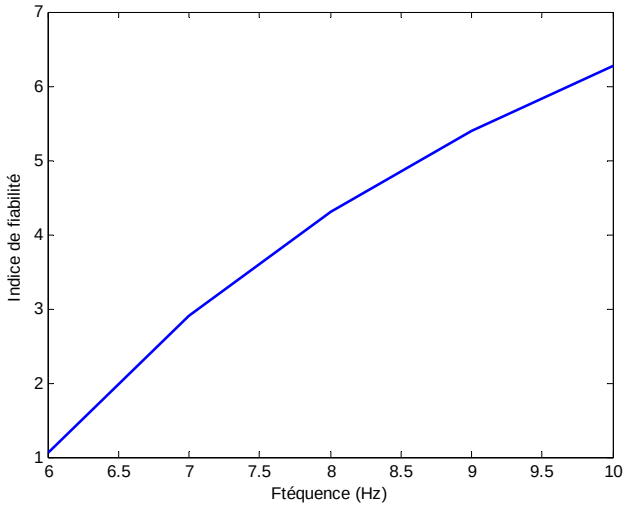

Figure 9 - Evolution de l'indice de fiabilité pour différentes fréquences

	Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité
Monte Carlo	2.3472e-006	4.578
Métamodèle CBE	4.0034e-006	4.465
Métamodèle CBE +SORM	8.4340e-006	4.303

Tableau 9 - Probabilité de défaillance

D'après la figure 9, on constate que la variation de la fréquence tolérable pour le premier mode influe proportionnellement sur l'indice de fiabilité. Les résultats de simulation présentés dans le tableau 9 montrent les performances de la méthode proposée.

5 Conclusions

L'objectif de cette étude est d'analyser la propagation des incertitudes sur les paramètres de conception en se basant sur deux approches : l'approche probabiliste qui utilise la méthode d'approximation SORM et la statistique bayesienne ; et l'approche possibiliste qui exploite l'arithmétique des intervalles.

En fonction de l'information disponible sur les paramètres de conception incertains, un modèle hybride couplant les approches possibiliste et probabiliste est utilisé dans cette étude pour la propagation des incertitudes dans le modèle.

La méthodologie proposée est basée sur le couplage mécano-fiabiliste entre la méthode des éléments finis, les algorithmes probabiliste et possibiliste pour donner une mesure de la fiabilité dynamique structurale. Pour réduire les coûts de calcul, on utilise les métamodèles de type SORM et (ou) réduction robuste de modèles.

La méthode proposée a été mise en œuvre et appliquée à des structures académiques pour différents métamodèles. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats de référence utilisant la simulation directe et coûteuse de Monte Carlo. Ils ont permis de mettre en évidence la robustesse et l'efficacité de la méthodologie proposée pour le calcul de la fiabilité en dynamique des structures. Cet outil peut s'avérer utile dans le dimensionnement robuste des structures complexes.

Les travaux en cours concernent l'application à des structures dont les modèles éléments

finis sont de grande taille pour être représentatif de structures industrielles. La mise en oeuvre de métamodèles basés sur les surfaces de réponses est également une étude en cours qui peut s'avérer intéressante en fiabilité de systèmes dynamiques non-linéaires.

Références

[1] T. Abdo, R. Rackwitz, A new beta-point algorithm for large time-invariant and time variant reliability problems, Reliability and optimization of structures, *3th WG 7.5 IFIP conference*, Berkeley, 1-11, 1990.

[2] P.-A. Boucard. Application of the latin method to the calculation of response surfaces. *Proceeding of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, USA, 12–15 June, K.J. Bathe Editor, Vol. 1,78–81, 2001

[3] P.-A. Boucard and P. Ladevèze. Une application de la méthode latin au calcul multirésolution de structures non linéaires. *Revue européenne des éléments finis*, 8(8):903–920, 1999.

[4] R.R. Jr. Craig, M.C.C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA Journal*, vol. 6, p. 1313-1319, 1968.

[5] C. Cremona, Y. Gao, The possibilistic reliability theory: theoretical aspects and applications, *Structural Safety*, 19(2) 173-201, 1997.

[6] P. O. Dessombz, F. Thouverez, J.-P. Laîné, L. Jézéquel, Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods, *Journal of Sound and Vibration* 239(5) 949-968, 2001.

[7] O. Ditlevsen, H.O. Madsen, Structural reliability methods, Chichester, *UK: Wiley*, 1996.

[8] M. Guedri, N. Bouhaddi, R. Majed, Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method, *Journal of Sound and Vibration* 297 123-145, 2006.

[9] A.M. Hasofer, N.C. Lind. Exact and invariant second-moment code format (an exact and invariant first order reliability format), *Journal of Engineering Mechanics*, 100: 111-121, 1974.

[10] T. Mitchell, Bayesian Learning, *Chapter 6 of Machine Learning*, McGraw-Hill, pp. 274–306. Pearl, Judea; & Stuart Russell (2000). Bayesian Networks. UCLA Cognitive Systems Laboratory, Technical Report (R-277), November, 1997.

[11] R. Rackwitz, Practical probabilistic approach to design first order reliability concepts for design codes, *Bulletin d'Information de CEB*, Comité Européen du béton, 112, 1976.

[12] R. Rackwitz, B. Fiessler, Structural reliability under combined random load sequences, *Computers and Structures*, 9 489–494, 1979.

[13] I. Tani, Fiabilité et robustesse en dynamique des bâtiments, *PhD Thesis*, Ecole Centrale de Lyon, 2005.