



**HAL**  
open science

# Dimensionnement et justification des structures composites: vers une optimisation des campagnes de simulation

Francois-Henri Leroy, François-Xavier Irisarri, Frédéric Laurin

## ► To cite this version:

Francois-Henri Leroy, François-Xavier Irisarri, Frédéric Laurin. Dimensionnement et justification des structures composites: vers une optimisation des campagnes de simulation. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01413704

**HAL Id: hal-01413704**

**<https://hal.science/hal-01413704>**

Submitted on 10 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Dimensionnement et justification des structures composites: vers une optimisation des campagnes de simulation.

F.-H. Leroy<sup>1</sup>, F.X. Irisarri<sup>1</sup>, F. Laurin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ONERA – Département Matériaux et Structures Composites  
BP 72, F-92322 Châtillon Cedex  
francois-henri.leroy, francois-xavier.irisarri, frederic.laurin@onera.fr

---

**Résumé** – Lors d’une campagne de dimensionnement ou de justification structurale, de nombreuses configurations sont calculées afin de déterminer la plus critique. S’agissant de structures composites, les calculs doivent être réitérés pour toute modification de séquence d’empilement ou de pli-matériau. Nous proposons une approche inverse d’*extraction de règles* permettant d’établir une fois pour toutes le domaine de criticité de chaque configuration. L’application proposée à la réduction des cas de charge en flambement laisse présager des gains importants.

**Mots clés** – calcul de structure, composites, classification hiérarchique, extraction de règles.

---

## 1 Introduction

Dans le domaine aéronautique, le recours à des solutions structurales en matériaux composites stratifiés nécessite de lourdes campagnes expérimentales. Ceci provient de la grande diversité des configurations d’essais (stratifications multiples, nombreux cas de charges du fait des anisotropies possibles, environnements variés, ...). L’utilisation du *virtual testing* permet de réduire les coûts mais la démarche a ses limites. Un industriel doit typiquement réaliser jusqu’à environs un million de calculs par mois aux seuls niveaux *matériau* (coupons, liaisons) et *détail* (structures de complexité modérée) de la pyramide de qualification et justification structurale. Cela ne favorise pas l’introduction modèles physiquement plus réalistes (viscosité, endommagement progressif, ... [5]) mais plus lourds à mettre en œuvre.

Afin d’aller plus loin dans l’allègement, nous proposons d’exploiter le fait que le nombre de configurations testées est fréquemment beaucoup plus grand que le nombre de caractéristiques mécaniques impliquées. Cela se traduit par des relations de dépendance et de hiérarchie entre configurations, certaines pouvant être systématiquement moins critiques que d’autres et donc non dimensionnantes (calcul inutile). Une approche numérique permettant de les déterminer est proposée au (§2). Le champ d’application typique concerne la réduction des cas de charge, souvent très nombreux dans les programmes industriels de justification structurale. Les démarches d’optimisation [4] peuvent par ailleurs bénéficier directement de cette réduction. Notre étude de faisabilité porte sur le problème de flambement d’une plaque composite stratifiée (§3), problème suffisamment complexe pour représenter les difficultés inhérentes aux aspects structuraux (non-linéarité en particulier).

## 2 Réduction des campagne de simulations : principe

On se limite pour simplifier l’exposé à la « tenue » d’une pièce structurale donnée et l’on considère une campagne de  $N$  simulations correspondant à autant de cas de charge différents. Chaque tenue  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , doit être estimée à partir des données mécaniques

$d_k, k \in \{1, \dots, n\}$  relatives au composite utilisé pour réaliser la structure:

$$\begin{cases} (\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, N\}} = \varphi_i(D) \\ D = (d_1, \dots, d_n)^T \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1)$$

où  $\varphi_i$  représente l'équivalent fonctionnel de la simulation  $i$  et  $\mathcal{D}$  l'espace des propriétés réalisables. Plus précisément,  $\lambda_i$  va représenter un facteur de marge (*Reserve Factor*) par rapport à une tenue considérée comme nominale. Le but d'une campagne de simulation est d'estimer le facteur  $\lambda_{i0} = \lambda_{dim}$  le plus faible, obtenu dans la configuration  $i_0$  dite dimensionnante, et de vérifier que  $\lambda_{dim} > 1$ . Notre objectif est de restreindre la campagne aux calculs des configurations structurales potentiellement dimensionnantes :

$$\begin{aligned} &\text{Une configuration structurale } i \text{ est potentiellement dimensionnante} \\ &\text{ssi } \exists D \in \mathcal{D} \text{ tel que } \lambda_i \leq \lambda_j, \forall j \in \{1, \dots, N\}, j \neq i \end{aligned} \quad (2)$$

L'ensemble des jeux de données  $D$  tels que la configuration  $i$  est dimensionnante constitue son domaine de criticité  $\mathcal{D}_i$ . Celui-ci peut être défini formellement en remarquant qu'à chacune des  $N-1$  inéquations ou *règles* à vérifier dans (2) correspond, par le changement de variable (1), une règle non-linéaire  $g_{ij}(D) \leq 0$  dans l'espace  $\mathcal{D}$  des propriétés d'entrée.

La configuration structurale  $i$  est dimensionnante dans le domaine  $\mathcal{D}_i$  :

$$\mathcal{D}_i = \{D \in \mathcal{D} \text{ tel que } g_{ij}(D) \leq 0, j \in \{1, \dots, N-1\}\}$$

Définir si une configuration est potentiellement dimensionnante revient donc à déterminer si le système de règles  $g_{ij}$  *extraites* est faisable dans  $\mathcal{D}$  (Figure 1).

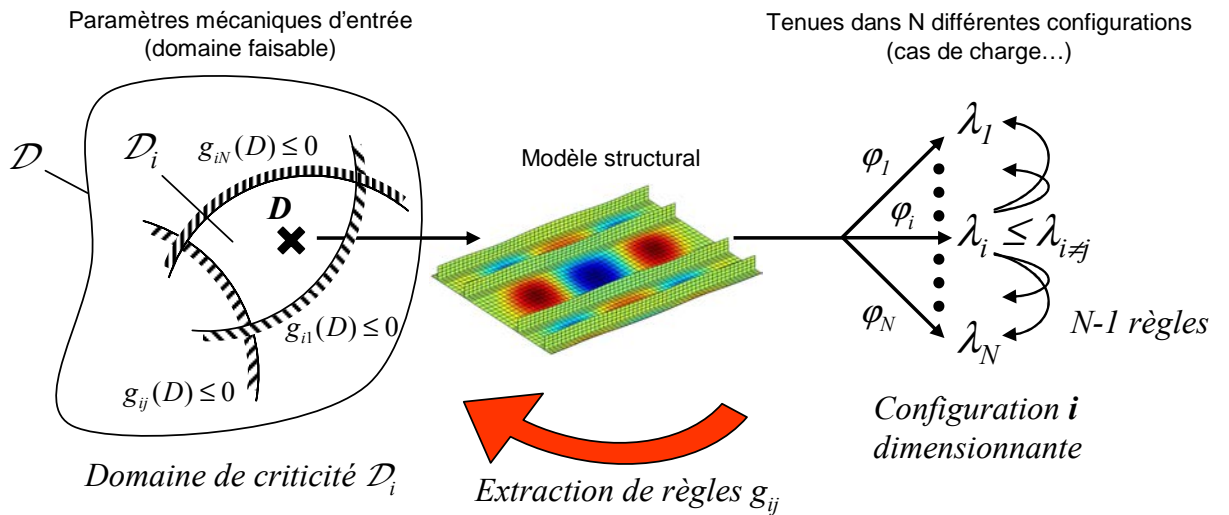


Figure 1 – Détermination du domaine de criticité de chaque configuration : principe (cf. texte).

Il est beaucoup plus facile d'étudier des systèmes de règles linaires (algèbre des polyèdres) et la plupart des méthodes d'extraction de règles [1,6] proposent de s'y ramener en linéarisant par morceaux la fonction de transfert  $\varphi_i$  :

$$\varphi_i(D) = \begin{cases} A_{i1}^T D + b_1 & \text{si } D \in \mathcal{X}_{i1} \\ \vdots & \\ A_{is}^T D + b_s & \text{si } D \in \mathcal{X}_{is} \end{cases} \quad \text{où } \mathcal{X}_{ij}, j \in \{1, \dots, s\} \text{ est une partition polyédrique de } \mathcal{D}$$

L'extraction de règles linéaires est alors possible au niveau de chaque sous-espace polyédrique  $\mathcal{X}_{ij}$ . Chaque domaine de criticité  $\mathcal{D}_i$  s'exprime alors comme union de domaines polyédriques. Ils constituent une partition de l'espace réalisable  $\mathcal{D}$  :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_i = \{D \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{M}_{i1} D \leq B_{i1} \text{ ou } \dots \text{ ou } \mathbf{M}_{is} D \leq B_{is}\} \\ \mathcal{D}_i = \emptyset \Leftrightarrow \text{configuration } i \text{ jamais dimensionnante} \end{cases}$$

Estimer si une configuration  $i$  est potentiellement dimensionnante revient dans ce contexte à estimer si l'un au moins des systèmes d'inéquations associés est faisable. Ceci est non-trivial mais des méthodes numériques efficaces existent. Notre premier objectif est donc atteint. On obtient en fait beaucoup plus car il est possible, grâce à la partition définie par les  $\mathcal{D}_i$ , de se limiter à une seule simulation pour tout nouveau composite de caractéristiques  $D$ :

$$\text{soit } D \in \mathcal{D}, \text{ alors } \exists ! i \text{ tel que } D \in \mathcal{D}_i \text{ et } \lambda_{\text{dim}} = \arg \min_{j=1 \dots N} (\lambda_j) = \lambda_i = \varphi_i(D)$$

En termes de coût de calcul, le poste principal de l'approche proposée concerne la linéarisation des  $\varphi_i$  par morceaux. Ce point est discuté au paragraphe 4.

### 3 Application à la réduction des cas de charge en flambement

Un problème de dimensionnement typique au niveau industriel concerne le flambement de panneaux composites. On considère ici le cas simplifié de la tenue au flambement d'une plaque plane rectangulaire (longueur  $a = 500$  mm, largeur  $b = 250$  mm) simplement appuyée sur ses quatre bords et soumise à 200 configurations différentes de chargement de bi-compression et de cisaillement  $(N_x, N_y, N_{xy})_i, i \in \{1, \dots, 200\}$  (Figure 2). Pour chaque cas de charge, il s'agit de calculer le facteur de charge critique  $\lambda_i$  (*Reserve Factor*) tel que le chargement  $\lambda_i \times (N_x, N_y, N_{xy})_i$  déclenche le flambement. Le cas dimensionnant est celui de plus faible  $\lambda_i$ . La question posée est simple : dans les limites d'une gamme de matériau donnée (propriétés réalisables), tous les cas de charge restent-ils potentiellement critiques ?

Afin d'être représentatif d'une application composite structurale, on considèrera que la plaque est constituée d'un stratifié de 30 plis unidirectionnels (fibres longues) orientés de façon symétrique et équilibrée. Cela couvre la grande majorité des séquences d'empilements utilisées dans l'aéronautique. Les propriétés du pli choisies sont typiques d'un composite structural à fibre de carbone (fibre T700) et matrice polymère (M21) :  $E_1 = 112$  GPa,  $E_2 = 8.2$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $G_{12} = 4.5$  GPa, épaisseur 0.26 mm. L'épaisseur totale du stratifié  $h = 30 \times 0.26$  mm est typiquement très inférieure aux autres dimensions. On se placera légitimement dans le cadre de l'élasticité linéaire et de la Théorie Classique des Stratifiés. Les paramètres mécaniques influents sont alors exprimables à l'échelle du stratifié par les matrices de rigidité  $\mathbf{ABD}$  qui sont dans notre cas entièrement définies par la donnée de six modules de rigidité : deux pour le comportement de membrane,  $A_{11}$  et  $A_{22}$ , et quatre pour celui de flexion,  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Afin de rendre la visualisation des résultats plus parlante, nous ne retiendrons que deux variables influentes,  $D_{11}$  et  $D_{22}$ , en négligeant donc les effets de membrane et les couplages de flexion/torsion. Le domaine *a priori* réalisable  $\mathcal{D}$  des variables mécaniques d'entrée  $D_{11}$  et  $D_{22}$  correspond à la grande diversité des empilements symétriques équilibrés possibles : des milliers si on limite aux angles d'empilement  $\{0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ\}$ .  $\mathcal{D}$  se présente sous la forme d'une « demi-lune » dans le plan  $D_{11}$ - $D_{22}$  (Figure 3, [2]). On trouvera dans [4] plus de détail sur la modéli-

sation du problème, en particulier sur les relations entre les matrices **ABD** et les propriétés du pli ainsi que sur l'introduction éventuelles de propriétés à rupture.

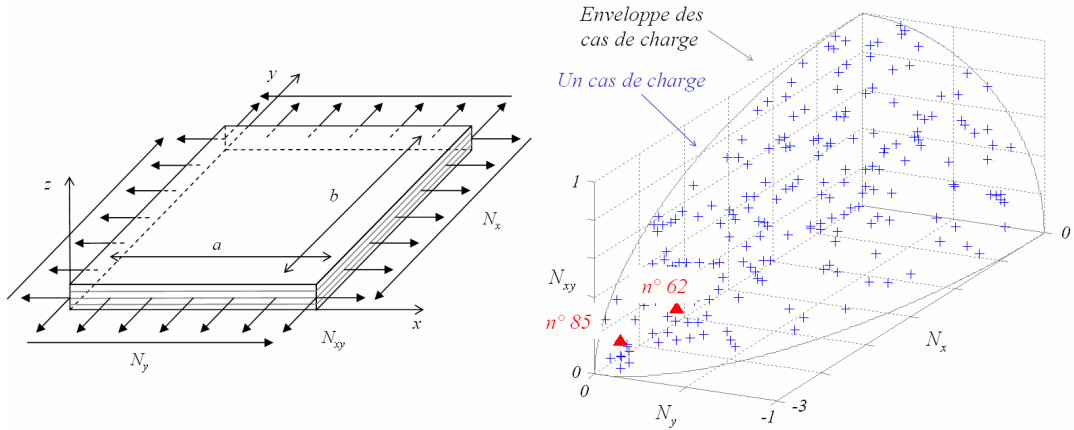


Figure 2 – Problème de flambement d'une plaque composite soumise à un chargement plan : géométrie et définition des 200 cas de charge considérés (normalisés).

Nous utilisons ici une solution analytique au problème d'estimation des facteurs critiques  $\lambda_i$  proposée par [9]. Ceci permet d'appliquer de façon simple et pédagogique la technique de réduction des cas de charge précédemment présentée. Le problème est simplifié en supposant que la plaque flambe en  $m$  et  $n$  demi-longueurs d'ondes dans les directions  $x$  et  $y$  (exemple Figure 3). On peut alors estimer la tenue propre de chaque mode  $\lambda_i^{mn}$  :

$$\lambda_i^{mn} = \frac{\pi^2 \left[ D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4 \right]}{a^2 \left( N_x^i m^2 + N_y^i n^2 R^2 + N_{xy}^i mnR \right)}$$

où  $R = a/b$ ,  $D_{12} = -(D_{11} + D_{22})/2 + cste_1 h^3$ ,  $D_{66} = -(D_{11} + D_{22})/2 + cste_2 h^3$   
 $cste_1$  et  $cste_2$  dépendent des propriétés élastique du pli [4]

La plus faible tenue définit alors la charge critique  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = \min_{m,n} \left( \lambda_i^{mn} \right) \quad (3)$$

On peut constater à la Figure 3 que la non-linéarité de la relation  $\lambda_i = \varphi_i(D_{11}, D_{22})$  provient de la concurrence entre les différents modes traduite par (3).

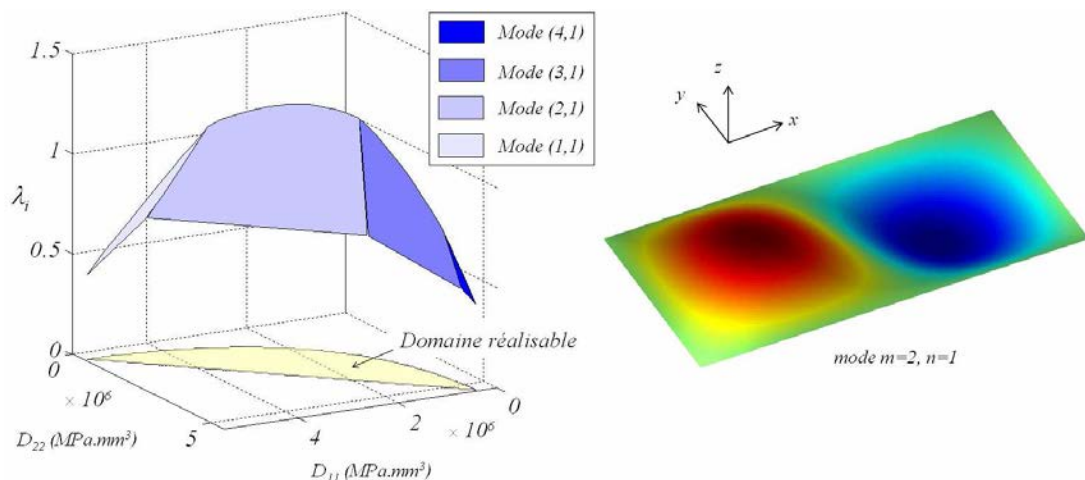


Figure 3 – La non-linéarité de la tenue au flambement pour un cas de charge donné résulte en fait principalement d'une concurrence entre modes linéaires (exemple de mode à droite).

Chaque mode possède son domaine d'activation/prévalence dans l'espace réalisable des propriétés ( $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ). Les fonctionnelles  $\varphi_i$  sont en fait linéaires par morceaux. L'approche de réduction proposée (§2) s'applique donc directement. Elle suppose une linéarisation en aveugle des  $\varphi_i$  qui peut se faire soit par des techniques généralistes soit en utilisant la nature multi-mode du problème. Cette dernière possibilité est particulièrement efficace puisqu'il suffit de considérer quelques exemples de composites ( $\geq 3$ ) et d'estimer pour chacun d'eux les différents modes de flambements : on constate alors la linéarité de ces modes et l'on peut aisément reconstruire une décomposition linéaire par morceaux des  $\varphi_i$  (Figure 4 à gauche).

L'extraction des domaines de criticité des différents cas de charge est donnée à la Figure 4. On constate que seulement deux cas de charges (n°85 et n°62) sur les 200 considérés sont potentiellement dimensionnants (domaines non vides intersectant le domaine de faisabilité). On peut remarquer en observant le cas de charge n°85 que notre approche permet de déterminer des domaines de criticité complexes (non-convexes).

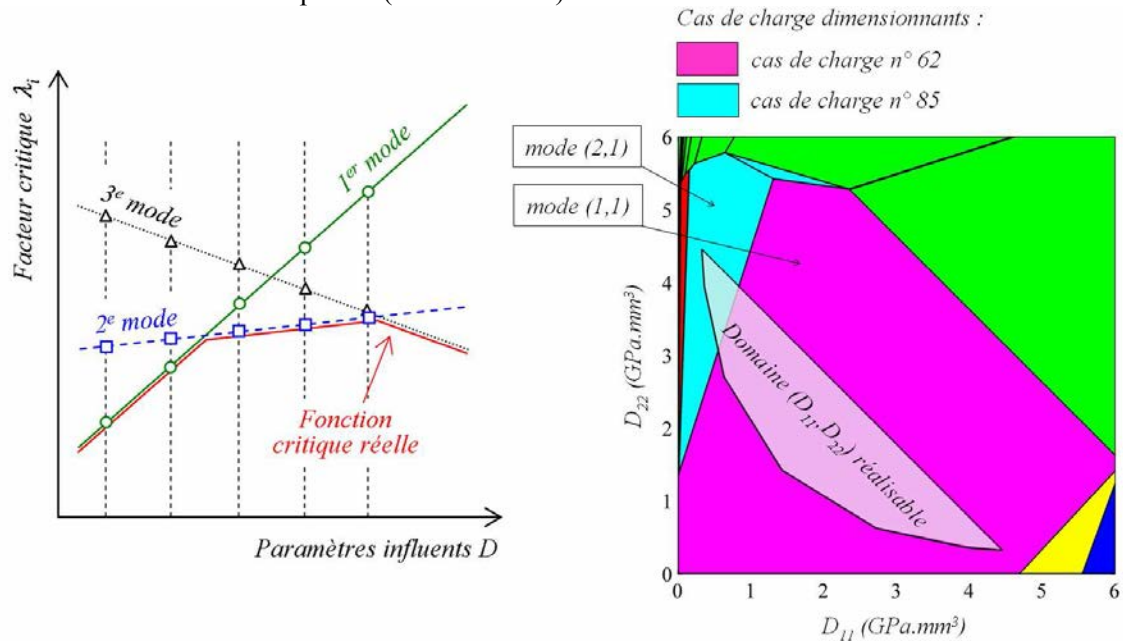


Figure 4 – A gauche : le calcul et la reconnaissance des différents modes permet de modéliser plus efficacement l'évolution des facteurs critiques. A droite : domaines de criticité  $\mathcal{D}_i$  obtenus pour les différents cas de charge (une couleur par cas). Seuls 2 cas de charge sur 200 sont potentiellement dimensionnants (intersection non nulle avec le domaine réalisable).

## 4 Discussion

Les réductions de coûts de simulation apportées par notre approche impliquent un coût de calcul initial pour l'identification des domaines de criticité des différents cas de charge. Toute la difficulté est en fait concentrée sur la construction de modèles linéaires par morceaux décrivant les différentes simulations structurales impliquées. Il s'agit d'identifier ces modèles en limitant au maximum le nombre de simulations nécessaires (coût principal). On peut pour cela utiliser des techniques *ad hoc* [3]. On peut également remarquer que cela s'inscrit dans la problématique plus générale de construction de *méta-modèles* parcimonieux [8]. Dans ce contexte, nous proposons d'utiliser un méta-modèle adaptatif performant dont la structure facilite la linéarisation par morceaux ultérieure [6].

Le cas des problèmes multi-modes, qu'il s'agisse de modes de flambement, de rupture ou plus généralement de ruine, appelle un traitement particulier. L'utilisation de techniques de méta-modélisation globales échoue à restituer les discontinuités introduites par les changements de modes. Une approche de type *réseau d'experts* [7] est plus indiquée. Il s'agit dans un premier

temps de reconnaître les différents modes puis de les modéliser séparément. C'est l'approche qui a été suivie pour le traitement simple présenté ici de la plaque en flambement (Figure 4). La spécificité de notre approche consiste en l'exploitation de l'ensemble des modes de flambement calculés pour une structure donnée et pas seulement du mode critique (Figure 4). Ceci facilite grandement l'analyse. Une modélisation plus complexe de l'exemple présenté (méthode de Rayleigh-Ritz) montre qu'une modélisation quadratique de chaque mode est suffisante. Dans le cas plus général, un méta-modèle peut être identifié pour chaque mode puis linéarisé par morceaux.

## 5 Conclusion

Lors d'une campagne de dimensionnement ou de justification structurale, de nombreuses configurations structurales sont calculées afin de déterminer la plus critique (*reserve factor* le plus faible). Dans le domaine des structures composites, les calculs doivent être réitérés pour toute modification de séquence d'empilement ou de pli-matériau. Nous proposons une approche inverse d'*extraction de règle* permettant d'établir une fois pour toutes le domaine de criticité de chaque configuration. L'application au calcul de flambement d'une plaque composite sous 200 cas de charges différents permet en outre d'illustrer le fait que de nombreuses configurations ne sont jamais dimensionnantes. L'approche proposée repose sur le développement à moindre coût de méta-modèles linéaires par morceaux. Le traitement des problèmes multi-modes peut grandement bénéficier d'une reconnaissance préalable des modes. Ce dernier point est délicat pour les modèles structuraux complexes et fortement non-linéaires (travaux en cours dans le domaine plus général de la méta-modélisation par réseaux d'experts).

## Références

- [1] Andrews R., Diederich J., Tickle A.B. Survey and critique of techniques for extracting rules from trained artificial neural networks. *Knowledge-Based Systems*, 1995;8:373-389.
- [2] Diaconu C.G., Sato M., Sekin H. Feasible Region in General Design Space of Lamination Parameters for Laminated Composites. *AIAA Journal*, 2002;40.
- [3] Ferrari-Trecate G., Muselli M., Liberati D., Morari M. A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica*, 2003;39:205-217.
- [4] Irisarri F.X., Bassir D.H., Carrere N., Maire J.F. Multiobjective stacking sequence optimization for laminated composite structures. *Composites Science and Technology*, In Press, Accepted Manuscript.
- [5] Laurin F., Carrère N., Maire J.-F. A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2007;38:198-209.
- [6] Maire F. Rule-extraction by backpropagation of polyhedra. *Neural Networks*, 1999;12:717-725.
- [7] Merval A., Samuelides M., Grihon S. Application of response surface methodology to stiffened panel optimization, 2006
- [8] Queipo N.V., Haftka R.T., Shyy W., Goel T., Vaidyanathan R., Kevin Tucker P. Surrogate-based analysis and optimization. *Progress in Aerospace Sciences*, 2005;41:1-28.
- [9] Rama Mohan Rao A., Arvind N. A scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminate composites. *Composite Structures*, 2005;70:383-402.