



**HAL**  
open science

# Une méthode éléments finis étendus en dynamique explicite avec pas de temps critique standard

Thomas Elguedj, Anthony Gravouil, Hubert Maigre

## ► To cite this version:

Thomas Elguedj, Anthony Gravouil, Hubert Maigre. Une méthode éléments finis étendus en dynamique explicite avec pas de temps critique standard. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01413698

**HAL Id: hal-01413698**

**<https://hal.science/hal-01413698>**

Submitted on 10 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Une méthode éléments finis étendus en dynamique explicite avec pas de temps critique standard

T. Elguedj<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, H. Maigre<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, CNRS  
INSA-Lyon, LaMCoS, UMR5259  
20 avenue Albert Einstein, F69621 Villeurbanne Cedex, France  
{thomas.elguedj,anthony.gravouil,hubert.maigre}@insa-lyon.fr

---

**Résumé** — Il est établi que la méthode X-FEM ne préserve pas les conditions de stabilité standards des schémas explicites. Nous proposons une technique de condensation diagonale de la masse pour fonctions d’enrichissement arbitraires en dynamique explicite X-FEM. Elle généralise des résultats précédemment publiés (fissures et bords libres). Un schéma d’intégration temporelle élément par élément explicite stable - explicite permettant de retrouver une condition CFL standard est proposé. Des exemples numériques validant la méthode sont également présentés.

**Mots clés** — X-FEM, dynamique explicite, mass lumping, condition CFL.

---

## 1 Introduction

De nombreux travaux récents se sont intéressés à l’utilisation de la méthode X-FEM en dynamique que ce soit avec des schémas d’intégration temporelle implicites ou explicites pour des problèmes de propagation de fissure et de bords libres. Les travaux de Menouillard *et al.* [1] et de Rozycki *et al.* [2], ont été les premiers pour lesquels des méthodes de condensation diagonale de la masse produisant des pas de temps critiques non nuls ont été proposées. Les travaux présentés ici détaillent une méthode générale de condensation diagonale de la masse pour n’importe quelle fonction d’enrichissement. Celle-ci est basée sur la conservation de l’énergie cinétique des modes d’enrichissement. De plus un schéma d’intégration temporelle élément par élément explicite stable - explicite est proposé et permet de libérer complètement la contrainte du pas de temps critique lié à l’enrichissement et ainsi de retrouver la condition CFL standard.

## 2 Condensation diagonale de la masse et pas de temps critique

### 2.1 Condensation diagonale enrichie

On considère un élément fini linéaire en 2D ou 3D dont tous les noeuds sont enrichis avec la fonction d’enrichissement  $\psi$  quelconque. On recherche une définition de la matrice diagonale de masse avec enrichissement conservant l’énergie cinétique des modes rigides ainsi que des modes d’enrichissement. Pour les degrés de liberté enrichis, on impose comme condition aux limites de Dirichlet la fonction d’enrichissement  $\psi$  dans tout l’élément. On impose l’égalité des énergies cinétiques continues et discrètes.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho \psi^2 d\Omega_e = T^h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nnoeuds} m_{Li} \psi^2(\mathbf{x}_i). \quad (1)$$

On fait ensuite l'hypothèse que les termes diagonaux sont identiques  $m_{Li} = m_L, \forall i$ , c'est à dire que tous les noeuds enrichis ont des masses égales. On obtient alors l'expression suivante :

$$m_L = \frac{1}{\sum_{i=1}^{nnoeuds} \Psi^2(\mathbf{x}_i)} \int_{\Omega_e} \rho \Psi^2 d\Omega_e. \quad (2)$$

La définition proposée à Eq. (2) pour la masse diagonale enrichie est valable pour n'importe quelle fonction d'enrichissement quelle que soit la dimension du problème considéré.

**Remarque 1** Si on choisit pour  $\Psi$  la fonction de Heaviside généralisée, la masse enrichie devient

$$m_L = \frac{m_{elt}}{nnoeuds} \frac{1}{mes(\Omega_{el})} \int_{\Omega_e} \Psi^2 d\Omega_e, \quad (3)$$

cette écriture étant identique à celle proposée par Menouillard *et al.* [1] dans ce cas particulier.

## 2.2 Pas de temps critique

On se concentre dans cette partie sur le cas de la mécanique de la rupture, pour lequel les fonctions d'enrichissement sont les suivantes :

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \left[ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right], \quad (4)$$

On s'intéresse au pas de temps critique obtenu avec la formule présentée précédemment en fonc-

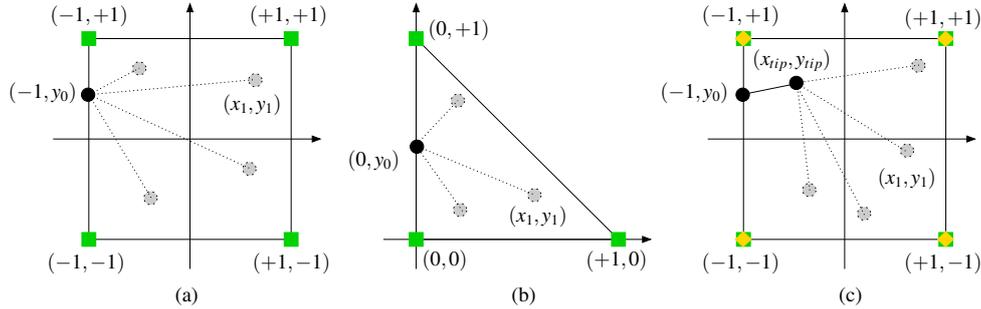


Figure 1 – Position de la fissure dans un élément de référence enrichi. (a) Élément Q4, (b) élément T3 avec une fissure fixe. (c) Élément Q4 avec une fissure mobile.

tion de la position de la pointe de la fissure dans un élément. Trois cas sont considérés comme présenté sur la Figure 1 : fissure fixe dans un élément quadrangulaire et triangulaire et fissure mobile dans un élément quadrangulaire. Dans ce dernier cas la fissure “propage” dans un même élément, celui-ci contient donc deux jeux de fonctions d'enrichissement chacun étant associé à une position de la pointe de fissure. Ce cas est une illustration de la stratégie de conservation des enrichissement lors de la propagation proposée par Réthoré *et al.* [3]. Cette stratégie est adoptée ici car elle permet la conservation de l'énergie lors de la propagation dynamique de fissure. Un exemple d'évolution du pas de temps critique en fonction de la position de la pointe de fissure dans un élément Q4 (la fissure “entrant” dans l'élément au point de coordonnées  $(-1; 0.75)$ ) est présenté sur la Figure 2. Différentes configurations ont été testées et permettent de proposer, pour la simulation X-FEM dynamique explicite de propagation de fissure avec enrichissement singulier et discontinu et la technique de condensation diagonale de la masse présentée à l'Eq. (2), la définition du pas de temps critique suivante :

$$\Delta t_c^{x-fem} = \frac{\Delta t_c^{fem}}{2}. \quad (5)$$

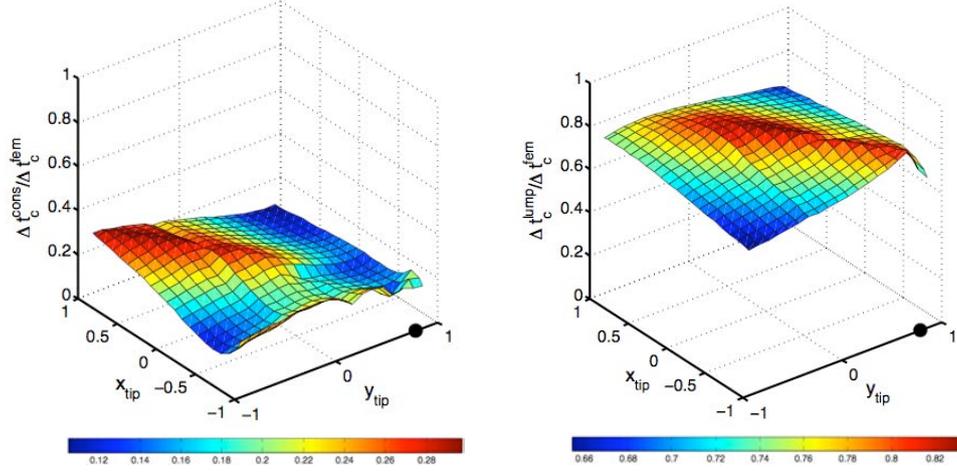


Figure 2 – Pas de temps critique normalisé pour une matrice consistante (à gauche) et diagonalisée (à droite) en fonction de la position de la pointe de fissure pour un élément Q4 tranché au point de coordonnées  $(-1; 0.75)$ .

Un étude systématique similaire (non présentée ici) a également été menée dans le cas d'enrichissement de type bord libre. Pour les éléments triangulaires et tétraédraux, on retrouve les résultats proposés par Rozycki *et al.* [2]. Pour les éléments quadrangulaires et hexaédraux, on obtient la règle suivante :

$$\Delta t_c^{x-fem} = \frac{2}{3} \Delta t_c^{fem}. \quad (6)$$

### 3 Intégrateur temporel explicite stable - explicite

On propose également un nouveau schéma d'intégration temporelle explicite. Il s'agit d'un schéma dit "élément par élément" inspiré de l'approche implicite-explicite de Hughes et Liu [4]. Dans le schéma proposé, on utilise la différence centrée pour les éléments finis non enrichis et le schéma explicite inconditionnellement stable proposé par Chang [5] pour les éléments enrichis. Le schéma est réalisé comme suit :

$$\text{Mise à jour de } u, \text{ groupe E :} \quad u_{n+1}^E = u_n^E + \Delta t v_n^E + \frac{\Delta t^2}{2} a_n^E, \quad (7)$$

$$\text{Mise à jour de } u, \text{ groupe ES :} \quad u_{n+1}^{ES} = u_n^{ES} + \beta_1^{-1} \Delta t v_n^{ES} + \beta_1^{-1} \frac{\Delta t^2}{2} a_n^{ES}, \quad (8)$$

$$\text{Équations d'équilibre :} \quad M a_{n+1} + K u_{n+1} = F_{n+1}, \quad (9)$$

$$\text{Mise à jour de } v : \quad v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}), \quad (10)$$

avec

$$M = M^{ES} + M^E \text{ et } K = K^{ES} + K^E \text{ et } F = F^{ES} + F^E, \quad (11)$$

$$\beta_1 = \left[ I + \frac{1}{4} \Delta t^2 (M^{ES})^{-1} K^{ES} \right] \quad (12)$$

La stabilité d'un tel schéma est démontrée par la méthode énergétique, elle est conditionnée par le pas de temps critique de la zone non enrichie. En constituant le groupe ES avec les éléments complètement et partiellement enrichis, on obtient une contrainte sur le pas de temps uniquement dans le groupe E, c'est à dire pour les éléments non enrichis :

$$\Delta t_c^{x-fem} = \Delta t_c^{fem}. \quad (13)$$

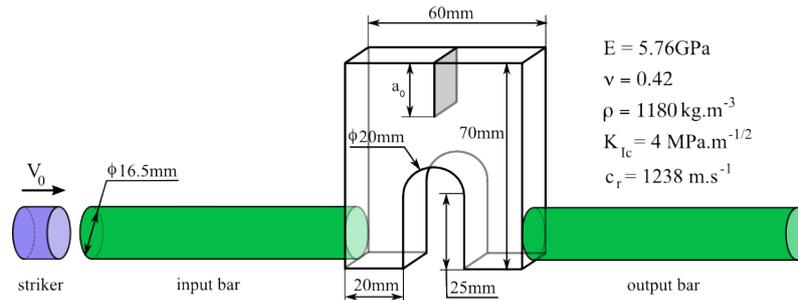


Figure 3 – Géométrie et dispositif expérimental schématisé du cas CCS.

L'utilisation d'un maillage régulier et la définition des fissures et bords libres à l'aide d'enrichissements nous permet de minimiser le coût numérique et de maximiser la précision. Le surcoût numérique lié au schéma de Chang, qui nécessite une inversion matricielle, est limité, celui-ci n'étant utilisé que pour les éléments enrichis (ordre de grandeur de la taille du problème inférieur d'une dimension par rapport au problème global). On pourra d'ailleurs noter que c'est le souci de limiter la taille de la zone sur laquelle on utilise le schéma de Chang qui a motivé le découpage en groupe.

## 4 Exemples

### 4.1 Compact Compression Specimen

Le premier exemple étudié est le cas du *Compact Compression Specimen*, qui a été étudié expérimentalement et qui est présenté sur la Figure 3. La barre entrante est modélisée par l'effort dynamique expérimental, la barre sortante par une surface libre puisque la durée de l'essai ne permet pas aux ondes d'atteindre cette surface. On utilise un maillage régulier rectangulaire, la partie trouée étant représentée par une enrichissement de surface libre. On trace sur la Figure 4 le

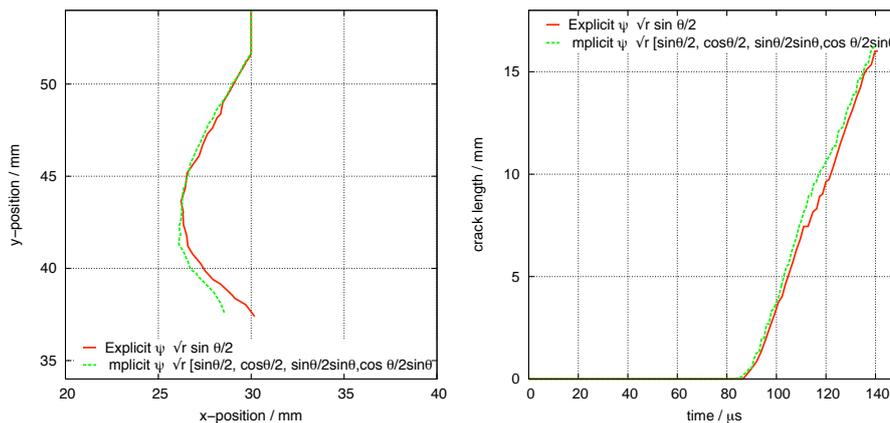


Figure 4 – Résultats CCS avec la méthode proposée et un calcul X-FEM dynamique implicite (de [1]) : trajet de fissure final (à gauche) et longueur de fissure en fonction du temps (à droite).

trajet numérique de fissure ainsi que la variation de longueur de fissure au cours du temps avec la méthode proposée et un calcul X-FEM dynamique implicite avec la même discrétisation (d'après [1]). On peut noter la très bonne corrélation des résultats entre eux, ainsi qu'avec les résultats expérimentaux.

## 4.2 Expérience de Grégoire *et al.*

Le second exemple est basé sur l'expérience proposée par Grégoire *et al.* [6]. Le dispositif expérimental est présenté sur la Figure 5, le matériau étudié est le PMMA. L'expérience se dé-

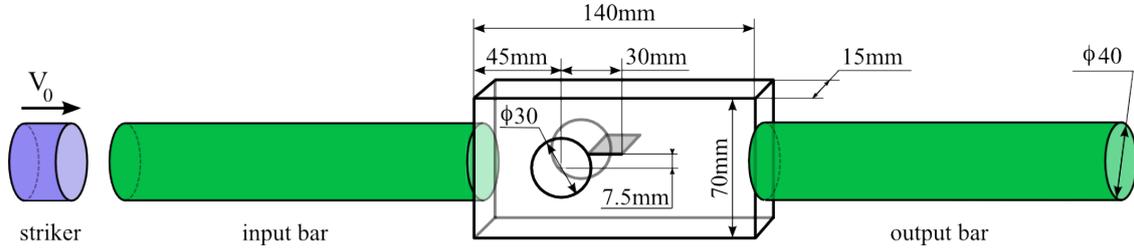


Figure 5 – Expérience de Grégoire *et al.* : dispositif expérimental schématique.

roule en trois phases : la propagation s'initie vers  $200\mu s$  et la fissure propage à vitesse horizontale sensiblement constante  $\dot{a}_x \simeq 211m.s^{-1}$ , ce qui correspond à une vitesse curviligne maximum de  $\dot{a} \simeq 260m.s^{-1}$  ; puis la fissure s'arrête pour une durée d'environ  $50\mu s$  ; enfin une seconde phase de propagation à vitesse horizontale constante  $\dot{a}_x \simeq 157m.s^{-1}$  ( $\dot{a} \simeq 160m.s^{-1}$ ) a lieu jusqu'à l'arrêt final vers  $500\mu s$ . Comme dans Grégoire *et al.* [6] le trou et la fissure sont modélisés à l'aide d'enri-

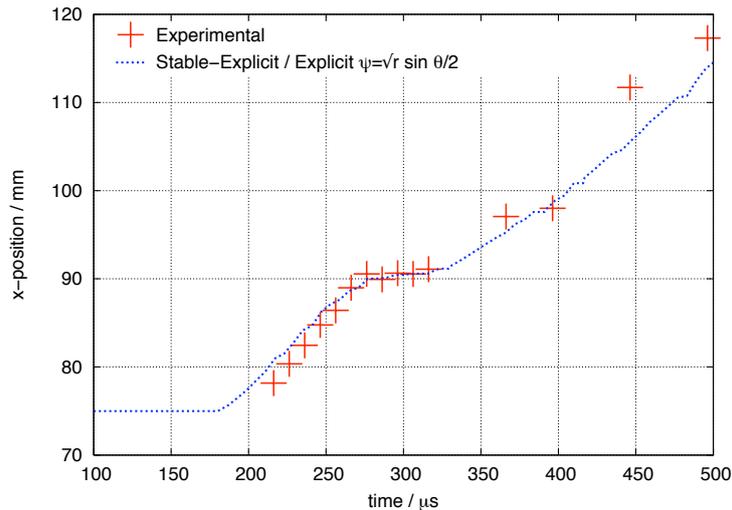


Figure 6 – Expérience de Grégoire *et al.* : abscisse de la pointe de fissure ne fonction du temps, résultats expérimentaux et numériques.

chissements. Un maillage de  $27 \times 51$  éléments Q4 est utilisé. La vitesse d'impact expérimental est imposée pour modéliser la barre entrante et une condition aux limites de type impédance est utilisée pour modéliser la barre sortante sans réflexions d'ondes parasites. Les résultats sont présentés et comparés à ceux des expériences sur les Figure 6 to 7. On peut observer la bonne corrélation tant sur le trajet final de fissuration que sur la position de la pointe de fissure au cours du temps. On notera principalement que la zone d'arrêt est bien représentée tant du point de l'instant d'occurrence que sur la durée de celui-ci.

## 5 Conclusion

Ce papier a présenté une formule générale de condensation diagonale de la masse dans le cadre de la méthode X-FEM et ceci pour des fonctions d'enrichissement quelconques et quelle

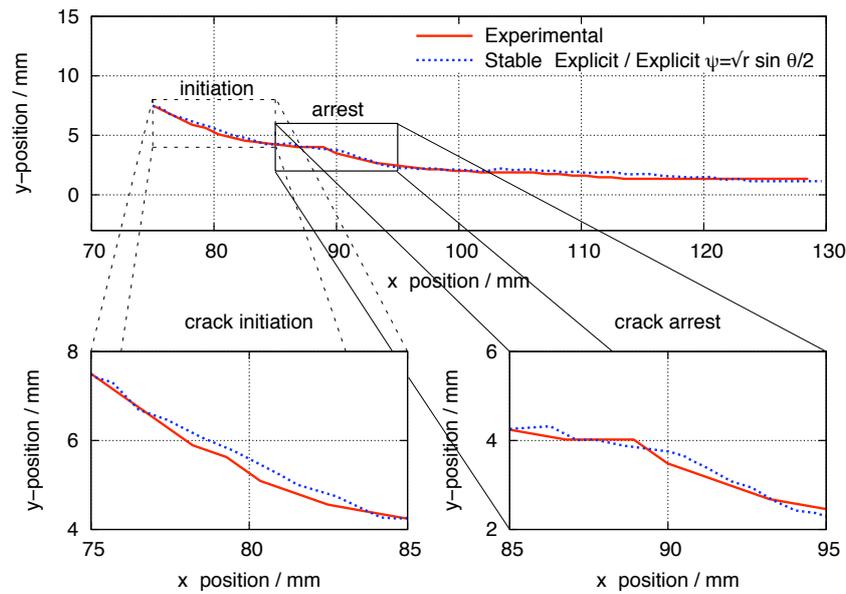


Figure 7 – Expérience de Grégoire *et al.* : trajet de fissuration expérimental et numérique avec zoom sur les phases d’initiation et d’arrêt.

que soit la dimension du problème. Cette formule généralise des résultats précédemment publiés dans certains cas particuliers. Un nouveau schéma d’intégration temporel explicite “élément par élément” est également proposé. Il consiste en l’utilisation du schéma de la différence centrée pour les éléments non enrichis et du schéma explicite inconditionnellement stable proposé par Chang pour les éléments enrichis. Ces deux éléments nous permettent d’effectuer des calculs dynamique explicite X-FEM avec un pas de temps critique indépendant des enrichissements considérés.

## Références

- [1] T. Menouillard, J. Réthoré, A. Combescure, and H. Bung. Efficient explicit time stepping for the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68 :911–938, 2006.
- [2] P. Rozycki, N. Moës, E. Béchet, and C. Dubois. X-FEM explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :349–363, 2008.
- [3] J. Réthoré, A. Gravouil, and A. Combescure. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63 :631–659, 2005.
- [4] T.J.R. Hughes and W.K. Liu. Implicit-explicit finite elements in transient analysis : implementation and numerical examples. *Journal of Applied Mechanics*, 45 :375–378, 1978.
- [5] S.Y. Chang. An explicit method with improved stability property. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(8) :1100–1120, 2008.
- [6] D. Grégoire, H. Maigre, J. Réthoré, and A. Combescure. Dynamic crack propagation under mixed-mode loading - Comparison between experiments and X-FEM simulations. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :6517–6534, 2007.