



**HAL**  
open science

# **Un nouvel élément fini triangulaire coque sans degré de liberté de rotation: insensible à la distorsion du maillage et adapté aux transformations finies**

Sylvain Couëdo, Gérard Rio, Laëtitia Duigou

## ► To cite this version:

Sylvain Couëdo, Gérard Rio, Laëtitia Duigou. Un nouvel élément fini triangulaire coque sans degré de liberté de rotation: insensible à la distorsion du maillage et adapté aux transformations finies. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. <hal-01413176>

**HAL Id: hal-01413176**

**<https://hal.science/hal-01413176v1>**

Submitted on 9 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

# Un nouvel élément fini triangulaire coque sans degré de liberté de rotation: insensible à la distorsion du maillage et adapté aux transformations finies

S. Couëdo<sup>1</sup>, G. Rio<sup>1</sup>, L. Duigou<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Européenne de Bretagne,  
LIMATB, Université de Bretagne Sud, Centre de Recherche Rue de Saint Maudé - BP 92116,  
56321 Lorient cedex  
{gerard.rio,sylvain.couedo,laetitia.duigou}@univ-ubs.fr

---

**Résumé** — Les éléments finis “rotation free” constituent une alternative séduisante aux éléments plaques-coques classiques. Cependant la principale limitation de ces éléments à notre sens, est leur sensibilité à la distorsion du maillage, seuls des maillages réguliers peuvent conduire à des résultats très précis. Dans ce contexte, l’objectif de ce papier est la présentation d’un nouvel élément (appelé SFE3) qui, tout en étant précis, présente une très faible sensibilité à la distorsion du maillage.

**Mots clés** — plate and shell elements, rotation free, Large strains.

---

## 1 Introduction

Ces dernières années de nombreux travaux de recherche ont été effectués dans le domaine des éléments sans degré de liberté (ddl) en rotation (appelé RF pour rotation free dans la suite du document) (voir par exemple [5][8][11][3][1]). Ces éléments constituent une alternative séduisante aux éléments plaques-coques classiques. Comme avantages on peut citer par exemple, un nombre de degrés de liberté deux fois moindre d’où un gain en temps de calcul, pas de phénomène de blocage cisaillement-flexion et un conditionnement de la raideur qui s’améliore à mesure que l’épaisseur diminue, une cohérence des ddl entre éléments coques et solides, une gestion du contact en général plus simple, une description des transformations finies simple. Les éléments RF sont ainsi utilisés avec succès pour la simulation de la mise en forme par emboutissage (par exemple [8]). Cependant la principale limitation des éléments RF à notre sens, est leur sensibilité à la distorsion du maillage, seuls des maillages réguliers peuvent conduire à des résultats très précis. Dans ce contexte, l’objectif de ce papier est la présentation d’un nouvel élément (appelé SFE3) qui, tout en étant précis, présente une très faible sensibilité à la distorsion du maillage.

## 2 Modélisation

La formulation de l’élément SFE3 s’appuie sur un système de coordonnées matérielles entraînées attachées à la surface médiane de la coque, et données par le paramétrage  $\theta^\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) de l’élément fini (triangle) de référence. La surface médiane est décrite par  $\theta^3$  ( $-\frac{h}{2} \leq \theta^3 h \leq \frac{h}{2}$ ) avec  $h$  l’épaisseur. A partir du repère naturel  $a_i$  associé à ce paramétrage et de la métrique correspondante à deux instants et des hypothèses de Kirchhoff Love, on en déduit les composantes du tenseur de

déformation d'Almansi entre ces deux instants :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - \theta^3(\hat{h}b_{\alpha\beta} - hb_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(\theta^3)^2(\hat{h}^2\hat{b}_{\alpha}^{\lambda}\hat{b}_{\lambda\beta} - h^2b_{\alpha}^{\lambda}b_{\lambda\beta} + \hat{h}_{,\alpha}\hat{h}_{,\beta} - h_{,\alpha}h_{,\beta}) \quad (1)$$

avec " $\hat{\cdot}$ " désignant les termes après déformations,  $a$  la métrique et  $b$  le tenseur courbure de la surface médiane. Cette expression (1) comprend ainsi un terme de membrane  $\frac{1}{2}(\hat{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})$  et le terme restant de flexion qui dépend de l'évolution du tenseur de courbure. Le point clé du calcul de la flexion est donc la connaissance précise de l'évolution de la courbure. Dans le cas des éléments plaques ou coques sans degré de rotation, l'idée est d'utiliser les éléments adjacents au triangle central, pour construire la courbure. Pour ce faire les 2 premiers modèles SFE développés [7] s'appuyaient tout d'abord sur le calcul d'une moyenne pondérée des normales de part et d'autre de chaque arête, puis une interpolation linéaire de ces 3 normales, conduisait directement à la courbure sur le triangle central.

La principale limitation de ces deux formulations, et également des autres éléments finis RF (sauf l'élément développé par Phaal et Calladine [9]), est la sensibilité à la distorsion du maillage (voire garlback [6]). La nouvelle formulation proposée, s'appuie sur une interpolation polynomiale quadratique d'une surface passant par les 6 noeuds constituant le triangle central associé aux 3 triangles l'entourant. Une formulation du même type avait été proposée par Phaal and Galladine [9], mais dans un contexte classique de petites transformations et un repérage local à l'élément, orthonormé.

Dans notre cas, l'interpolation polynomiale est exprimée directement dans le repère naturel convecté, et aucune hypothèse limitative sur les transformations finies n'est retenue. Les tests de validation montrent que l'élément SFE ainsi développé est plus précis que l'élément de Phaal et Galladine. Enfin, un traitement particulier des conditions limites de symétrie, de bord libre et d'encastrement a été proposé.

Dans le cas où un (ou plusieurs) noeud extérieur n'existe pas, on considère que la courbure dans la direction du (des) noeud manquant est nulle. Dans le cas où une des arêtes du triangle central, appartient à un axe de symétrie ou à une ligne d'encastrement, la condition correspond à une dérivée imposée dans la direction normale au plan de symétrie ou au plan d'encastrement. Pour l'encastrement, il faut de plus imposer un déplacement bloqué.

### 3 Exemples de tests de validation

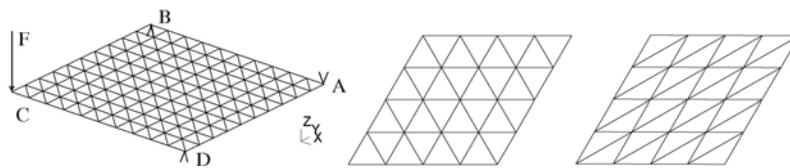


Figure 1 – a) patch test, b) contour losange : configurations (A) et (B)

D'une manière générale le comportement est élastique linéaire en contraintes planes. Un premier test classique (voir par exemple [2]) est un patch test pour l'étude d'une torsion sur un maillage régulier (cf.1a) : une plaque carrée dont 3 coins sont en appui et le 4ième soumis à une force normale ponctuelle. Le tableau 3 présente la solution normalisée par rapport à la solution théorique en petites déformations, obtenue avec les éléments SFE et plusieurs éléments sans ddl de rotation, publiés récemment : l'élément quadrangulaire S4 de [2], l'élément triangulaire S3 de [12] et l'élément quadrangulaire BSQ de [4].

Ces résultats montrent que les éléments SFE1 et SFE2 donnent sensiblement les mêmes résultats que l'élément S3 [12] : l'erreur commise sur le déplacement est assez importante. L'élément

Maillage	1x1	2x2	4x4	5x5	10x10
S3 [12]	0.349	0.559	0.738	0.782	0.882
S3 [10]	0.349	0.554	0.662	0.854	0.921
DKT [12]	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
S4 [2]	1.0	1.0	1.0		
BSQ [4]	1.0	1.0	1.0		
SFE1	0.350	0.553	0.738	0.782	0.880
SFE2	0.202	0.553	0.738	0.783	0.880
SFE3	0.9997	0.9977	0.9982	0.9985	0.9990
SFE3C	0.9999	0.9978	0.9982	0.9984	0.9992

Tableau 1 – Plaque en flexion : déplacement normalisé

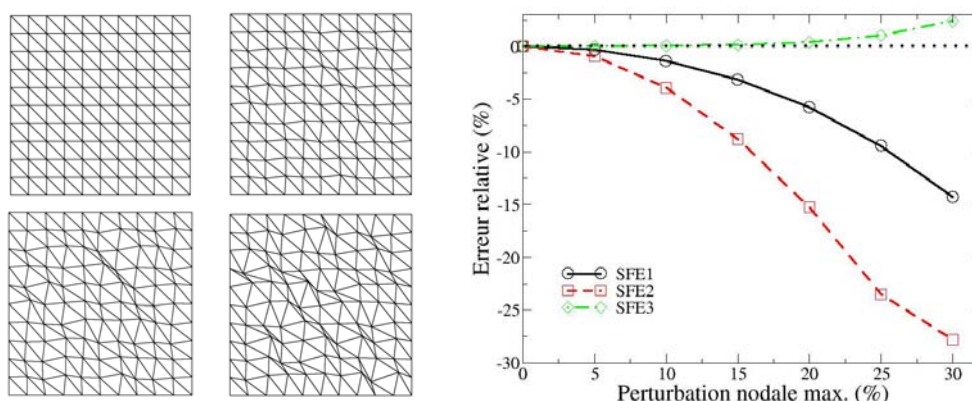


Tableau 2 – Perturbation aléatoire d'un maillage régulier : 0%, 10%, 20% et 30%. évolution de l'erreur en fonction de cette perturbation

SFE3 donne quant à lui de très bons résultats, analogues aux éléments quadrangulaires S4 [2] et BSQ [4].

L'étude a été étendue à des maillages dont la position des noeuds a été perturbée aléatoirement (cf. tab. 2). L'évolution de l'erreur relative en fonction de la perturbation d'un maillage régulier (cf. tab. 2) montre que le nouvel élément SFE3 est très peu sensible à la distorsion, contrairement aux premières formulations SFE1 et SFE2.

Un deuxième test classique concerne une plaque en forme de losange (angle interne minimale :  $60^\circ$ ) avec 2 côtés libres et 2 côtés en appui, soumise à une pression uniforme.

Les résultats dans les tableaux 3 et 4 présentent le rapport de la flèche normalisée avec la solution théorique, pour les deux orientations différentes (fig. 1b) et pour des maillages non-structurés (cf. tab. 5). L'élément SFE3 conduit aux meilleurs résultats dans la catégorie des éléments triangulaires, le S4 et le BSQ étant quadrangulaires.

Dans le cas de maillages irréguliers, les points intérieurs de la grille régulière sont perturbés aléatoirement, de manière analogue au cas du patch test (comme l'analyse des résultats se fondent sur le déplacement central de la plaque, celui-ci n'a pas été perturbé). Sur la figure de la table 5, l'erreur absolue est représentée en fonction de la perturbation nodale maximale. Cette erreur est la moyenne de l'erreur obtenue avec 100 maillages en configuration (A) pour une perturbation aléatoire fixée. L'élément SFE3 reste précis même pour des maillages très distordus, contrairement aux éléments SFE1 et SFE2.

L'exemple du panneau simplement courbé dans un sens, de Scordelis-Lo [6], supporté aux deux extrémités par un diaphragme rigide et chargé uniformément, montre le très bon compor-

Maillage	BSQ	S4	S3 (A)	SFE1 (A)	SFE2 (A)	SFE3 (A)
2x2	2,0559	2,1498	1,0381	1,0381	1,0381	1,1490
4x4	1,1851	1,2029	0,9821	0,9820	0,9820	1,0272
8x8	1,0248	1,0306	0,9746	0,9744	0,9744	0,9992
16x16	0,9987	1,0008	0,9810	0,9808	0,9807	0,9942
32x32	0,9946	0,9960	0,9876	0,9870	0,9870	0,9941

Tableau 3 – Parallélogramme : déplacement normalisé au centre de la plaque

Maillage	S3 (B)	SFE1 (B)	SFE2 (B)	SFE3 (B)
2x2	1,0957	1,0955	1,0955	1,2837
4x4	0,9846	0,9849	0,9849	1,0149
8x8	0,9656	0,9654	0,9654	0,9786
16x16	0,9711	0,9710	0,9710	0,9838
32x32	0,9799	0,9796	0,9796	0,9905

Tableau 4 – Parallélogramme : déplacement normalisé au centre de la plaque

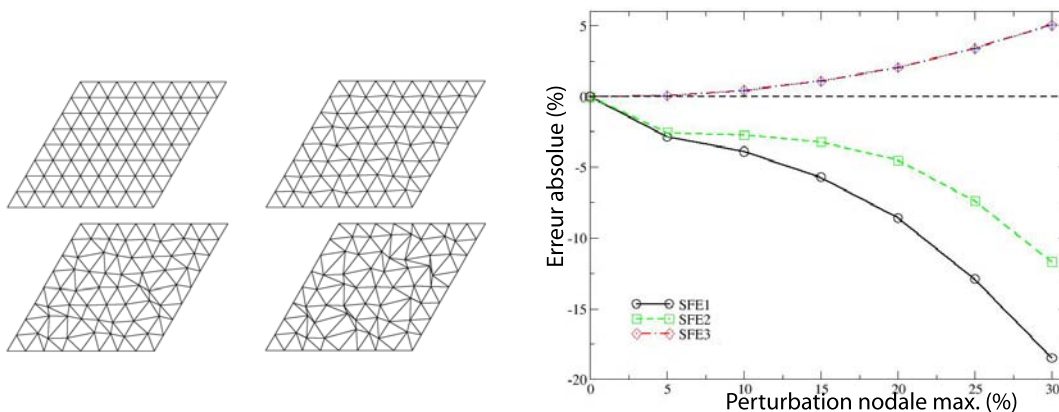


Tableau 5 – Plaque en losange : perturbation aléatoire du maillage régulier : 0%, 10%, 20% et 30%. évolution de l'erreur en fonction de cette perturbation

tement de l'élément SFE3 (fig. 2), comparé à plusieurs éléments RF, et à l'élément classique de Morley. En particulier, même en petites transformations, l'élément SFE3 est plus précis que l'élément de Phaal et Calladine [9].

Un premier exemple de grandes transformations est le comportement d'une poutre horizontale ( $L \times b \times h = 10 \times 1 \times 0.1$ ) encastée soumise à une force verticale. La figure 5 donne l'évolution des deux composantes de la force en fonction de la flèche. L'élément SFE3 conduit à des résultats quasi-identiques à la référence [13] (à maillage identique).

Le second exemple classique de la coque hémisphérique soumise à des forces radiales opposées (fig. 5) confirme d'une part le très bon comportement de l'élément SFE3 en grandes transformations, comparé à des éléments classiques avec degrés de liberté en rotation [13] et sa sensibilité quasi-nulle à la distorsion (fig. 6).

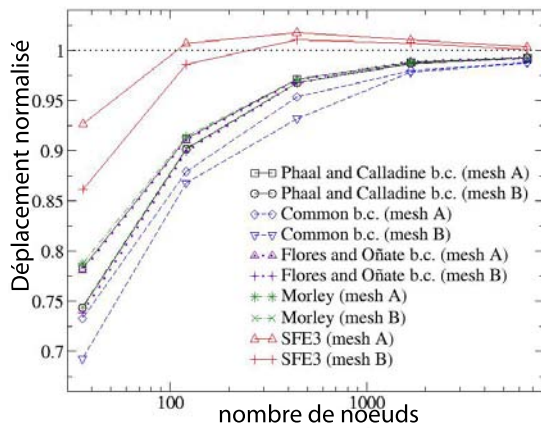


Figure 2 – Toit de Scordelis-Lo

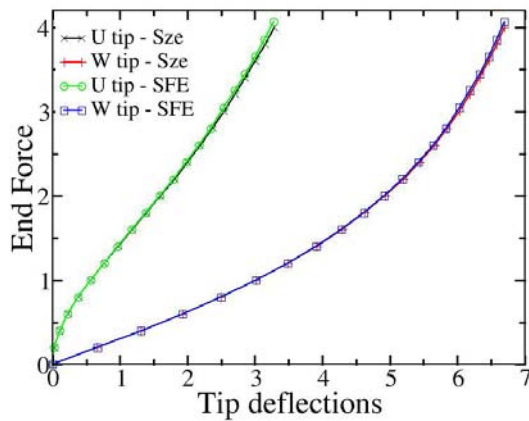


Figure 3 – Courbe déplacement-chargeement pour une poutre en flexion

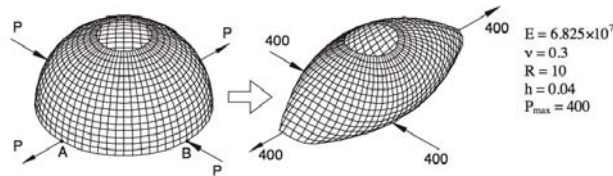


Figure 4 – coque hémisphérique soumise à des forces radiales, géométrie initiale et déformée

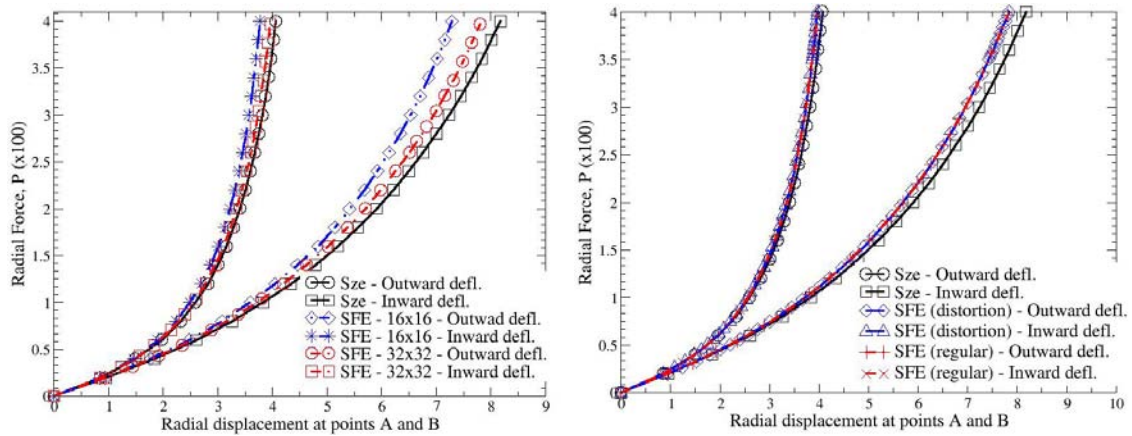


Figure 5 – Coque hémisphérique : maillages réguliers (fig gauche), influence de la distortion (fig droite)

## 4 Conclusion

Les éléments RF présentent en général une grande sensibilité aux distortions et non régularités de maillage. Les différents exemples présentés, montrent que l'élément RF proposé (SFE3), reste précis, même pour des maillages perturbés, en petites et en grandes transformations.

**Remerciements** : Les auteurs remercient la Région Bretagne pour leur aide au financement des travaux.

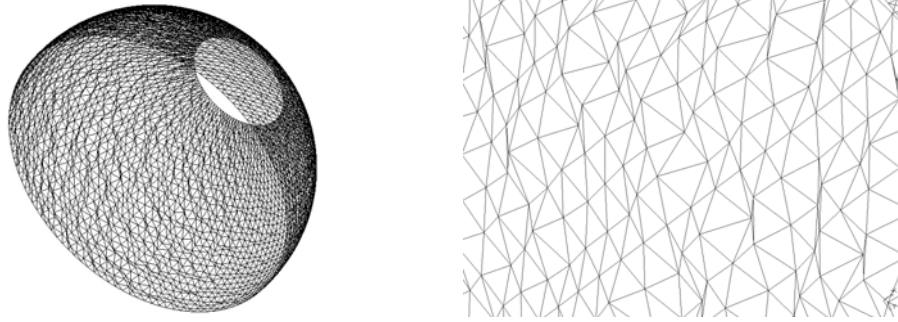


Figure 6 – Coque hémisphérique avec maillage aléatoire

## Références

- [1] J.-M. Battini. A rotation-free corotational plane beam element for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley InterScience, 75 :672–689, 2008.
- [2] M. Brunet and F. Sabourin. Analysis of a rotation-free 4-node shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley InterScience, 66 :1483–1510, 2006.
- [3] N. T. Dung and G. N. Wells. Geometrically nonlinear formulation for thin shells without rotation degrees of freedom. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Elsevier, in press, 2008.
- [4] F. G. Flores and C. F. Estrada. A rotation-free thin shell quadrilateral. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Elsevier, 196 :2631–2646, 2007.
- [5] F. G. Flores and E. Oñate. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69 :1521–1551, 2007.
- [6] M. Gardsback and G. Tibert. A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, in press, 2007.
- [7] H. Laurent and G. Rio. Formulation of a thin shell finite element with continuity  $c^0$  and convected material frame notion. *computational Mechanics*, 27 :218–232, 2001.
- [8] E. Oñate and F. G. Flores. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 194 :2406–2443, 2005.
- [9] R. Phaal and C. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. ii : An element for thin shells, with only translational degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley InterScience, 35 :979–996, 1992.
- [10] F. Sabourin and M. Brunet. Detailed formulation of the rotation-free triangular element “s3” for general purpose shell analysis. *Engineering Computations*, 23(5) :469–502, 2006.
- [11] F. Sabourin, J. Carbonniere, and M. Brunet. A new quadrilateral shell element using 16 degrees of freedom. *Numisheet 2008*, pages 393–398, 2008.
- [12] F. Sabourin and M. Vives. Eléments finis triangulaires pour la simulation de l’emboutissage. *Revue Européenne des éléments finis*, 10(1) :7–53, 2001.
- [13] K. Szea, X. Liua, and S. Lo. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40 :1551 – 1569, 2004.