



**HAL**  
open science

# Réanalyse dynamique de structures par une variante de la méthode des approximations combinées

Thomas Weisser, Nouredine Bouhaddi

► **To cite this version:**

Thomas Weisser, Nouredine Bouhaddi. Réanalyse dynamique de structures par une variante de la méthode des approximations combinées. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01413160

**HAL Id: hal-01413160**

**<https://hal.science/hal-01413160v1>**

Submitted on 9 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Réanalyse dynamique de structures par une variante de la méthode des approximations combinées

T. Weisser, N. Bouhaddi

Département Mécanique Appliquée (LMARC)  
Institut FEMTO-ST, UMR 6174 (Université de Franche-Comté, CNRS, ENSMM, UTBM)  
24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon  
{thomas.weisser, noureddine.bouhaddi}@univ-fcomte.fr

---

**Résumé** – Cet article propose une variante de la méthode de réanalyse de structures par approximations combinées. Tout en conservant les caractéristiques propres à la méthode originale, elle pallie certains problèmes de convergence des solutions approchées par la création d'une base unique de réduction, valable pour l'ensemble des modes contenus dans la bande de fréquence d'intérêt. On généralise ensuite l'emploi de cette base robuste dans le cadre de la sous-structuration dynamique et on compare sa prédictivité à celle d'une base classique.

**Mots clés** – Réanalyse approchée, sous-structuration, optimisation de structures.

---

## 1 Introduction

L'optimisation de structures complexes vise à modifier l'état d'une structure, parfois de manière importante, pour obtenir les meilleures performances possibles, au regard des contraintes imposées. Plusieurs solutions vont être calculées successivement afin d'explorer au mieux l'espace des paramètres de conception. Ces analyses multiples vont donc impliquer un fort coût de calcul qui se révèle bien souvent prohibitif. Ainsi, le but des méthodes de réanalyse approchée est d'approximer les réponses d'une structure modifiée sans résoudre le système complet des équations d'équilibre associées, mais en se basant uniquement sur les solutions initiales.

## 2 Réanalyse approchée

Les modifications appliquées à une structure peuvent être de différents types. Cette étude traite le cas des modifications paramétriques, agissant sur les grandeurs physiques caractéristiques de la structure (masse, raideur, épaisseur, ...). On trouvera cependant dans [4] des informations relatives au cas des modifications topologiques (ajout ou suppression de degrés de liberté).

Les méthodes de réanalyse approchée peuvent être divisées en deux catégories [1]. Les approximations locales, comme le développement en séries de Taylor ou en séries binomiales : elles sont basées sur des informations calculées en un point de conception unique. Ces méthodes sont très efficaces dans le cas de faibles modifications. Les approximations globales, comme les méthodes d'approximations polynômiales, de surfaces de réponse, de bases réduites [2], [3],

[7] : elles se fondent sur l'analyse de la structure pour un ensemble de points de conception et sont valables pour l'ensemble de l'espace de conception. Elles nécessitent cependant un effort de calcul plus important, en particulier pour des grandes structures.

On se propose d'exposer ici brièvement, à titre comparatif, la méthode développée par Masson [7]. Elle consiste à compléter une base de réduction initiale classique, par une base de taille minimale approximant l'effet statique des modes négligés et prenant en compte une information a priori sur les modifications appliquées à la structure initiale.

L'équation d'équilibre d'une structure dont certains paramètres de conception ont été modifiés peut s'écrire sous la forme :

$$[Z_0(\omega) + \Delta Z(\omega)]y(\omega) = 0$$

où,  $Z_0(\omega) = K_0 - \omega^2 M_0$  et  $\Delta Z(\omega) = \Delta K - \omega^2 \Delta M$ . On introduit alors la notion de forces associées aux modifications :

$$f_\Delta(\omega) = -\Delta Z(\omega)y(\omega)$$

La réponse  $y(\omega)$  étant inconnue, on va l'approximer à partir d'une base de condensation  $T_0$  classique, de type base modale tronquée, issue du système initial, enrichie de résidus statiques  $R[f_\Delta(\omega)]$ , telle que :

$$y(\omega) \simeq T_0 c(\omega) + R[f_\Delta(\omega)]$$

Ces résidus statiques sont construits à partir d'une base de forces représentative du sous-espace associé à l'ensemble des modifications. La matrice des résidus statiques est définie de la manière suivante :

$$R_\Delta^* = K^{-1} F_\Delta$$

où  $F_\Delta$  est la base des forces de modification.

Afin de garantir un conditionnement optimal et une taille minimale de la matrice des résidus statiques, on lui applique une décomposition en valeurs singulières. La base de réduction complète est donc de rang maximum et son conditionnement est faible :

$$T = [T_0 \ R_\Delta]$$

Cette méthode a été également étendue au contexte de la sous-structuration dynamique.

### 3 Principe de la méthode

La méthode des approximations combinées (méthode CA) développée par Kirsch [5] tente d'unifier ces deux approches : elle considère les termes d'une approximation locale en série binomiale comme étant les vecteurs d'une base de réduction globale.

#### 3.1 Formulation

Toute modification paramétrique de la structure initiale entraîne la formulation d'un nouveau problème aux valeurs propres. Pour chaque mode  $\nu$  de la structure modifiée, on peut écrire la relation d'équilibre suivante :

$$(K_0 + \Delta K)r^{(\nu)} = \lambda^{(\nu)}(M_0 + \Delta M)r^{(\nu)}$$

On exprime alors une solution approchée sous la forme d'une série binomiale,

$$r^{(\nu)} \simeq (I + B)^{-1} r_0^{(\nu)}$$

qui dépend des modifications apportées,  $B = K_0^{-1} \Delta K$  ( $K_0$  régulière) et de l'état initial du système,  $r_0^{(\nu)}$ .

On construit ensuite une base de réduction,

$$r_B^{(\nu)} = \begin{bmatrix} r_1^{(\nu)} & r_2^{(\nu)} & \dots & r_s^{(\nu)} \end{bmatrix}$$

à partir de la relation de récurrence :

$$\begin{cases} r_1^{(\nu)} = K_0^{-1}(M_0 + \Delta M)r_0^{(\nu)} \\ r_i^{(\nu)} = -B r_{i-1}^{(\nu)} \quad (i = 2, 3, \dots, s) \end{cases}$$

On applique enfin cette transformation au problème modifié,

$$K_R^{(\nu)} = r_B^{(\nu)T} K r_B^{(\nu)}$$

$$M_R^{(v)} = r_B^{(v)T} M r_B^{(v)}$$

pour obtenir le problème aux valeurs propres réduit :

$$K_R^{(v)} y^{(v)} = \lambda^{(v)} M_R^{(v)} y^{(v)}$$

Sa résolution donne la fréquence propre  $\lambda^{(v)}$  du mode modifié ainsi que le vecteur  $y^{(v)}$  qui permet d'exprimer le vecteur propre en coordonnées physiques grâce à la relation de réduction-reconstitution:

$$r^{(v)} = r_B^{(v)} y^{(v)}$$

On note qu'en général quelques vecteurs de base ( $s = 2, \dots, 6$ ) suffisent pour obtenir de bons résultats sur des cas académiques (treillis, ...) [6].

L'application de la méthode CA à des structures plus complexes a mis en évidence des problèmes de convergence de la série binomiale, d'où une mauvaise prédictivité sur les solutions approchées, en particulier dans le cas de modifications importantes. La variante proposée pour y remédier consiste à ne conserver que l'information « pertinente » issue des bases de réduction de chacun des modes étudiés, balayant ainsi au mieux l'espace des solutions. Pour cela, on concatène tout d'abord les bases  $r_B^{(v)}$  de chacun des  $m$  modes étudiés dans la transformation suivante :

$$r_B^* = [r_B^{(1)} r_B^{(2)} \dots r_B^{(v)} \dots r_B^{(m)}]$$

à laquelle on applique une décomposition en valeurs singulières :

$$r_B^* = U \Sigma V^T = U_1 \Sigma_1 V_1^T + U_2 \Sigma_2 V_2^T \Rightarrow r_B = U_1$$

On signale qu'il est nécessaire de régulariser préalablement les vecteurs des bases  $r_B^{(v)}$  afin d'éviter que les valeurs singulières d'ordre élevé et l'information qui leur est associée, ne deviennent prépondérantes vis-à-vis des premières.

On obtient alors un problème aux valeurs propres réduit global, dont la taille dépend du nombre de valeurs singulières dominantes retenues dans  $\Sigma_1$  :

$$K_R y = \lambda M_R y$$

En résolvant ce problème et en utilisant la relation de réduction-reconstitution  $r^{(v)} = r_B y^{(v)}$  on calcule finalement l'ensemble des solutions propres de la structure modifiée dans une bande fréquentielle d'analyse fixée a priori.

### 3.2. Application

La structure utilisée pour mettre en œuvre la méthode exposée ci-dessus est un portique composé d'environ 2500 degrés de liberté, encastré à ses pieds, sur lequel on distingue cinq zones de modifications (Figure 1).

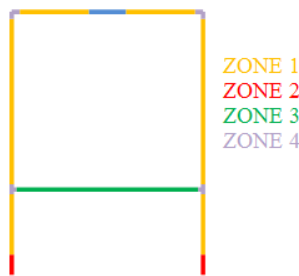


Figure 1 – Portique encastré avec détail des zones de modification

*Premier cas :* on modifie uniquement la zone 2 en l'assouplissant (module d'Young divisé par 1000). On effectue une réanalyse de la structure modifiée par la méthode CA classique. Celle-ci semble déjà limitée (Figures 2 et 3). Avec quatre vecteurs de base, elle ne parvient à approximer correctement que les trois premiers modes de la structure modifiée : les déformées

propres des modes étudiés ne sont pas toutes identifiées et l'erreur sur les fréquences propres est considérable.

On compare les déformées propres  $y$  à l'aide du critère de MAC (Modal Assurance Criterion) défini de la manière suivante :

$$MAC_y = \frac{\|y^{ref^T} y^{cal}\|^2}{\|y^{ref^T} y^{ref}\| \|y^{cal^T} y^{cal}\|}$$

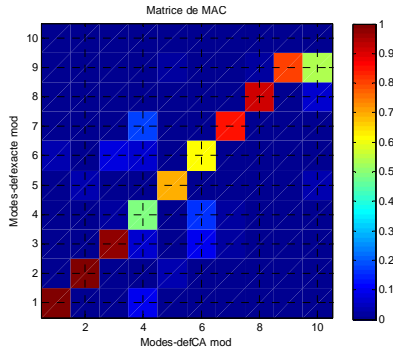


Figure 2 – Matrice MAC : résultats exacts/approchés avec 4 vecteurs de base (CA-classique)

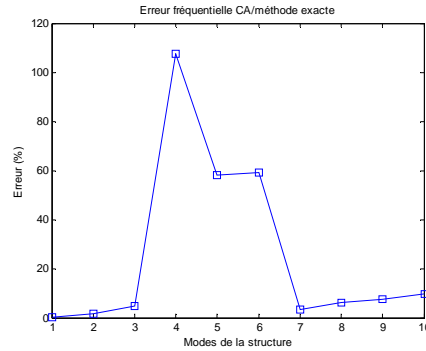


Figure 3 – Erreur sur les fréquences avec 4 vecteurs de base (CA-classique)

En revanche, les calculs effectués avec la variante de la méthode CA donnent des résultats très précis dès l'utilisation de deux vecteurs de base : les 10 déformées propres étudiées sont retrouvées et l'erreur sur les fréquences propres est inférieure à 2%.

*Second cas* : on applique à la structure plusieurs modifications importantes, de manière simultanée (zone 2 : module d'Young multiplié par 100 ; zone 5 : masse multipliée par 10, inertie multipliée par 2). On observe (Figure 4 et Tableau 1) que ces modifications entraînent d'importants changements du comportement de la structure. La méthode CA classique n'est alors plus prédictive : on ne retrouve que le premier des 20 modes propres étudiés.

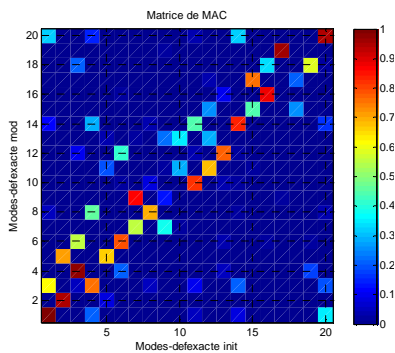


Figure 4 – Matrice MAC : résultats exacts structure initiale/modifiée

Modes	Fréquences propres – structure initiale (Hz)	Fréquences propres – structure modifiée (Hz)
1	4.98	4.88
2	10.63	11.02
3	13.53	12.45
4	31.09	15.97
6	48.87	26.86
8	57.54	56.05
10	96.73	86.78

Tableau 1 – Impact des modifications paramétriques sur les premières fréquences propres

La variante proposée permet de prédire les 20 premiers modes avec une erreur sur les fréquences propres inférieure à 10% et seulement 2% sur les 10 premières. La Figure 4 montre une bonne prédiction des 20 premières déformées propres ( $MAC \geq 0,9$ ).

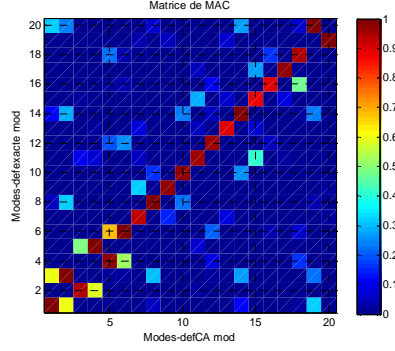


Figure 5 – Matrice MAC : résultats exacts/approchés avec 2 vecteurs de base (CA-variante)

## 4 Extension à la sous-structuration dynamique

Au regard de la robustesse et de l'efficacité de la méthode des approximations combinées, il semble pertinent de l'appliquer à la sous-structuration. On cherche ainsi à calculer une base de condensation par sous-structure s'appuyant sur un développement en série binomiale et permettant un assemblage aisé des différentes sous-structures condensées.

De manière générale, les méthodes de sous-structuration visent à exprimer la réponse  $y$  d'une sous-structure, issue de la décomposition d'une structure globale, en la projetant sur une base de Ritz constituée de modes normaux et de modes statiques. Par exemple, pour les méthodes à interface libre ou bloquée, cette projection s'exprime à partir d'une base tronquée  $Y$  et de déplacements statiques  $Y_S$  de la manière suivante :

$$y = Yc + Y_S f$$

où,  $c$  représente un ensemble de coordonnées généralisées et  $f$  le vecteur des efforts appliqués à la sous-structure.

En décomposant cette équation entre les degrés de liberté de jonction ( $j$ ) et les degrés de liberté internes ( $i$ ) de la sous-structure, on arrive à la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_j \\ Y_i \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} Y_{S_{jj}} f_j \\ Y_{S_{ij}} f_j \end{bmatrix}$$

Par substitutions, il est possible de réorganiser ce système sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ Y_{S_{ij}} Y_{S_{jj}}^{-1} & Y_i - Y_{S_{ij}} Y_{S_{jj}}^{-1} Y_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi la matrice de réduction  $T$ . La méthode proposée par Martinez [8] respecte cette formulation en utilisant les modes d'attache résiduels  $R$  et la base tronquée des modes normaux à interface libre  $\phi^e$ . On a alors, en l'absence de modes de corps rigide :

$$R = S - (\phi^e (\Lambda^e)^{-1} (\phi^e)^T) \begin{bmatrix} I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $S$  est la matrice de pseudo-flexibilité obtenue en résolvant le système associé à la sous-structure suivant :

$$KS = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}$$

et  $\Lambda^e$  est la matrice spectrale associée à la base de modes tronquée. On aboutit finalement à la transformation de condensation suivante :

$$T = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ R_{ij} R_{jj}^{-1} & \phi_i^e - R_{ij} R_{jj}^{-1} \phi_j^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ c \end{bmatrix}$$

### 4.1. Formulation

On cherche à déterminer une matrice de transformation de topologie identique prenant en compte la base robuste de réduction issue de la variante de la méthode CA exposée ci-dessus. Dans un premier temps, on considère une sous-structure  $k$  dans son état initial non modifié dont

on calcule les modes à interface libre en résolvant le problème aux valeurs propres :

$$\left(K_0^{(k)} - \lambda_0 M_0^{(k)}\right) r_0^{(k)} = 0$$

L'équation d'équilibre de la sous-structure modifiée, soumise aux seuls efforts de jonctions s'écrit sous la forme :

$$\left[\left(K_0^{(k)} + \Delta K^{(k)}\right) - \lambda \left(M_0^{(k)} + \Delta M^{(k)}\right)\right] r^{(k)} = f^{(k)}$$

On développe cette équation et on approxime les modes propres du système modifié par les modes initiaux précédemment calculés,  $\lambda K_0^{-1} M r \simeq r_0$  (pour alléger les notations, on omet l'indice de la sous-structure).

Après réorganisation, on obtient une expression de la solution approchée sous forme de série binomiale :

$$r \simeq (I + B)^{-1} r_0 + (I + B)^{-1} K_0^{-1} f$$

avec :  $B = K_0^{-1} \Delta K$  ( $K_0$  régulière). On choisit, en première approximation, de développer cette expression de la manière suivante :

$$r \simeq r_0 - B r_0 + B^2 r_0 + K_0^{-1} f \quad (1)$$

On peut alors écrire la solution approchée sous la forme :

$$r_a = r_B y + R f$$

où  $R = K_0^{-1}$ . En décomposant à nouveau cette relation entre les degrés de liberté de jonction ( $j$ ) et les degrés de liberté internes ( $i$ ) de la sous-structure, on obtient la relation suivante :

$$r_{a_i} = R_{ij} R_{jj}^{-1} r_{a_j} + \left[r_{B_i} - R_{ij} R_{jj}^{-1} r_{B_j}\right] y$$

et finalement la transformation de condensation de la sous-structure :

$$\begin{bmatrix} r_{a_j} \\ r_{a_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_j \\ y \end{bmatrix} = T_{CA} \begin{bmatrix} r_j \\ y \end{bmatrix}$$

avec :  $\phi_1 = R_{ij} R_{jj}^{-1}$  et  $\phi_2 = r_{B_i} - R_{ij} R_{jj}^{-1} r_{B_j}$  (à laquelle on applique éventuellement une DVS),  $r_B$  étant la base de réduction issue de la variante de la méthode des approximations combinées.

On calcule ensuite les matrices condensées de chaque sous-structure puis on effectue leur assemblage pour obtenir un problème aux valeurs propres condensé global du type :

$$\left(K_{CA}^g - \lambda M_{CA}^g\right) q = 0$$

Sa résolution donne les valeurs propres  $\lambda$  des modes du système complet modifié ainsi que les vecteurs propres associés  $q$ , en coordonnées mixtes. L'étape de restitution propre à chaque sous-structure permet d'obtenir les déplacements sur l'ensemble des degrés de liberté de la structure complète.

## 4.2. Application

On considère une structure constituée de trois plaques, encadrée sur un des bords longs, que l'on va décomposer en deux sous-structures plus une structure résiduelle qui ne sera pas condensée. Chaque sous-structure est ensuite divisée en plusieurs zones de modification.

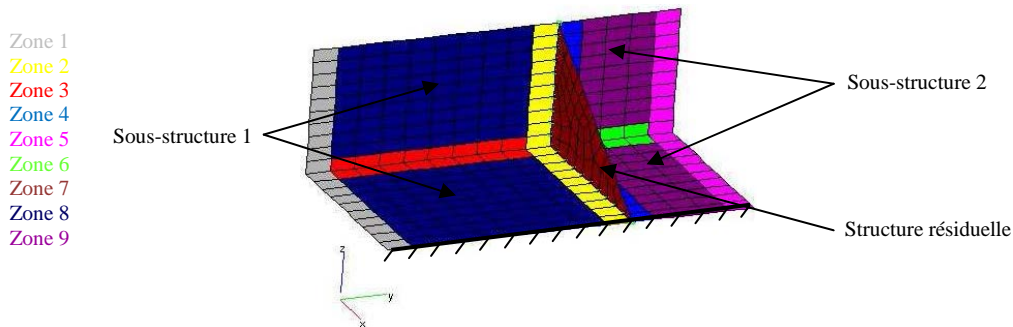


Figure 6 – Structure en équerre avec définition des zones modifiables

Le modèle éléments finis de la structure complète comporte 2800 degrés de libertés environ. Initialement, toutes les zones ont des propriétés identiques. On applique ensuite une série de modifications, détaillées dans le tableau suivant :

Zone	Module d'Young	Epaisseur
1	$\times 1.5$	$\times 1.5$
2	$\times 1.5$	$\times 1.5$
3	–	$\times 1.5$
4	–	$\times 1.5$
5	$\times 0.75$	$\times 0.75$
6	–	$\times 0.01$
8	$\times 0.25$	–
9	–	$\times 0.25$

Tableau 2 – Modifications par zone

On observe (Figure 7 et 8) que ces modifications entraînent d'importants changements du comportement de la structure initiale. On effectue une réanalyse par sous-structuration pour prédire les 20 premiers modes de la structure modifiée.

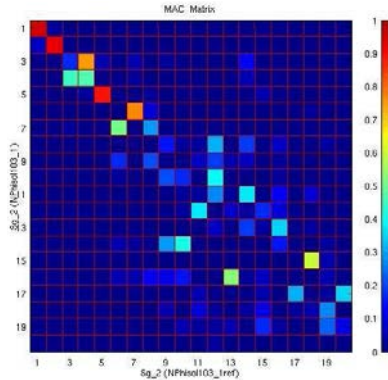


Figure 7 – Matrice MAC : résultats exacts structure initiale/modifiée

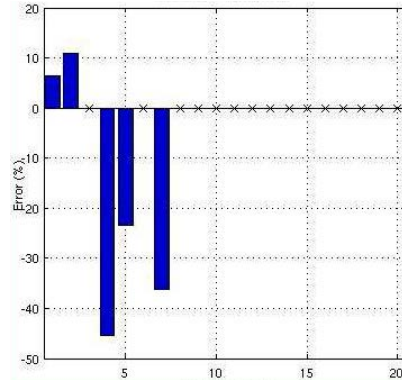


Figure 8 – Erreurs relatives sur les fréquences des modes appariés

On choisit de prendre en compte, dans la base de réduction  $r_B$ , deux vecteurs pour chaque mode ( $s = 2$  vecteurs de base). Dans ce cas, les décompositions en valeurs singulières sont inefficaces car les vecteurs composants  $r_B$  sont linéairement indépendants.

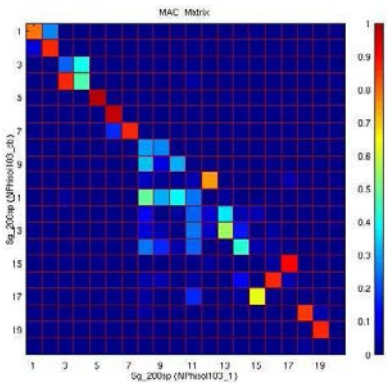


Figure 9 – Matrice MAC : résultats exacts/approchés avec 2 vecteurs de base

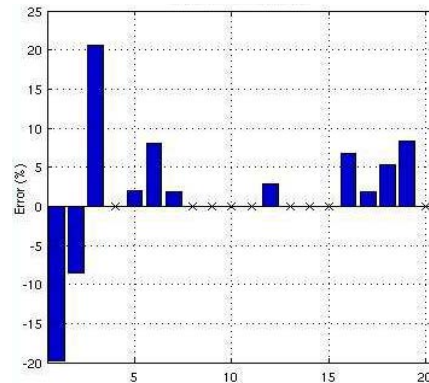


Figure 10 – Erreurs relatives sur les fréquences des modes appariés



On constate (Figure 9 et 10) une mauvaise qualité de prédiction : dix modes sont calculés avec d'importantes erreurs sur les fréquences et les déformées propres associées. Afin d'augmenter la prédictivité des bases de réduction on augmente, de manière simultanée pour chaque sous-structure, le nombre de vecteurs calculé par mode (vecteurs de base). En observant la matrice de *MAC* des déformées approchées appariées à une déformée exacte de la structure modifiée (Figure 11) on remarque tout d'abord une nette amélioration de la qualité de la réanalyse qui atteint un optimum avec quatre vecteurs de base ( $s = 4$ ). Ensuite la prédictivité a tendance à se détériorer et se stabilise. Cela signifie que les vecteurs ajoutés n'apportent pas d'information supplémentaire à la base de réduction et sont éliminés lors de la DVS.

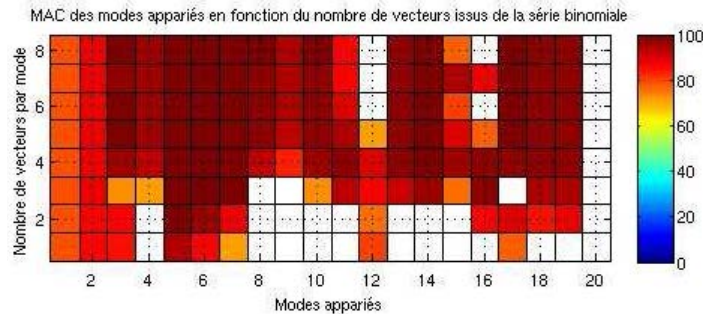


Figure 11 – Matrice *MAC* : modes appariés en fonction du nombre de vecteurs de base

On retrouve ces observations en examinant, pour chaque sous-structure, le conditionnement des puissances successives de la matrice *B* (Figure 12) ainsi que le nombre de vecteurs éliminés lors de la DVS (Tableau 3). A chaque itération du développement de la série binomiale : on constate bien un changement de comportement après la quatrième itération.

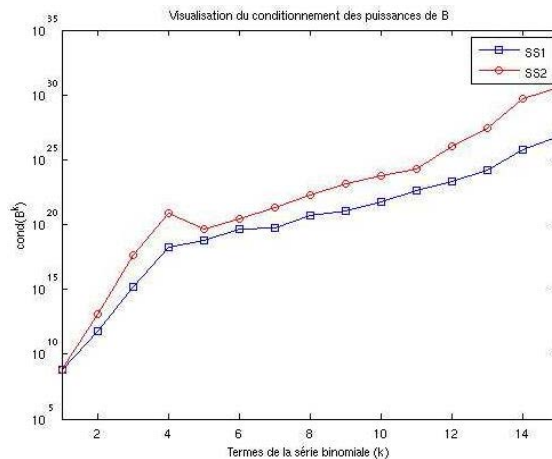


Figure 12 – Conditionnement des puissances de la matrice *B*

L'étude des résultats obtenus dans le cas optimal montre (Figure 13) que les 19 premières déformées sont très bien prédites ( $MAC \geq 0,85$ ) et que l'erreur relative sur les fréquences propres reste inférieure à 4% (Figure 14), pour un niveau de modification important. On souligne que la mauvaise précision sur les deux premiers modes est due à la structure : même une analyse du système modifié par la méthode de Martinez n'a pas donné de meilleurs résultats.

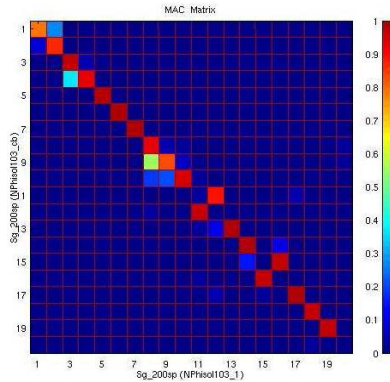


Figure 13 – Matrice MAC : résultats exacts/approchés avec 4 vecteurs de base

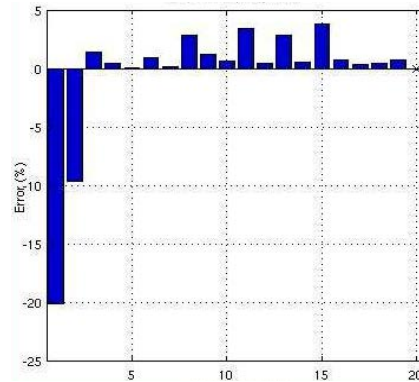


Figure 14 – Erreurs relatives sur les fréquences des modes appariés

Nombre de vecteurs de base	Taille de la base des modes de Sres	Taille de la matrice $\phi_1$	Taille de la matrice $\phi_2$ de SS1		Taille de la matrice $\phi_2$ de SS2		Taille du problème réduit
			Action DVS	Finale	Action DVS	Finale	
2	20	126	0	40	0	40	226
3	20	126	0	60	0	60	266
4	20	126	0	80	1	79	305
5	20	126	0	100	10	90	336
6	20	126	4	116	27	93	355
7	20	126	20	120	47	93	359
8	20	126	35	125	66	94	365

Tableau 3 – Détail de la composition des matrices de réduction

A titre de comparaison, des réanalyses ont été effectuées par la méthode de Martinez classique, prenant en compte les modes libres des sous-structures initiales, non modifiées. Dans un premier temps, seuls les modes compris dans un intervalle fréquentiel inférieur à deux fois la fréquence du vingtième mode de la structure globale ont été retenus soit, 21 modes libres pour la première sous-structure, 15 modes libres pour la seconde et 10 modes normaux pour la structure résiduelle non condensée. Le modèle condensé comporte 172 degrés de liberté. Les résultats montrent que la base de réduction ainsi construite n'est pas du tout prédictive : seuls quelques modes sont identifiés, faiblement corrélés aux modes exacts (Figure 15), avec d'importantes erreurs sur les fréquences (Figure 16).

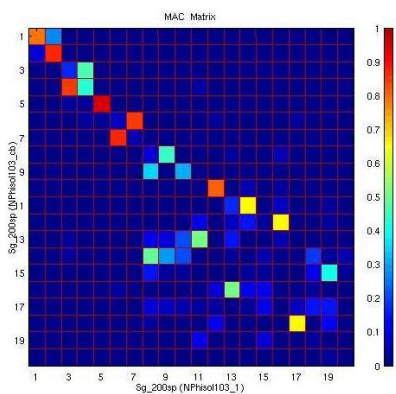


Figure 15 – Matrice MAC : résultats exacts/approchés par la méthode Martinez

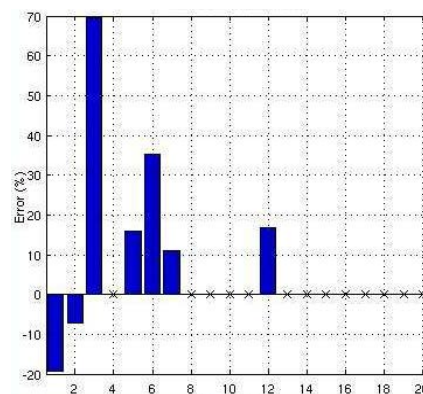


Figure 16 – Erreurs relatives sur les fréquences des modes appariés

Dans un second temps on a décidé de prendre en compte suffisamment de modes pour obtenir un problème réduit de taille identique à celui issu du cas optimal exposé ci-dessus (Tableau 3). On a ainsi retenu 100 modes libres pour la première sous-structure, 59 libres pour la seconde et 20 modes pour la structure résiduelle (non condensée). Comme illustré Figures 17 et 18, aucune amélioration des résultats n'est apportée.

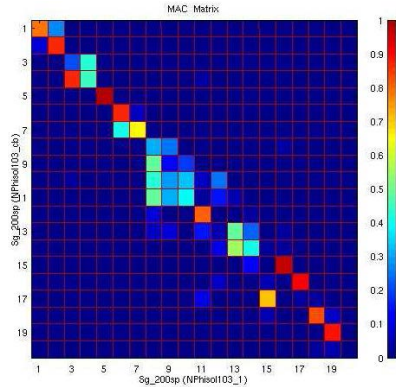


Figure 17 – Matrice MAC : résultats exacts/approchés par la méthode Martinez à taille de problème réduit équivalente

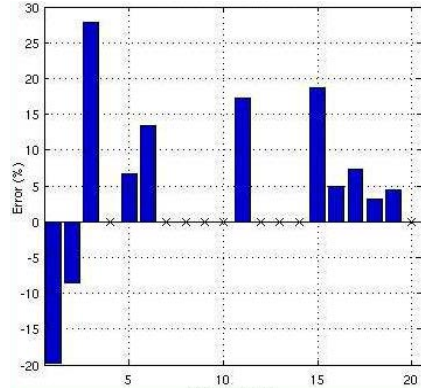


Figure 18 – Erreurs relatives sur les fréquences des modes appariés

Enfin, on montre les fonctions de réponse en fréquence (FRF) de la structure globale modifiée sur l'intervalle 50-300Hz obtenues par superposition modale des 20 premiers modes issus d'une réanalyse exacte (Figure 19) puis approchée par la méthode proposée (Figure 20). On introduit une valeur d'amortissement modal par défaut et on visualise la réponse aux degrés de liberté d'excitation. On note une bonne restitution des amplitudes aux résonances et antirésonances et un léger décalage fréquentiel provenant des faibles erreurs sur les fréquences propres approchées.

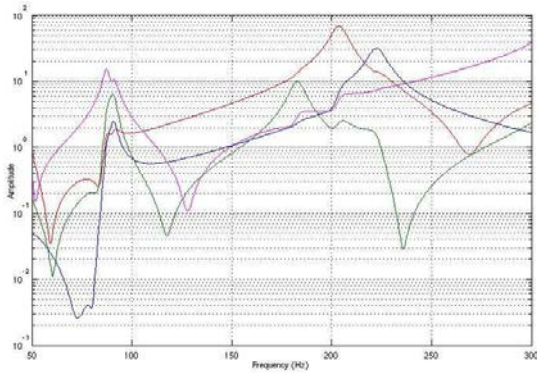


Figure 19 – Fonction de réponse en fréquence exacte

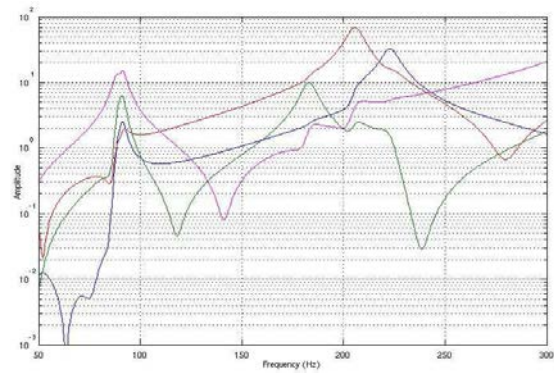


Figure 20 – Fonction de réponse en fréquence approchée

## 5 Conclusion

Cette étude a permis de mettre en évidence certains problèmes de la méthode CA dans le cas des vibrations linéaires. Les points sensibles demeurent en effet le choix des vecteurs de base et le conditionnement de la matrice de réduction. La variante proposée a permis de pallier ces difficultés. La qualité des résultats ainsi obtenus a incité à étendre la méthode à la sous-structuration dynamique. Grâce à la base des modes libres issue de la variante proposée, il est possible de calculer, pour chaque sous-structure, une matrice de condensation robuste de taille

minimale. De plus, la qualité des résultats obtenus sur une structure académique pour différents types de modifications a permis de valider l'approximation introduite équation (1). Des comparaisons par rapport à la méthode de Martinez ont mis en avant la robustesse de la matrice de réduction vis-à-vis de modifications importantes ainsi que la bonne prédictivité de la méthode. Des applications supplémentaires sont en cours afin d'effectuer des comparaisons vis-à-vis de méthodes de type [7] qui sont basées sur l'enrichissement de la base de Ritz par des vecteurs résiduels représentatifs des modifications paramétriques.

Les travaux en cours concernent les problèmes non linéaires. Dans ce cas, la réactualisation des équations d'équilibre représentant le comportement de la structure implique de nombreuses réanalyses conduisant à des temps de calcul élevés. La méthode proposée dans cet article peut être envisagée comme une solution efficace et précise.

## Références

- [1] A.M. Abu Kassim, B.H.V. Topping, Static reanalysis: a review, *Journal of Structural Engineering*, vol. 113, pp. 1029-1045, 1987.
- [2] E. Balmès, Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition, *AIAA Journal*, vol.34, pp. 1256-1260, 1996.
- [3] A. Bouazouni, G. Lallement, S. Cogan, Selecting a Ritz basis for the reanalysis of the frequency response functions of modified structures, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 199 (2), pp. 309-322, 1997.
- [4] U. Kirsch, *Design-oriented analysis of structures. Solid mechanics and its applications*. Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 2002.
- [5] U. Kirsch, A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 25, pp. 67-85, 2003.
- [6] U. Kirsch, M. Bogomolni, I. Sheinman, Efficient procedures for repeated calculations of the structural response using combined approximations, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 32, pp. 435-446, 2006.
- [7] G. Masson, B. Ait Brik, S. Cogan, N. Bouhaddi, Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 296, pp. 845-860, 2006.
- [8] D.R. Martinez, T.G. Carne, D.L. Gregory, A.K. Miller, Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis, *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pp. 140-152, 1984.