Choix d'une méthode de calcul pour l'identification et le suivi des charges en service des structures

Dominique Martini, Frédéric Mazerolle, Jean-Paul Charles, Christian Hochard

▶ **To cite this version:**

Dominique Martini, Frédéric Mazerolle, Jean-Paul Charles, Christian Hochard. Choix d'une méthode de calcul pour l'identification et le suivi des charges en service des structures. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412128

HAL Id: hal-01412128
https://hal.science/hal-01412128

Submitted on 8 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Choix d'une méthode de calcul pour l'identification et le suivi des charges en service des structures

D. Martini[1], **F. Mazerolle**[1], **J-P. Charles**[1], **Ch. Hochard**[1]

[1] Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
31, Chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20
{martini,mazerolle,hochard}@lma.cnrs-mrs.fr
jp.charles@univmed.fr

Résumé — Dans cet article nous présentons la méthode de calcul retenue pour l'identification du chargement d'une structure. Cette identification permet ensuite de caractériser complètement les champs de déformation, de déplacement et de contrainte si le comportement de la structure est supposé connu. Le principal atout de cette approche est qu'elle permet d'obtenir directement le chargement mais aussi les champs de déplacement, déformation et contrainte tout en réduisant le caractère mal posé du problème lié à une description riche de ces champs.

Mots clés — Problèmes Inverses, SHM, Identification Chargement.

Introduction

Dans le cadre du suivi de santé des structures (Structural Healt Monitoring, SHM), la mise en place de systèmes de mesures embarqués connaît un essor croissant. Actuellement, ce type de système est principalement orienté sur la détection de l'endommagement [1] à partir de l'identification directe des champs de déformation et/ou de déplacement. L'objectif est de détecter l'apparition d'un endommagement (ou la limite d'apparition) lors de l'utilisation.

L'identification du chargement d'une structure offre a priori bien plus de possibilités. Que ce soit pour la conception, la performance ou la surveillance d'une structure, la connaissance instantanée de son chargement permet de déterminer l'ensemble des données nécessaires à leur quantification. La description des champs de déplacement, déformation et de contrainte nécessite un nombre important de paramètres pour obtenir une bonne correspondance entre modèle et comportement réel de la structure. La description du chargement nécessite quant à elle un nombre beaucoup plus restreint de paramètres et permet de limiter ainsi le caractère mal-posé du problème d'identification.

Nous nous sommes intéressés à l'identification du chargement d'une structure à partir de mesures du champ de déformation. Pour cela, nous proposons une méthode de calcul inverse par éléments finis permettant l'indentification du chargement des structures. Ce choix a été retenu car cette méthode de calcul est la plus utilisée pour la conception des structures comme pour les problèmes d'identification de comportement matériau et/ou structure ([2]). Ces travaux font partis des outils nécessaires à une méthode fiable de SHM. Il nous a donc paru important d'utiliser la même méthode de calcul.

Dans toute la suite de cet article nous noterons ' l'opérateur transposé asssocié aux vecteurs et matrices.

1 Formulation et caractérisation du problème inverse

1.1 Description du problème

Considérons le problème direct d'élasticité linéaire de la structure Ω :

Trouver $(\vec{u},\sigma) \in \mathscr{U} \times \mathscr{S}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{div}(\sigma) + \vec{f}_d = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot \vec{n} = \vec{F}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_F \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \\ \sigma = \mathbb{K}\varepsilon(\vec{u}) = \mathbb{K}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}'\right)\right] \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $\vec{f}_d$ sont les efforts volumiques, $\vec{F}_d$ les efforts surfaciques appliqués sur le bord $\partial\Omega_F$ de Ω et $\vec{u}_d$ les déplacements imposés sur le bord $\partial\Omega_u$ de Ω. On suppose de plus que $\partial\Omega_F \cap \partial\Omega_u = \varnothing$ et $\partial\Omega_F \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega$.

Le problème que nous souhaitons résoudre est le problème inverse à celui-ci puisque nous supposons connus les champs de déplacement et/ou de contrainte (partiellement ou complètement) sur une partie $\partial\Omega_m = \partial\Omega_{mu} \cup \partial\Omega_{m\sigma}$ et l'on cherche à déterminer les champs de déplacement, de contrainte et d'efforts. On peut résumer cela sous la forme suivante :

Trouver $(\vec{u},\sigma,\vec{u}_d,\vec{f}_d,\vec{F}_d) \in \mathscr{U} \times \mathscr{S} \times \mathscr{U}_d \times \mathscr{F}_{vd} \times \mathscr{F}_{sd}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{div}(\sigma) + \vec{f}_d = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma = \mathbb{K}\varepsilon(\vec{u}) = \mathbb{K}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}'\right)\right] \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma \cdot \vec{n} = \vec{F}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \\ \vec{u} = \vec{u}_m \quad \text{sur } \partial\Omega_{mu} \\ \sigma = \sigma_m \quad \text{sur } \partial\Omega_{m\sigma} \end{cases} \tag{1}$$

où l'on note $\vec{u}_m$ le champ de déplacement mesuré sur la partie $\partial\Omega_{mu}$ de Ω et σ_m le champ de contrainte mesuré sur $\partial\Omega_{m\sigma}$. Dans un premier temps nous supposons les données mesurées exactes ie ne comportant aucune erreur liée à la mesure.

Une résolution intuitive de ce problème eq.(1) est de déterminer les champs de déplacement et de contrainte $(\vec{u},\sigma)$ de la structure Ω à partir des mesures sur les parties $\partial\Omega_{mu}$ et $\partial\Omega_{m\sigma}$, puis, dans un second temps, d'utiliser les équations du problème direct pour identifier les efforts et les déplacements imposés $(\vec{u}_d,\vec{f}_d,\vec{F}_d)$. Cependant, si l'on suppose connu le comportement de la structure, les champs $(\vec{u},\sigma)$ sont parfaitement définis par le chargement extérieur. Ainsi nous allons utiliser l'expression directe de ces champs en fonction du chargement pour obtenir la relation entre chargement et mesures.

Si l'on se réfère à la classification donnée dans [3], notre choix de résolution s'est principalement orienté sur la "bonne" définition des espaces de départ (champ de déformation) et d'arrivée (conditions de chargement) ainsi que sur les contraintes a priori imposées au modèle. L'objectif est d'obtenir une formulation adaptée au calcul en temps réel. Nous avons donc voulu éviter la régularisation du problème ([6]) nécessitant des procédés itératifs de résolution. Cela impose de définir un problème linéaire de dimension finie et d'en estimer précisément la stabilité. L'utilisation d'une formulation de type éléments finis paraît alors particulièrement adaptée à la formulation du problème que l'on souhaite développer.

Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à la formulation associée à la seule connaissance de m mesures du champ de déformation sur une partie $\partial\Omega_m$ de Ω.

1.2 Formulation par éléments finis du problème inverse

La formulation du problème inverse ainsi défini se met sous la forme :

$$\text{Trouver } (U, F_s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \text{ tels que :}$$
$$\begin{cases} \mathbb{K}U = F = \mathbb{A}F_s \\ \mathbb{B}U = \varepsilon_m \end{cases}$$

où U est le vecteur des déplacements nodaux, $\mathbb{K}$ la matrice de rigidité de la structure, F_s le vecteur des paramètres de chargement, ε_m le vecteur des mesures de déformation et $\mathbb{B}$ l'opérateur linéaire liant les déplacements nodaux aux déformations mesurées. F_s et $\mathbb{A}$ sont obtenus à partir du choix d'une base de l'espace du chargement et du choix des fonctions de forme de la base éléments finis du champ de déplacement.

Si l'on suppose les conditions d'existence et d'unicité du problème direct (inversibilité de $\mathbb{K}$) on obtient alors la formulation équivalente suivante :

$$\text{Trouver } (U, F_s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \text{ tels que :}$$
$$\begin{cases} U = \mathbb{K}^{-1}\mathbb{A}F_s \\ \mathbb{B}\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A}F_s = \varepsilon_m \end{cases}$$

Ce problème est linéaire. Si l'on appelle m le nombre de mesures et p la dimension de l'espace du chargement, une condition nécessaire de résolution par moindres carrés est que $m \geq p$. Une condition suffisante est que la matrice $(\mathbb{B}\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A})$ soit de rang p. Pour cela il suffit que les matrices $\mathbb{B}$ et $\mathbb{A}$ soit de rang p. La matrice $\mathbb{B}$ ne dépend que de la position des points de mesures sur la structure. Ainsi, si les mesures sont indépendantes alors le rang de $\mathbb{B}$ est au moins de m. La matrice $\mathbb{A}$ dépend du nombre n de degrées de liberté ($d^\circ dl$) et de p. Son rang est de p si et seulement si $n \geq p$ et que la base de l'espace du chargement est une famille libre. On remarque que $n < p$ ne permet pas de résoudre. Cela s'explique assez bien par le fait que, dans ce cas, le modèle n'est pas suffisamment riche pour décrire correctement la réponse du système à la sollictation des p paramètres de chargement.

Si nous revenons sur les conditions d'inversibilité de $\mathbb{K}$, il faut bloquer le mouvement de corps rigide de la structure. Nous avons pour cela deux possibilités :

- Utiliser l'équilibre pour réduire le nombre de paramètres de chargement à identifier et considérer que les degrés de liberté associés à ces paramètres sont bloqués.
- Choisir les degrés de liberté à bloquer en fonction de leur influence sur le conditionnement du système. On remarque que cela ne change rien à l'identification du chargement à partir du champ de déformation. Cela revient à définir un repère d'étude lié aux $d^\circ dl$ bloqués.

2 Mise en oeuvre

2.1 Etude de la stabilité du problème

La stabilité du problème dépend du conditionnement de la matrice $\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{K}^{-1}\mathbb{A}$. Ce conditionnement va caractériser la sensibilité de la solution vis à vis d'une perturbation des données. A priori, ce nombre dépend de p la dimension de $\mathscr{F}$, m le nombre de mesures et n le nombre de $d^\circ dl$.

Afin, d'étudier la stabilité de la formulation, nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux structures poutres. Ces structures présentent l'avantage d'avoir des solutions analytiques (SA) au problème, solutions vers lesquelles tendent les solutions du problème par éléments finis (EF) poutre.

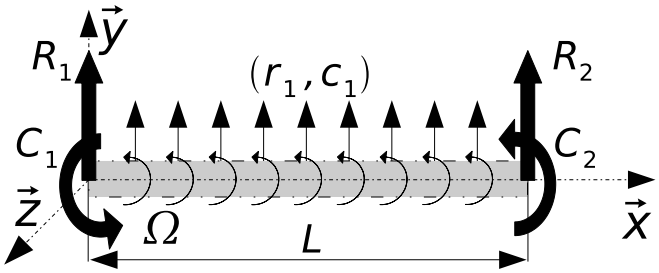

Figure 1 – Schématisation d'une poutre en flexion

On considère le problème général d'identification linéaire des p paramètres de chargement d'une poutre en flexion défini sur la figure 1. L'identification du vecteur P des paramètres de chargement peut se mettre sous la forme :

$$P = \min_{P \in \mathscr{P}} \|\varepsilon_m - GP\|^2$$

où ε_m est le vecteur des mesures aux points $(x)_{1 \leq i \leq m}$ et G est la matrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -x & f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ 1 & -x & f_1(x_2) & \cdots & f_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -x & f_1(x_m) & \cdots & f_p(x_m) \end{pmatrix}$$

Nous ne nous limiterons, pour l'instant, qu'à la présence d'un moment et d'une charge répartie modélisée par les fonctions $f_2(x)$ et $f_1(x)$. La formulation éléments finis correspondante est obtenue en explicitant les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ à partir des fonctions de répartitions d'efforts et de moments.

Considérons les cas de chargement présentés dans le tableau 1. Une étude du conditionnement de G permet de constater que celui-ci est quasi indépendant du nombre de $d^\circ dl$ et se stabilise en fonction du nombre de points de mesures. Une étude de l'écart à la solution en fonction du nombre de points de mesures permet de constater que celui-ci dépend du conditionnement de G et est inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de points de mesure. Cela justifie a priori la relation obtenue par une étude statistique de l'écart à la solution si l'on suppose que les mesures sont non corrélées et de distribution gaussienne [4, 5] donnée par :

$$\Delta P^2 = \Delta \varepsilon_m^2 \frac{G'G}{m}$$

où ΔP^2 et $\Delta \varepsilon_m^2$ sont les matrices de covariance des paramètres de chargement et des mesures de déformation. Les figures 2 et 3 montrent l'évolution du conditionnement de G en fonction de n et m pour les cas de chargement cités ci-dessus.

Cas	C_1	R_1	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	1	$-x$	1	0
1	1	$-x$	x	$e^{-(x-0.5)^2}$

Tableau 1 – Description des cas de régression

Nous pouvons conclure que la stabilité du système ne dépend pas de n. Cela permet d'utiliser des modèles (EF) riches permettant une bonne description de la structure afin de limiter les erreurs de mesures. Si l'on ajoute à cela une connaissance a priori du cas général de chargement de la

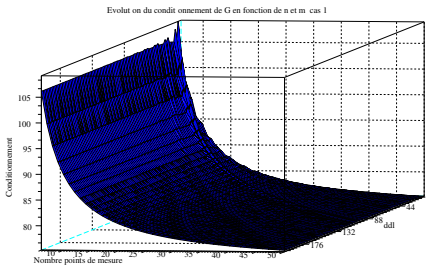

Figure 2 – Evolution du conditionnement de G en fonction de n et m, Cas 1

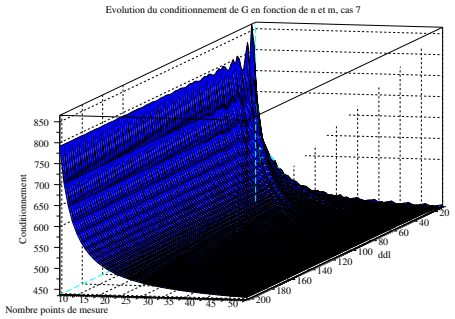

Figure 3 – Evolution du conditionnement de G en fonction de n et m, Cas 2

structure et un nombre de points de mesures maximal associé, cette méthode permet d'identifier de manière fiable le chargement d'une structure et d'obtenir les champs de déplacements et de contraintes associés.

On remarque que les résultats obtenus précédemment ne tiennent pas réellement compte du caractère poutre de la structure. Ainsi, ces résultats s'étendent tout à fait à des structures plus complexes. On notera que les sources d'instabilités du problème seront a priori plus liées à l'augmentation des paramètres de chargement de la modélisation qu'à ses $d°dl$.

2.2 Application à une structure poutre soumise à un chargement complexe

Afin de valider ces résultats, nous avons instrumenté une poutre en acier de section rectangulaire avec 9 jauges de déformation. Nous l'avons ensuite sollicitée en flexion à l'aide du montage présenté sur les figures 4 et 5. Ce montage permet d'imposer un moment connu à chacune des extrémités de la poutre et d'utiliser le poids propre de la poutre comme charge répartie. Nous avons aussi rajouté un effort ponctuel à un à l'abscisse 352 de la poutre.

Figure 4 – Photographie du banc de flexion

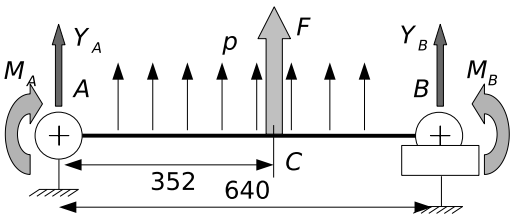

Figure 5 – Schéma du banc de flexion

Les déformations moyennes mesurées sont comprises entre 1×10^{-6} et 66.75×10^{-6} avec un écart maximum de 4×10^{-6} et un écart type maximum de 2.5×10^{-6}. Cela fait une erreur de référence de 3.7%.

La première identification est faite en utilisant l'équilibre, ie en éliminant les mouvements de corps rigides au point B. Le résultat de l'identification des paramètres de chargement est donné dans le tableau 2. Ces paramètres sont donnés en moment équivalent afin de pouvoir les comparer. On constate bien que la stabilité est limitée par le nombre de points de mesures et qu'elle se dégrade si on le réduit. On constate aussi que ce résultat est indépendant de n (pour n suffisamment grand) : l'énergie de déformation et l'écart au champ de déformation reconstruit ne dépendent pas de n.

Enfin, si l'on s'intéresse au cas de chargement général (on rajoute les inconnues de charge-

ment Y_B et M_B) on s'aperçoit que le choix des mouvements bloqués joue un rôle très important dans la stabilité du système. Ainsi, on remarque que suivant ce choix on peut obtenir un meilleur conditionnement du système que lors de l'identification précédente à 5 paramètres.

Grandeurs	M_A	$Y_A L$	FL_1	M_C	$pL^2/2$
Valeur max. ($\times 10^{-2} Nm$)	12.9	92.3	76.0	3.87	14.6
Ecart max. ($\times 10^{-2} Nm$)	3.34	32.4	22.8	2.66	57.2
Ecart max. (%)	26	35	30	69	395
Ecart type ($\times 10^{-2} Nm$)	0.791	5.52	3.46	1.98	8.54
Ecart type ($\times 10^{-2} Nm$)	0.791	5.52	3.46	1.98	8.54

Tableau 2 – Caractéristiques de la solution générale

3 Conclusion

Le principal objectif lié à l'identification du chargement en service des structures est d'améliorer la connaissance du chargement ce qui permet à terme d'optimiser la conception, les performances et la maintenance des structures. Nous avons constaté que cette identification ne dépendait quasiment pas de n, le nombre de $d^\circ dl$ modélisant le champ de déplacement de la structure. Ainsi, l'identification du chargement permet aussi de remonter à l'identification des champs de déplacement et de contraintes en utilisant une formulation plus stable que par un procédé directe. Cela permet l'utilisation de modèles (EF) très riches (dans la limite des capacités de calcul) permettant de limiter les sources d'erreur de modélisation et d'obtenir des informations très précises sur l'état de la structure. Ce résultat ouvre de nouvelles perspectives pour la mesure de champs en surveillance des structures puisque l'on obtient alors la reconstruction des champs de déplacement et de contrainte avec des modèles très riches sans la contre partie d'une très grande instabilité du problème.

Ces résultats ne sont possibles que si le comportement de la structure est supposé parfaitement connu. Cela semble limiter l'intérêt de ce type de méthode en SHM, cependant son extrême facilité de mise en oeuvre permet d'utiliser les modèles d'évolution de comportement actuellement développés notamment pour les composites afin de mettre à jour le comportement.

Références

[1] F.K. Chang. *Structural Health Monitoring 2007 : Quantification, Validation, and Implementation*, Stanford, DEStech Publication, Inc, 2007.

[2] A. Combescure, Ph. Gilles, D. Coutellier, S. Drapier, J-M. Bergheau. Mini symposium identification et mesure de champs, $8^{ième}$ *colloque national en Calcul des structures, Giens 2007*, Lavoisier, 2007

[3] Z. Nashed. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations, *In Constructive and computational methods for differential and integral equations*, A. Dold, B. Eckmann (eds.), Springer-Verlag (1974)

[4] F. Pukelsheim. *Optimal designs of experiments*, John Wiley and Sons Inc., 1993.

[5] G. Saporta. *Probabilités analyse des données et statistique*, Editions TECHNIP, 1990.

[6] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solutions of ill posed problems*, V.H. Winston Sons, 1977.