



**HAL**  
open science

# Atténuation de vibration par shunt piézoélectrique en présence d'incertitude sur les paramètres électriques

Claude Blanzé, Olivier Thomas

## ► To cite this version:

Claude Blanzé, Olivier Thomas. Atténuation de vibration par shunt piézoélectrique en présence d'incertitude sur les paramètres électriques. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412126

**HAL Id: hal-01412126**

**<https://hal.science/hal-01412126v1>**

Submitted on 8 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Atténuation de vibration par shunt piézoélectrique en présence d’incertitude sur les paramètres électriques

C. Blanzé, O. Thomas

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196,  
Conservatoire National des Arts et Métiers, case 353, 2 rue Conté 75003 Paris  
{claude.blanze,olivier.thomas}@cnam.fr

---

**Résumé** — On s’intéresse à la réduction des vibrations d’une structure mécanique par des éléments piézoélectriques aux bornes desquels on place un circuit électrique passif, appelé shunt résonant constitué d’une résistance  $R$  et d’une inductance  $L$ . L’adaptation du circuit électrique à la résonance mécanique dont on cherche à réduire l’amplitude permet d’obtenir de très forts niveaux d’atténuation. En revanche, une faible variation des paramètres électriques induit une diminution importante de l’atténuation recherchée. Après avoir fait une étude déterministe de sensibilité des paramètres autour de la position optimale, on modélise ces paramètres par des variables aléatoires et on s’intéresse à la caractérisation aléatoire des variations de la fonction de réponse en fréquence.

**Mots clés** — Atténuation de vibrations, piézoélectrique, shunt résonant, réponse probabiliste.

---

## 1 Introduction

On s’intéresse dans ce travail à la réduction des vibrations d’une structure mécanique par des éléments piézoélectriques aux bornes desquels on place un circuit électrique passif, communément appelé “shunt”. Dans le cas d’un shunt résonant (shunt “RL”), on utilise une résistance électrique et une inductance, placées aux bornes des éléments piézoélectriques. Cela permet d’obtenir un circuit électrique résonant que l’on peut accorder sur la résonance mécanique à atténuer. Ce dernier système s’apparente à un amortisseur mécanique à masse accordée. Lorsque l’accord est parfaitement réalisé, il permet d’atteindre de très forts niveaux d’atténuation. En revanche, une très faible perte d’accord fait chuter considérablement les performances du système.

Le but de ce travail est d’évaluer la sensibilité de la réponse vibratoire du système (et donc de la perte d’atténuation) en fonction des variations des paramètres électriques du shunt, autour de leur valeur optimale. Pour cela, les deux grandeurs électriques en jeu (la résistance  $R$  et l’inductance  $L$ ) sont représentées par des variables aléatoires et l’on se propose de caractériser la réponse vibratoire du système devenue aléatoire.

Une des études pionnière et détaillée sur la présente technique de shunt a été proposée dans les années 1990 [1]. Depuis, plusieurs développements ont vu le jour, à partir de formulations du problème électromécanique analytiques et semi-analytiques [2, 3, 4, 5, 6], ou numériques [7, 8]. En revanche, des études de performances et de sensibilité faisant appel aux techniques probabiliste sont rares. On peut citer [9]. Dans ce travail, après avoir rappelé les principales étapes de la modélisation du problème électromécanique couplé ainsi que les propriétés du shunt résonant, une analyse de sensibilité déterministe est présentée. Elle est fondée sur une approche modale, réduite à un seul mode mécanique de vibration couplé au circuit électrique (un modèle à deux degrés de liberté). L’incertitude sur les paramètres électriques est modélisée dans un cadre probabiliste par

des variables aléatoires. Ces variables d'entrée du modèle induisent une réponse probabiliste de la fonction de réponse en fréquence qui est obtenue par une méthode de Monte-Carlo.

## 2 Modèle théorique

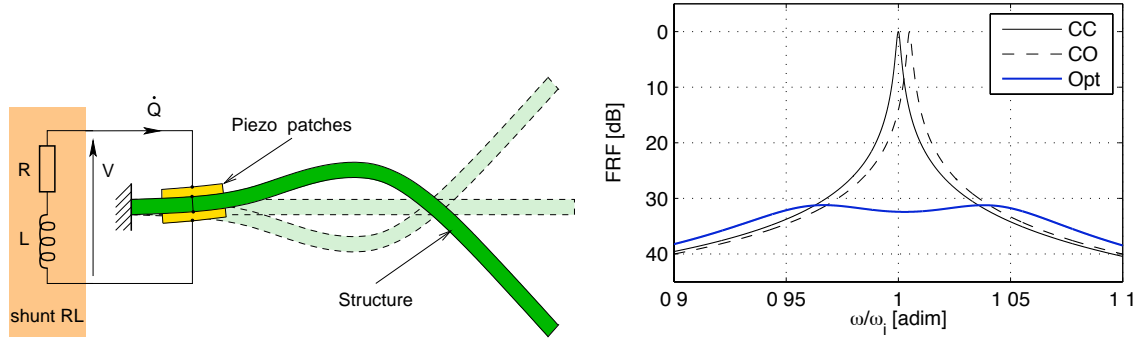


Figure 1 – Système étudié, munie des pastilles piézoélectriques et associé au shunt RL. Réponse optimale (“opt”) du système, au voisinage du mode atténué, pour  $\xi_i = 10^{-3}$  et  $k_i = 0.1$ , comparée au cas en court-circuit (“CC”) et en circuit ouvert (“CO”).

On s'intéresse au cas d'une structure mécanique munie de pastilles piézoélectriques de forme plane ou faiblement courbée, connectées à un circuit électrique. Les pastilles sont polarisées dans leur direction transverse (notée 3) et constituées d'un matériau homogène isotrope transverse, de plan orthogonal à la direction de polarisation. Elles sont recouvertes sur leurs faces supérieure et inférieure par des électrodes, qui imposent dans les pastilles un champ électrique dirigé suivant 3. C'est leur capacité à se déformer dans la direction longitudinale (la direction 1), sous l'action du champ électrique suivant 3, qui est utilisée ici (le couplage “31”). Les variables décrivant l'état électrique du circuit sont  $Q \equiv Q(t)$  et  $V \equiv V(t)$ , respectivement la charge électrique dans le circuit et la tension à ses bornes (fig. 1).

Soit en discrétisant la structure mécanique par la méthode des éléments finis, soit en utilisant un modèle analytique dans les cas de géométrie simple, puis en projetant le résultat sur les  $N$  premiers modes propres de vibration du système avec pastilles court-circuitées, le problème s'écrit de la façon suivante [5, 6, 8, 10] :

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i + \sqrt{C}\omega_ik_iV = F_i, & \forall i = 1, \dots, N & (1) \\ CV - Q - \sqrt{C}\sum_{j=1}^{\infty}\omega_jk_jq_j = 0 & & (2) \\ V = -L\ddot{Q} - R\dot{Q}. & & (3) \end{cases}$$

où  $q_i \equiv q_i(t)$  est la  $i$ -ième coordonnée modale,  $\omega_i$  est la  $i$ -ième pulsation propre en court-circuit (avec  $V = 0$ ),  $\xi_i$  est un coefficient d'amortissement modal,  $F_i \equiv F_i(t)$  correspond au forçage mécanique extérieur,  $C$  est la capacité électrique équivalente des pastilles piézoélectriques<sup>1</sup>.  $k_i$  est le facteur de couplage électromécanique modal du  $i$ -ième mode, qui caractérise le transfert d'énergie entre le  $i$ -ième mode mécanique et le circuit électrique. C'est un paramètre capital, qui

<sup>1</sup>Les pastille piézoélectriques se comportent électriquement comme une force électromotrice associée à un condensateur, dont la capacité est  $C$

garantit les performances du shunt [5]. On élimine  $V$  entre les équation (1), (2) et (3) puis on utilise les variables sans dimension suivantes :

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \tau_m, \quad \bar{V} = \frac{\tau_m \sqrt{C}}{h} V, \quad \bar{Q} = \frac{\tau_m}{h \sqrt{C}} Q, \quad (4)$$

avec  $\tau_m$  une constante de temps mécanique (inverse de la première pulsation propre par exemple),  $h$  une grandeur caractéristique de la structure (épaisseur d'une structure mince par exemple) et enfin on tronque le système à la  $i$ -ième coordonnées modale ( $q_j \equiv 0 \forall i \neq j$ ). On obtient alors :

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \hat{\omega}_i^2 q_i - \omega_i k_i Q = F_i(t), & (5) \\ \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q} + Q - \sum_{j=1}^N \omega_j k_j q_j = 0. & (6) \end{cases}$$

Dans les équations précédentes et dans toute la suite, toutes les variables sont sans dimension et les barres supérieures sont omises, pour alléger les notations.  $\hat{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 + k_i^2}$  correspond à la  $i$ -ième pulsation propre du système en court-circuit<sup>2</sup> (avec  $Q = 0$ ).  $\xi_e$  et  $\omega_e$  sont le facteur d'amortissement électrique et la pulsation électrique, respectivement reliés à  $R$  et  $L$  par :

$$\omega_e = \frac{\tau_m}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{2\xi_e}{\omega_e} = \frac{RC}{\tau_m}. \quad (7)$$

On étudie le comportement du système (5)-(6) en régime forcé sinusoïdal, c'est-à-dire avec  $F_i(t) = F \cos \omega t$ . La fonction de réponse en fréquence (FRF) du système déplacement / effort est alors :

$$H(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e \frac{\omega}{\omega_e}}{\frac{\omega^4}{\omega_e^2} - \omega^2 \left( 1 + \frac{\hat{\omega}_i^2}{\omega_e^2} + 4\xi_e \xi_i \frac{\omega_i}{\omega_e} \right) + \omega_i^2 + 2j\omega \left[ \frac{\xi_e}{\omega_e} (\hat{\omega}_i^2 - \omega^2) + \xi_i \omega_i \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2} \right) \right]}. \quad (8)$$

On peut montrer qu'il existe des valeurs particulières de  $\xi_e$  et  $\omega_e$  qui minimisent la valeur maximale du module de  $H(\omega)$  en fonction de  $\omega$ , au voisinage de  $\omega_i$ .  $|H(\omega)|$  présente alors deux résonances fortement atténuées, dont l'amplitude est inférieure à celle du système sans shunt résonant, par exemple en court-circuit (fig. 1). Cette atténuation *ne dépend que du facteur de couplage  $k_i$  et de l'amortissement mécanique  $\xi_i$* . Il en est de même pour les valeurs optimales des paramètres électriques, qui s'écrivent  $\xi_e = \xi_e^{\text{opt}} \simeq \sqrt{3/8} k_i$  et  $\omega_e = \omega_e^{\text{opt}} = \hat{\omega}_i$  [5].

Lorsque les valeurs des paramètres électriques s'écartent de leurs valeurs optimales, on constate que le comportement de système change et que l'atténuation diminue. Si on fait varier  $\omega_e$  au voisinage de  $\omega_e^{\text{opt}}$ , à  $\xi_e$  constant, on s'aperçoit que la courbe perd sa symétrie et que l'amplitude des deux résonances est modifiée (fig. 2). Lorsque c'est  $\xi_e$  qui varie, la FRF passe d'une situation à deux résonances (pour  $\xi_e$  faible et optimal) à une situation à une seule résonance (pour  $\xi_e$  grand), qui devient la situation circuit ouvert lorsque  $\xi_e$  est infini<sup>3</sup> (fig. 3).

### 3 Analyse de sensibilité

On se place dans le cas où l'amortissement mécanique  $\xi_i$  est supposé négligeable devant l'amortissement apporté par le shunt. On étudie l'influence des paramètres adimensionnés  $\xi_{ad} = \frac{\xi_e}{\xi_e^{\text{opt}}}$

<sup>2</sup> $\hat{\omega}_i$  est légèrement différente de la  $i$ -ième pulsation propre du système en circuit-ouvert à cause de l'effet des autres modes, négligés dans le présent travail [5].

<sup>3</sup>C'est la situation où la résistance  $R$  est infinie, ce qui bloque le passage du courant électrique

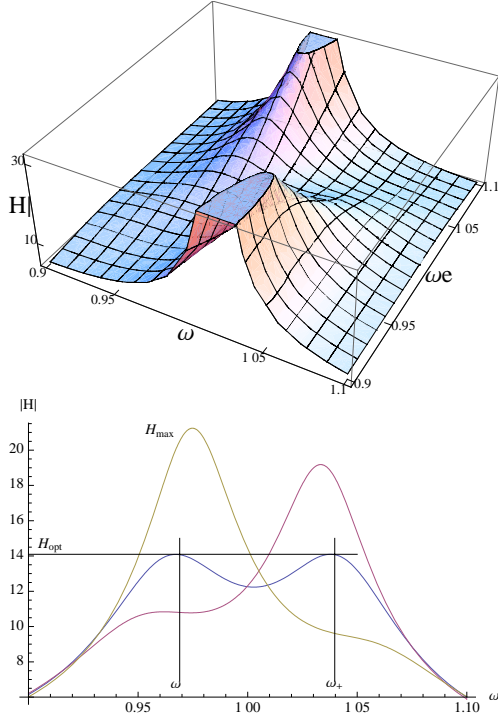


Figure 2 – Variation du module de la FRF  $|H(\omega)|$  en fonction de  $\omega_e$  autour de sa valeur optimale, pour  $\xi_e = \xi_e^{\text{opt}}$ .

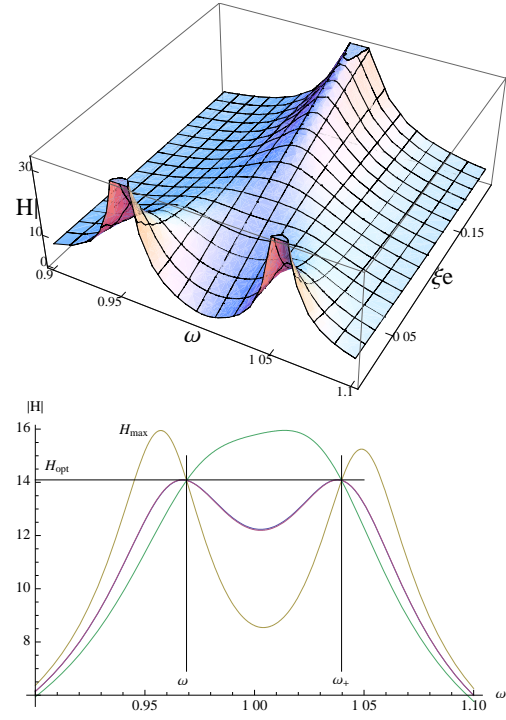


Figure 3 – Variation du module de la FRF  $|H(\omega)|$  en fonction de  $\xi_e$  autour de sa valeur optimale, pour  $\omega_e = \omega_e^{\text{opt}}$ .

et  $\omega_{ad} = \frac{\omega_e}{\omega_e^{\text{opt}}}$  sur la valeur maximale du module de la FRF  $H_{max}$  lorsque  $\omega$  varie. On peut montrer que cette valeur maximale est obtenue, selon les valeurs de  $(\xi_{ad}, \omega_{ad})$ , au voisinage de pulsations particulières notées  $\omega_-$ ,  $\omega_+$  et  $\omega_r$  dont on peut connaître les expressions analytiques (figs. 2 et 3).

Pour de faibles variations de  $(\xi_{ad}, \omega_{ad})$  autour de  $(1,1)$ , un développement limité de  $|H(\omega)|$  autour des valeurs  $\omega_-$  et  $\omega_+$  permet d'obtenir une expression explicite de  $H_{max}$  en fonction de  $\xi_{ad}$ ,  $\omega_{ad}$  et  $k_r$ . En revanche, pour des variations plus importantes (de l'ordre de 25%), il est nécessaire de construire une surface de réponse approchée pour une valeur particulière de  $k_i$  (fig. 4). Cette surface est construite en adaptant la discrétisation à la régularité de la réponse et en mesurant la qualité de l'approximation par une erreur relative de type quadratique.

## 4 Modèle probabiliste

Afin de prendre en compte l'effet de l'incertitude des paramètres sur la réponse  $H_{max}$ , on modélise ces paramètres  $\xi_{ad}$  et  $\omega_{ad}$  par des variables aléatoires. La construction du modèle probabiliste des variables aléatoires doit satisfaire un certain nombre de propriétés : il est raisonnable de supposer que les variables aléatoires soient du second ordre, qu'elles soient positives (le support de la densité de probabilité doit être inclus dans  $[0, +\infty)$ ).

Les paramètres  $\xi_{ad}$  et  $\omega_{ad}$  sont modélisés par des variables aléatoires uniformes centrées autour de la valeur moyenne unité et de supports  $[1 - a_1, 1 + a_1]$  et  $[1 - a_2, 1 + a_2]$ . On utilise ensuite une méthode de Monte-Carlo en utilisant la surface de réponse construite précédemment ce qui permet de faire un nombre de tirages suffisant pour assurer la convergence à moindre coût.

L'histogramme des réalisations converge vers la densité de probabilité du module de la FRF normé par le module optimal :  $H_{norm} = H_{max}/H_{max}^{\text{opt}}$  (fig. 5).

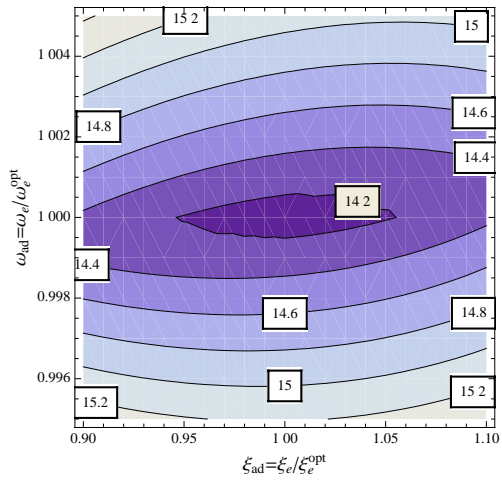


Figure 4 – Surface de réponse  $H_{max}$  en fonction de  $\omega_e/\omega_{opt}$  et de  $\xi_e/\xi_{opt}$ .

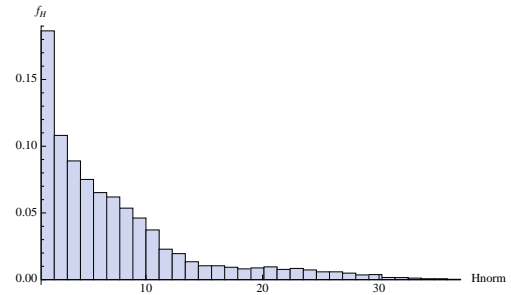


Figure 5 – Histogramme de  $H_{max}$  pour  $a_1 = a_2 = 0.25$

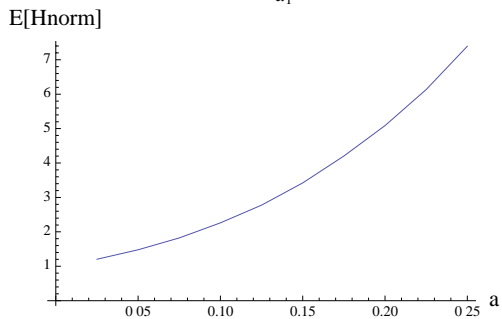
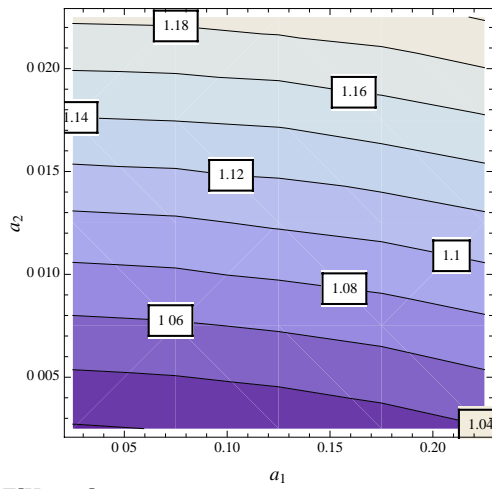


Figure 6 – Variation de l'espérance de  $H_{norm}$  en fonction de  $a_1$  et  $a_2$  (en dessous  $a_1 = a_2$ )

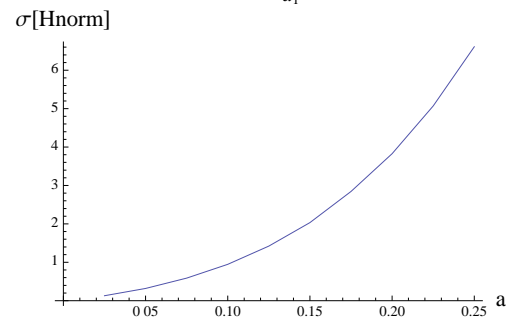
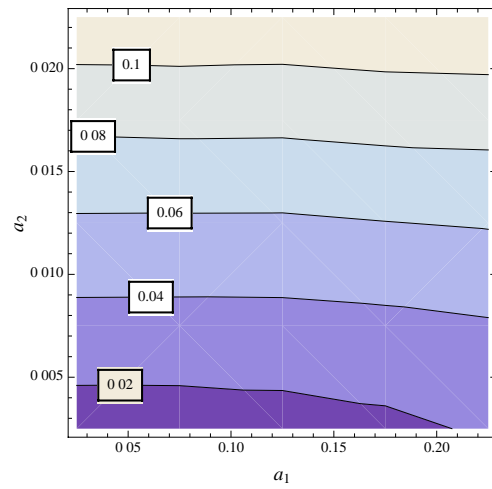


Figure 7 – Variation de l'écart-type de  $H_{norm}$  en fonction de  $a_1$  et  $a_2$  (en dessous  $a_1 = a_2$ )

Pour chaque couple de valeurs des paramètres d'entrée ( $a_1, a_2$ ), on peut ensuite calculer les deux premiers moments statistiques de la variable aléatoire de sortie  $H_{norm}$ . On peut noter la grande sensibilité de la moyenne et de l'écart-type de  $H_{norm}$  en fonction de la dispersion au niveau des variables aléatoires d'entrée et plus particulièrement de  $\omega_{ad}$  (figs. 6 et 7).

Le paramètre  $\omega_{ad}$  est beaucoup plus influent et gouverne pratiquement l'essentiel de la réponse de  $H_{norm}$ . On peut tracer l'évolution des moments statistiques de  $H_{norm}$  en fonction de ce seul paramètre (figs. 6 et 7).

## Références

- [1] N. W. Hagood and A. Von Flotow. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2) :243–268, 1991.
- [2] C. L. Davis and G. A. Lesieutre. A modal strain energy approach to the prediction of resistively shunted piezoceramic damping. *Journal of Sound and Vibration*, 184(1) :129–139, 1995.
- [3] G. A. Lesieutre. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *Shock and Vibration Digest*, 3 :187–195, May 1998.
- [4] C. H. Park. Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements. *Journal of Sound and Vibration*, 268 :115–129, 2003.
- [5] J. Ducarne, O. Thomas, and J.-F. Deü. Optimisation de dispositif passif d'atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. In *Actes du 8ème colloque national en calcul de structures*, Giens, France, May 2007.
- [6] J. Ducarne, O. Thomas, and J.-F. Deü. Performance and optimization of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 2009. En préparation.
- [7] C. H. Nguyen and S. J. Pietrzko. Fe analysis of a pzt-actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel r-l shunt circuit. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :1231–1239, 2006.
- [8] O. Thomas, J.-F. Deü, and J. Ducarne. Dynamics of an elastic structure with piezoelectric patches : finite-element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2009. submitted.
- [9] U. Andreaus and M. Porfiri. Effect of electrical uncertainties on resonant piezoelectric shunting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18(5) :477–485, 2007.
- [10] M. Porfiri, C. Maurini, and J. Pouget. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures*, 16(2) :323–331, 2007.