



**HAL**  
open science

# Atténuation des vibrations de structures complexes par shunt piézoélectrique-Application à un modèle simplifié d'aube de turbomachine

Aurélien Sénéchal, Olivier Thomas, Jean-François Deü, Pierrick Jean

► **To cite this version:**

Aurélien Sénéchal, Olivier Thomas, Jean-François Deü, Pierrick Jean. Atténuation des vibrations de structures complexes par shunt piézoélectrique-Application à un modèle simplifié d'aube de turbomachine. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412124

**HAL Id: hal-01412124**

**<https://hal.science/hal-01412124>**

Submitted on 8 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Atténuation des vibrations de structures complexes par shunt piézoélectrique - Application à un modèle simplifié d'aube de turbomachine

A. Sénéchal<sup>1,2</sup>, O. Thomas<sup>1</sup>, J.-F. Deü<sup>1</sup>, P. Jean<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés  
Case 353, Cnam, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 03  
{ aurelien.senechal, olivier.thomas, jean-françois.deu }@cnam.fr

<sup>2</sup> Snecma, Rond Point René Ravaud, 77550 Moissy-Cramayel Cedex  
pierrick.jean@sneema.fr

---

**Résumé** — On s'intéresse dans cet article à la réduction des vibrations d'un modèle simplifié d'aube de turbomachine obtenue en lui associant des patchs piézoélectriques shuntés. On propose une formulation éléments finis du problème électromécanique couplé qui permet de maximiser le facteur de couplage effectif, en optimisant l'épaisseur des patchs. Puis, pour étudier le cas particulier du shunt résonant, le problème est réduit par projection modale.

**Mots clés** — réduction de vibration, shunt résonant, éléments finis.

---

## 1 Introduction

On s'attache dans ce travail à la réduction des vibrations d'une structure mécanique par des éléments piézoélectriques aux bornes desquels on place un circuit électrique passif, communément appelé "shunt". On étudie ici un shunt composé d'une résistance électrique et d'une inductance, qui forment avec la capacité de l'élément piézoélectrique un circuit résonant, que l'on peut accorder sur la résonance mécanique à atténuer. Ce système s'apparente à un amortisseur mécanique à masse accordée. L'optimisation d'un tel système, dans le but de réduire les vibrations, se fait en deux étapes. D'une part, il s'agit d'adapter le circuit électrique à la structure mécanique. Cette opération est bien connue et a été notamment étudiée dans [1]. D'autre part, il faut choisir les dimensions et les positions des éléments piézoélectriques. Cette étape nécessite une modélisation électromécanique complète du système. Comme cela a été montré dans [2], l'optimisation consiste à maximiser le facteur de couplage électromécanique entre les éléments piézoélectriques et le mode mécanique qu'il s'agit d'amortir, et cela de façon indépendante du choix des composants du circuit électrique.

Ce travail propose d'étendre les résultats obtenus sur des structures simples de type poutre au cas d'un modèle simplifié d'aube de turbomachine. Pour cela, une formulation éléments finis (EF) originale du problème électromécanique est utilisée. Moyennant certaines hypothèses au niveau électrique, le problème couplé est défini en terme de variables mécaniques locales (définies au nœud du maillage) et de variables électriques discrètes (définies pour chaque pastille piézoélectrique) [3]. Cette formulation est utilisée pour évaluer les performances du shunt et optimiser l'atténuation apportée sur les premiers modes de vibration d'une aube.

## 2 Formulation du problème électromécanique

Un certain nombre d'hypothèses (patches fins, polarisés dans la direction transverse et recouverts d'électrodes d'épaisseur négligeable [3]) permettent de remplacer les variables électriques locales du problème électromécanique couplé par une paire de variables discrètes par pastille piézoélectrique (la différence de potentiel entre les électrodes  $V^{(p)}$  et la charge électrique  $Q^{(p)}$  présente dans les électrodes, pour le  $p$ -ième patch). Après discrétisation par éléments finis et en notant  $\mathbf{U}$  le vecteur des déplacements nodaux et  $\mathbf{V}$  le vecteur des différences de potentiel, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{K}_m$  sont les matrices de masse et de rigidité de la structure mécanique,  $\mathbf{K}_c$  la matrice de couplage électromécanique,  $\mathbf{K}_e$  la matrice diagonale des capacités des pastilles piézoélectriques,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{Q}$  les vecteurs des efforts mécaniques extérieurs et des charges contenues dans les électrodes de chaque pastille. Selon que les patches sont court-circuités ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ) ou en circuit ouvert ( $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ), le problème homogène associé à la formulation discrétisée (1) prend l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_m \mathbf{U} &= \mathbf{0} && \text{court-circuit,} \\ \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T) \mathbf{U} &= \mathbf{0} && \text{circuit ouvert.} \end{aligned} \quad (2)$$

L'effet du couplage électromécanique en circuit ouvert sur la structure élastique apparaît alors comme un terme de raideur ajoutée  $\mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T$ . La résolution de (2) et (3) donne respectivement les modes propres en court-circuit ( $\omega_i, \Phi_i$ ) et ceux en circuit-ouvert ( $\hat{\omega}_i, \hat{\Phi}_i$ ).

Un modèle d'ordre réduit du problème discrétisé (1) peut être obtenu par projection du déplacement mécanique sur les  $N$  premiers modes en court-circuit, soit :  $\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i q_i(t)$ . Le problème se ramène alors à la résolution du système couplé suivant [3, 4] :

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)} V^{(p)} = F_i, & \forall i \in \{1 \dots N\}, \\ C^{(p)} V^{(p)} - Q^{(p)} - \sum_{i=1}^N \chi_i^{(p)} q_i = 0, & \forall p \in \{1 \dots P\}, \end{cases} \quad (4)$$

avec  $F_i = \Phi_i^T \mathbf{F}$  le forçage au  $i$ -ème mode,  $C^{(p)}$  la capacité de la  $p$ -ième pastille piézoélectrique et  $\chi_i^{(p)}$  le coefficient de couplage associé au  $i$ -ème mode et à la  $p$ -ième pastille, tel que :

$$\begin{pmatrix} \chi_i^{(1)} & \chi_i^{(2)} & \dots & \chi_i^{(P)} \end{pmatrix} = \Phi_i^T \mathbf{K}_c, \quad \forall i \in \{1 \dots N\}. \quad (5)$$

Ces coefficients de couplage  $\chi_i^{(p)}$  sont liés aux classiques facteurs de couplage effectifs  $k_{\text{eff},i}$  qui caractérisent, pour chaque mode, l'échange d'énergie entre la structure mécanique et les patches piézoélectriques :

$$k_{\text{eff},i}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2} \simeq \sum_{p=1}^P \left( k_i^{(p)} \right)^2 \quad \text{avec} \quad k_i^{(p)} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}} \omega_i}, \quad (6)$$

$k_i^{(p)}$  étant le facteur de couplage modal de la  $p$ -ième pastille avec le  $i$ -ème mode.

## 3 Détermination de la matrice de couplage

Une procédure éléments finis pour discrétiser la formulation variationnelle du problème électromécanique conduit à écrire la contribution piézoélectrique à la variation de l'énergie interne de la manière suivante [3] :

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij} (\delta u) d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_c \mathbf{V}, \quad (7)$$

avec  $e_{kij}$  le tenseur d'ordre 3 des constantes piézoélectriques,  $\varepsilon_{ij}$  le tenseur des déformations et où  $n_k$ ,  $h^{(p)}$  et  $\Omega^{(p)}$  sont respectivement la direction de polarisation, l'épaisseur et le volume de la  $p$ -ième pastille. On considère ici une pastille plane dont la direction de polarisation, qui est aussi celle d'isotropie transverse, est confondue avec l'axe 3 du repère global. Le calcul de  $\mathbf{K}_c$  peut alors se faire directement dans le repère global du système. L'expression de la matrice de couplage élémentaire pour le  $p$ -ième patch, en adoptant la notation de Voigt, s'écrit par conséquent :

$$\mathbf{K}_c^e = \frac{1}{h^{(p)}} \int_{\Omega^e} \mathbf{e}^T \mathbf{B} d\Omega, \quad (8)$$

où  $\mathbf{B}$  est l'opérateur gradient discrétisé,  $\Omega^e$  le volume de l'élément et  $\mathbf{e} = (e_{31}, e_{32}, e_{33}, 0, 0, 0)^T$  le vecteur des constantes piézoélectriques tel que  $e_{\alpha} = e_{k\alpha} n_k$ ,  $\alpha = 1, \dots, 6$ . L'élément qui a été retenu pour mener les applications numériques est un tétraèdre à 10 nœuds (TET10). Une intégration numérique à 4 points de Gauss dans l'élément physique permet de déterminer  $\mathbf{K}_c^e$  :

$$\mathbf{K}_c^e = \frac{1}{h^{(p)}} \mathbf{e}^T \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \right) \Omega^e, \quad (9)$$

en notant  $\mathbf{B}_i$  la matrice  $\mathbf{B}$  évaluée au  $i$ -ème point de Gauss.

## 4 Applications éléments finis

### 4.1 Cas d'une poutre

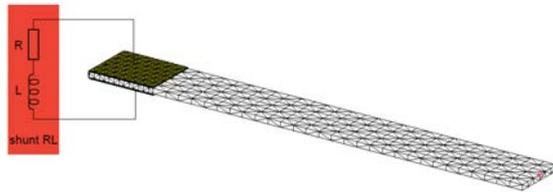


Figure 1 – Poutre : AU4G,  $170 \times 20 \times 2$  mm.  
Patches : PIC151,  $25 \times 20 \times 0.5$  mm

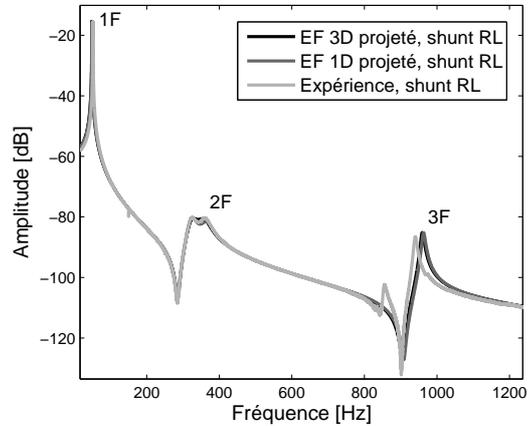


Figure 2 – FRF observée en bout de poutre

Afin de valider la méthode de calcul de la matrice de couplage, on modélise une poutre encastrée-libre munie de deux pastilles piézoélectriques montées en série avec des éléments finis TET10 (Fig. 1). Les résultats sont comparés à ceux du modèle EF 1D et aux données expérimentales issues de [3]. D'après l'équation (1), la matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$  correspond à des efforts piézoélectriques nodaux par unité de tension ( $\text{N.V}^{-1}$ ). La figure 3 représente ces efforts sous forme de vecteur en chacun des nœuds du maillage. Le couplage entre le voltage appliqué aux électrodes (direction 3) et l'élongation du patch dans la direction 1 (couplage "31") est nul partout sauf sur les bords de la pastille (Fig. 3(a)). Cela rejoint le fait que l'action piézoélectrique s'effectue par l'intermédiaire de densités surfaciques d'efforts aux extrémités du patch [5]. En revanche, le couplage "33" intervient sur tous les nœuds des faces supérieures et inférieures (Fig. 3(b)).

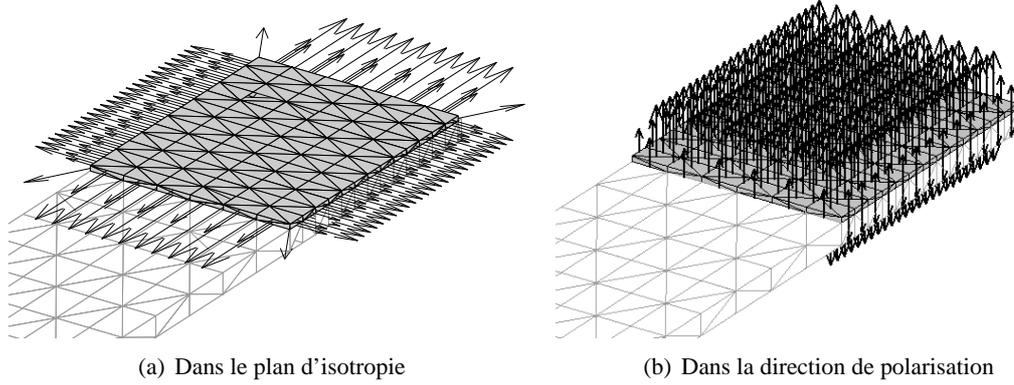


Figure 3 – Composantes de la matrice de couplage aux nœuds du patch supérieur

Modes	Fréquence court-circuit [Hz]			Fréquence circuit ouvert [Hz]		
	$f_i$ EF 3D	$f_i$ EF 1D	$f_i$ Exp.	$\hat{f}_i$ EF 3D	$\hat{f}_i$ EF 1D	$\hat{f}_i$ Exp.
1F	48.66	48.96	51.46	48.98	49.42	51.98
2F	335.67	337.1	335.4	338.27	340.7	338.5
3F	949.67	951.8	926.8	956.42	960.6	931.4

Facteur de couplage effectif et modal					
Modes	$k_i$ EF 3D	$k_{\text{eff},i}$ EF 3D	$k_i$ EF 1D	$k_{\text{eff},i}$ EF 1D	$k_{\text{eff},i}$ Exp.
1F	0.132	0.115	0.143	0.137	0.143
2F	0.142	0.124	0.150	0.145	0.136
3F	0.135	0.119	0.140	0.137	0.100

Modes	Erreur fréq. court-circuit		Erreur fréq. circuit ouvert		Erreur facteur de couplage	
	$(\Delta f_i/f_i)^{3D/1D}$	$(\Delta f_i/f_i)^{3D/Exp}$	$(\Delta \hat{f}_i/\hat{f}_i)^{3D/1D}$	$(\Delta \hat{f}_i/\hat{f}_i)^{3D/Exp}$	$(\Delta k_{\text{eff}}/k_{\text{eff}})^{3D/1D}$	$(\Delta k_{\text{eff}}/k_{\text{eff}})^{3D/Exp}$
1F	0.61%	5.44%	0.89%	5.77%	16.06%	19.58%
2F	0.42%	-0.08%	0.71%	0.07%	14.48%	8.82%
3F	0.22%	2.47%	0.43%	-2.68%	13.14%	-19.00%

Tableau 1 – Fréquences propres (court-circuit et circuit ouvert) et facteurs de couplage issus des calculs EF 3D, 1D et de l'expérience. Erreurs correspondantes.

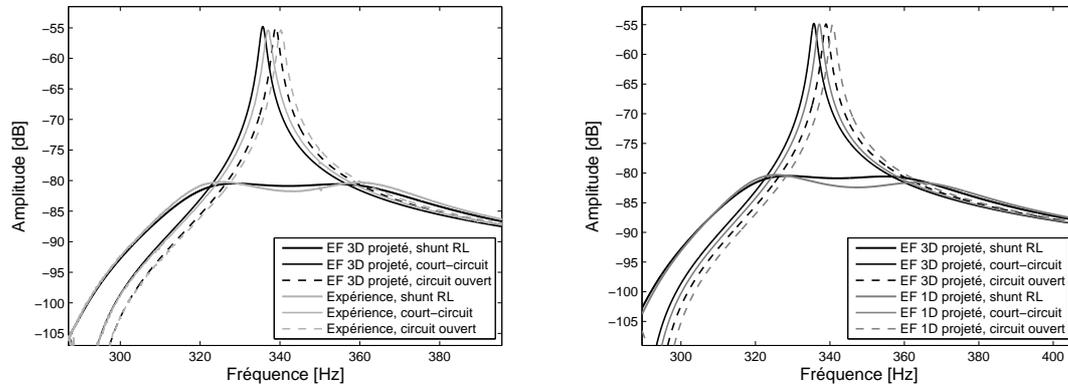
Le tableau 1 permet de comparer les fréquences propres ( $f_i = \omega_i/2\pi$ ) et les facteurs de couplage de la poutre, calculés avec le présent modèle EF 3D, avec ceux provenant du modèle EF 1D et des expériences de [3]. Le facteur de couplage modal équivalent pour un système de deux pastilles identiques montées en série est donné par  $k_i = \sqrt{(k_i^{(1)})^2 + (k_i^{(2)})^2} = \sqrt{2/C} (\chi_i/\omega_i)$  (Eq. 6). L'erreur relative sur le facteur de couplage effectif est donnée par

$$\frac{\Delta k_{\text{eff},i}}{k_{\text{eff},i}} = \frac{\hat{f}_i \Delta \hat{f}_i - f_i \Delta f_i}{\hat{f}_i^2 - f_i^2} + \frac{\Delta f_i}{f_i} \approx \frac{\hat{f}_i \Delta \hat{f}_i - f_i \Delta f_i}{\hat{f}_i^2 - f_i^2}. \quad (10)$$

Un bon accord est obtenu entre les résultats des modèles EF 1D et 3D, ce qui valide ce dernier (moins de 1% d'écart). On observe des différences plus marquées pour les coefficients de couplage. Ceci s'explique par l'équation (10) qui appelle deux remarques. Premièrement, une petite erreur en fréquence conduit à une erreur importante sur le calcul des  $k_{\text{eff},i}$  de part la faible valeur de  $\hat{f}_i^2 - f_i^2$ . De plus, pour un  $\Delta f_i$  et un  $\Delta \hat{f}_i$  donné, l'erreur sur  $k_{\text{eff}}$  sera plus faible en basse fréquence qu'à fréquence plus élevée.

Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) de la poutre munie d'un shunt résonant accordé sur le deuxième mode de flexion, noté 2F, sont calculées à partir du système (4) tronqué à  $N = 10$

modes. Les deux modèles éléments finis concordent avec l'expérience (Fig. 2 et 4). Les écarts constatés sur les  $\hat{f}_i$  et  $f_i$  n'influencent que très peu le niveau d'atténuation apporté par le shunt (Fig. 4(a) et 4(b)), qui est de l'ordre de 25 dB.



(a) Comparaison EF 3D et expérience, mode 2F

(b) Comparaison EF 3D et 1D, mode 2F

Figure 4 – Shunt RL accordé sur le mode 2F :  $R=7900 \Omega$ ,  $L=19.7 \text{ H}$ . Facteurs d'amortissement modaux mesurés :  $\xi_1 = 1.7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\xi_2 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\xi_3 = 5.0 \cdot 10^{-3}$  et  $\xi_i = 4.0 \cdot 10^{-3}$  pour  $i \geq 4$ .

## 4.2 Cas d'un modèle simplifié d'aube de turbomachine

Après validation de la méthode de calcul de  $\mathbf{K}_c$ , on se propose d'estimer l'amortissement apporté par un shunt résonant sur une structure de type aube de turbomachine. Le maillage (Fig. 5) est constitué de 5012 éléments TET10 et comporte 30909 degrés de liberté. L'emplacement, la longueur et la largeur des deux patchs piézoélectriques sont définis arbitrairement. Le facteur de couplage effectif est maximisé en optimisant l'épaisseur des pastilles. Pour cela, on calcule  $k_{\text{eff}}$  avec la formule (6) pour plusieurs valeurs de  $h^{(p)}$ . La figure 6 permet de voir que l'épaisseur optimale est de l'ordre de 1.5 mm et varie peu d'un mode à l'autre.

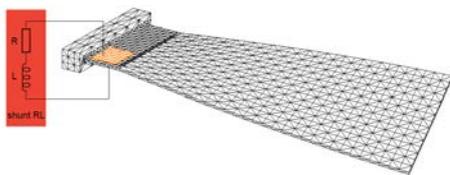


Figure 5 – Aube : TA6V,  $954 \times 260 \times 6 \text{ mm}$ , 8.9 kg. Patchs : PIC151,  $78 \times 67 \times 1.5 \text{ mm}$ , 120 g (1.3% de la masse de l'aube)

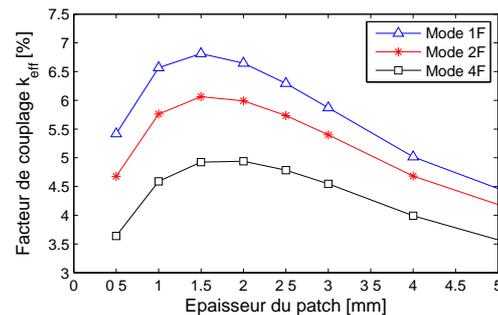


Figure 6 –  $k_{\text{eff}}$  optimal

La FRF de l'aube (Fig. 7(d)) sur la bande de fréquence 0-230 Hz comporte 4 modes de flexion (1, 2, 3 et 4F) et un mode de torsion (1T). Elle est calculée sur une base modale tronquée aux dix premiers modes, avec un facteur d'amortissement  $\xi = 5 \cdot 10^{-3}$  identique pour tous. Les modes 1T et 3F étant très proches, le shunt résonant n'a été accordé que sur les modes de flexion 1F, 2F et 4F (Fig. 7(e), 7(f), 7(g)). Le shunt apporte des atténuations de l'ordre de 15 dB.

Les développements en cours concernent d'une part la prise en compte de pastilles avec une légère courbure de façon à s'adapter à des surfaces plus complexes et d'autre part l'optimisation multi-paramètres (position, taille et nombre de patchs) pour obtenir une atténuation maximale.

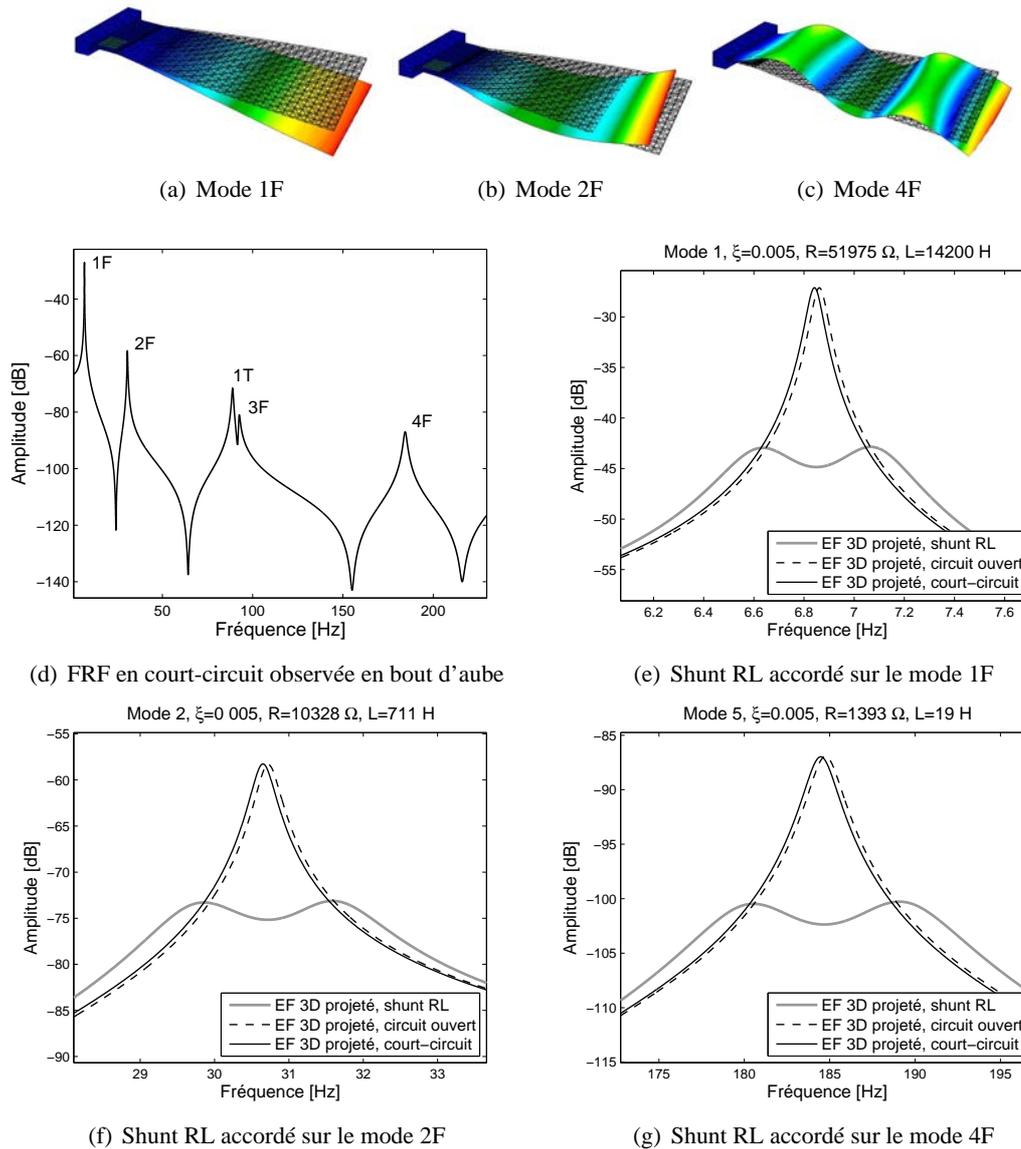


Figure 7 – Déformées modales et FRF de l'aube

Ce travail (thèse Cifre), en coopération avec la Snecma, s'inscrit dans le cadre du projet MAIA soutenu par le CNRS, l'ONERA et le groupe SAFRAN.

## Références

- [1] N.W. Hagood et A. Von Flotow. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2) : 243-268, 1991.
- [2] J. Ducarne, O. Thomas et J.-F. Deü. Optimisation de dispositif passif d'atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. *Actes du 8ème colloque national en calcul de structures*, Hermès, Vol. 2, pages 519-524, 2007.
- [3] O. Thomas, J.-F. Deü et J. Ducarne. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite elements formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, soumis, 2008.
- [4] M. Porfiri, C. Maurini et J. Pouget. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures*, 16(2) : 323-331, 2007.
- [5] V.R. Sonti, S.J. Kim, J.D. Jones. Equivalent forces and wavenumber spectra of shaped piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 187(1) : 111-131, 1995