



HAL
open science

Influence de la pré-contrainte sur la propagation d'ondes dans une poutre de Timoshenko non-linéaire

Nicolas Bideau, Loïc Le Marrec, Lalaonirina Rakotomanana-Ravelonarivo

► To cite this version:

Nicolas Bideau, Loïc Le Marrec, Lalaonirina Rakotomanana-Ravelonarivo. Influence de la pré-contrainte sur la propagation d'ondes dans une poutre de Timoshenko non-linéaire. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412118

HAL Id: hal-01412118

<https://hal.science/hal-01412118>

Submitted on 8 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Influence de la pré-contrainte sur la propagation d'ondes dans une poutre de Timoshenko non-linéaire.

N. Bideau¹, L. Le Marrec¹ L. Rakotomanana¹

¹ Institut de Recherche Mathématique de Rennes (Université de Rennes 1)
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex
nicolas.bideau@univ-rennes1.fr

Résumé — Ce travail présente un modèle tri-dimensionnel de poutre tenant compte des glissements transversaux à partir des milieux continus à directeurs de type Cosserat en transformations finies. Le Hessien de la fonctionnelle énergie est calculé dans le formalisme des directeurs permettant l'étude des vibrations autour d'un état pré-contraint.

Mots clés — Poutre de Timoshenko non-linéaire, analyse modale, pré-contrainte.

1 Introduction

Il est fréquent d'utiliser les modèles de poutre dans la conception des structures ou dans les investigations en technique de résonance dans le but de déterminer les propriétés mécaniques des matériaux. En particulier, on peut noter le regain d'intérêt pour le modèle de Timoshenko connu pour fournir une très bonne estimation de la réponse des poutres non-élançées en dynamique [1], [2]. Dans les applications pratiques en ingénierie, les structures se trouvent dans des configurations pré-contraintes pour lesquelles la transformation initiale n'est pas forcément de faible amplitude. Il paraît donc primordial de connaître l'influence de cette pré-contrainte sur les différents régimes de propagation des ondes dans la poutre non-linéaire.

2 Poutres dans le formalisme de Cosserat

On considère un modèle de poutre de Cosserat [6] représentée par une courbe de l'espace en chaque point de laquelle est associée une base orthonormée de directeurs $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$. En pratique, la configuration actuelle est définie par deux caractéristiques. La position d'un centre de masse quelconque G de la ligne centrale est définie par $(S, t) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{OG}(S, t) = \varphi_0(S, t)$, dans laquelle S est la coordonnée curviligne de la ligne centrale (C) définie dans la configuration initiale et l'orientation d'une section quelconque (S) de centre de masse G est définie par $(S, t) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{d}_\alpha(S, t), \alpha = 1, 2, \mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$. Ainsi, la position d'un point M de la poutre dans la configuration actuelle est donnée par la transformation

$$(\xi_1, \xi_2, S, t) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbf{OM}(\xi_1, \xi_2, S, t) = \varphi_0(S, t) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \mathbf{d}_\alpha(S, t)$$

Lorsque le cisaillement apparaît, le vecteur normal à la section \mathbf{n} n'est plus tangent à la courbe des centres de masse. Comme la base initiale $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ et sa base transformée $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ sont toutes deux des bases orthonormées, alors à chaque instant t , il existe un tenseur de rotation $\mathbf{Q}(S, t)$

qui les relie, $\mathbf{d}_\alpha(S, t) = \mathbf{Q}(S, t) \mathbf{E}_\alpha(S)$. On définit les variables cinématiques généralisées pour la poutre : le glissement $\varepsilon(S, t) := \frac{\partial \varphi_0}{\partial S}(S, t) - \mathbf{d}_3(S, t)$ et la courbure qui est les vecteur axial associé au tenseur anti-symétrique $\kappa \equiv \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial S} \mathbf{Q}^T$. A l'aide de la puissance de déformation interne, on définit les contraintes conjuguées à ces déformations [6] par $\mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \kappa)$ et $\mathbf{M} = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa}(\varepsilon, \kappa)$, Ψ désignant la densité d'énergie de déformation sur la section.

3 Hessien de l'action Hamiltonienne

Afin d'étudier, la propagation d'ondes élastique autour de déformations finies, il s'agit d'obtenir la forme consistante de l'opérateur tangent pour la poutre. On définit la configuration de la poutre par :

$$\mathcal{C} := \{(\varphi_0, \mathbf{Q}) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times SO(3) \mid \varphi_0(0) = \varphi_{00}, \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_0, \varphi_0(L) = \varphi_{0L}, \mathbf{Q}(L) = \mathbf{Q}_L\}$$

ainsi que l'espace de variations associé :

$$\mathcal{W} := \{(\delta\varphi_0, \delta\omega) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times TSO(3) \mid \delta\varphi_0 = 0, \delta\omega = 0 \text{ en } S = 0, L\}$$

La seconde variation de l'action Hamiltonienne s'écrit alors :

$$\Delta(\delta\mathcal{A}(\varphi_0, \mathbf{Q})[\delta\varphi_0, \delta\omega])[\Delta\varphi_0, \Delta\omega] = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 - \mathcal{M}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \int_{(C)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\partial \Delta\varphi_0}{\partial S} - \Delta\omega \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta\varphi_0}{\partial S} - \delta\omega \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \kappa \partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \Delta\omega}{\partial S} \cdot \left(\frac{\partial \delta\varphi_0}{\partial S} - \delta\omega \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \kappa} \cdot \left(\frac{\partial \Delta\varphi_0}{\partial S} - \Delta\omega \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \cdot \frac{\partial \delta\omega}{\partial S} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \kappa^2} \cdot \frac{\partial \Delta\omega}{\partial S} \cdot \frac{\partial \delta\omega}{\partial S} dS \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_2 = \int_{(C)} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \cdot \left[-\Delta\omega \times \frac{\partial \delta\varphi_0}{\partial S} - \delta\omega \times \frac{\partial \Delta\varphi_0}{\partial S} + \Delta\omega \times \left(\delta\omega \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \cdot \left(-\Delta\omega \times \frac{\partial \delta\omega}{\partial S} \right) dS$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_{(C)} A \bar{\rho} \frac{\partial \delta\varphi_0}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Delta\varphi_0}{\partial t} + \bar{\rho} \mathbb{I}_G \left(\frac{\partial \Delta\omega}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \delta\omega}{\partial t} + \left(\left[\int_{(\mathcal{A})} \rho_0 \mathbf{GM} \otimes \mathbf{GM} d\mathcal{A} \right] (\Delta\omega) \times \omega \right) \cdot \frac{\partial \delta\omega}{\partial t} \\ &\quad + \left(\left[\int_{(\mathcal{A})} \rho_0 \mathbf{GM} \otimes \mathbf{GM} d\mathcal{A} \right] (\delta\omega) \times \omega \right) \cdot \frac{\partial \Delta\omega}{\partial t} \\ &\quad + \left[\int_{(\mathcal{A})} \rho_0 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{GM}}{\partial t} \right\|^2 \mathbb{I} - \frac{\partial \mathbf{GM}}{\partial t} \otimes \frac{\partial \mathbf{GM}}{\partial t} \right) d\mathcal{A} \right] (\Delta\omega) \cdot \delta\omega dS \end{aligned}$$

Le calcul du Hessien de l'énergie conduit à une forme bilinéaire symétrique \mathcal{H}_1 et à une forme non-symétrique \mathcal{H}_2 dans le cas général. Si la configuration \mathcal{C} est une configuration d'équilibre statique, la symétrie de \mathcal{H}_2 est vérifiée. La seconde variation dans la base des directeurs exprimée en termes de déplacement \mathbf{u}_G et de la rotation de la section θ s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_G \\ \delta \theta \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & \mathbb{H}_{\mathbf{u}\theta} \\ \mathbb{H}_{\theta\mathbf{u}} & \mathbb{H}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_G \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

où $\mathbb{H}(\bar{\mathbf{u}}_G, \bar{\theta})$ est l'opérateur tangent. Ceci nous permet d'obtenir le mouvement autour d'une configuration de la poutre en grande transformation. A l'aide de cette expression et en considérant un potentiel de déformation correspondant à un matériau de Kirchhoff-Saint Venant (2) conduit à une formulation intrinsèque de la poutre de Timoshenko précontrainte en grande transformation.

$$\Psi = \frac{\mu_1}{2} A \varepsilon_1^2 + \frac{\mu_2}{2} A \varepsilon_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) A \varepsilon_3^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \mathbb{I}_{G\alpha\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta + \frac{\mu}{2} \mathbb{J} \kappa_3^2 + \Psi^*(\varepsilon, \kappa) \quad (2)$$

dans laquelle $\Psi^*(\varepsilon, \kappa)$ est un polynôme de degré supérieur à deux.

4 Propagation d'ondes élastiques autour d'un état pré-contraint : Forme adimensionnelle

On se focalise sur le mouvement plan. On établit le problème sous forme adimensionnelle, à l'aide des variables suivantes :

$$\omega_c := \sqrt{\frac{k_F G A}{\rho \mathbb{I}_2}} \quad , \quad k_c := \sqrt{\sqrt{\frac{k_F G}{E}} \frac{A}{\mathbb{I}_2}} \quad , \quad \tau := \omega_c t \quad , \quad \chi := k_c S$$

On définit la quantité $m := \frac{k_F G}{E}$ qui traduit le rapport entre la traction et la compression pour notre modèle. On suppose une poutre soumise à une pré-contrainte, de type tension/compression axiale. Soit $u_3(\chi) := \frac{u_3(\mathcal{L})\chi}{\mathcal{L}}$ l'état pré-déformé homogène et $w := \frac{\partial u_3}{\partial \chi}$ l'étirement de la fibre moyenne de la poutre. Dans ce cas les équations du mouvement superposé sur une poutre avec cisaillement initialement pré-contrainte axialement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial^2 \Delta u_1}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Delta u_1}{\partial \chi^2} - \left(1 + w + \frac{w}{m}\right) \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \chi} \\ \sqrt{m} \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial \chi^2} + \frac{1+w}{\sqrt{m}} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \chi} - \frac{1+w}{\sqrt{m}} (1+2w) \Delta \theta \\ \sqrt{m} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial \chi^2} \end{array} \right. \quad (3)$$

On considère la propagation d'ondes harmoniques superposées à l'état initial :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1(\chi, \tau) \\ \Delta \theta(\chi, \tau) \\ \Delta u_3(\chi, \tau) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_1 \\ \Delta \Theta \\ \Delta U_3 \end{array} \right\} \exp[j(k\chi + \lambda\tau)] \quad (4)$$

$k \in \mathbb{C}$ désigne le nombre d'onde et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ la fréquence. L'introduction de cette solution dans le système précédent conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbb{D}(k, \lambda; w)] \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_1 \\ \Delta \Theta \\ \Delta U_3 \end{array} \right\} = 0 \quad (5)$$

L'existence de solutions non triviales pour ce système requiert la nullité du déterminant de la matrice \mathbb{D} . Ce qui permet d'obtenir la relation de dispersion pour la poutre de Timoshenko pré-contrainte sous forme adimensionnelle :

$$\underbrace{(-K + \sqrt{m} \Lambda)}_{\text{tension/compression}} \underbrace{[K^2 - (1 + \alpha)\Lambda - \beta\Lambda K + \gamma K + \Lambda^2]}_{\text{flexion}} = 0 \quad (6)$$

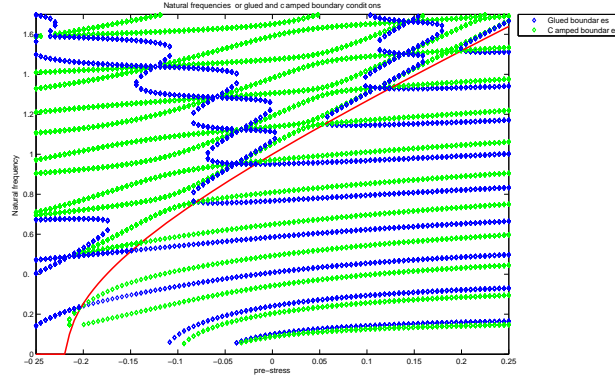


Figure 1 – Comparaison des conditions aux limites : fréquences propres en fonction de la pré-contrainte pour une poutre collée (vert) et une poutre encastree (bleu).

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} K &:= k^2 & \Lambda &:= \lambda^2 & \alpha &:= w(w+2) + \frac{w(w+1)}{m} \\ \beta &:= \frac{1+m}{\sqrt{m}} & & & \gamma &:= \frac{2w(w+1)}{\sqrt{m}} \end{aligned}$$

L'application de conditions aux limites particulières en $\chi = 0$ et $\chi = \mathcal{L}$ pour une fréquence donnée λ et les quatre nombres d'ondes associés $k_p(\lambda)$ obtenu à l'aide de la relation de dispersion conduit au système :

$$[\mathbb{S}(\lambda; w)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ C_4 \\ D_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

dont on extrait les équations aux fréquences $\text{Det}[\mathbb{S}(\lambda; w)] = 0$. La résolution de cette équation pour un état de pré-contrainte donné fournit l'ensemble des fréquences propres $\{\lambda_n, n = 1 \dots \infty\}$ et des amplitudes spatiales associées dépendantes de l'état initial. On se focalise sur de conditions au limites de type encastrement aux extrémités qui est fréquemment utilisée dans la littérature. En effet, la nécessité de formuler de manière précise les conditions d'encastrement pour le modèle de Timoshenko est crucial même dans le cadre linéaire [2]. En particulier, la différence entre les conditions aux limites de type "encastrement" (déplacement nul et glissement nul) et "collage" (déplacement nul et rotation nulle) apparaît pour les poutres avec cisaillement. L'annulation simultanée de la rotation et du glissement conduisant à un effort tranchant nul ce qui n'est pas physiquement acceptable.

5 Résolution numérique

La relation fréquence/nombre d'onde ainsi que la fréquence de coupure sont dépendantes de la pré-contrainte appliquée. On observe une non-symétrie de la relation de dispersion entre la pré-tension et la pré-compression. L'étude met en évidence le fait que le spectre ainsi que les modes propres dépendent fortement de l'état de déformation initial. La figure 5 illustre ce comportement. En effet, en l'absence de pré-contrainte, le premier mode oscillant correspond à la huitième fréquence propre tandis que pour une pré-compression de 10%, le premier mode oscillant apparaît au niveau de la cinquième fréquence. Le nombre de modes hyperboliques dépend de la valeur

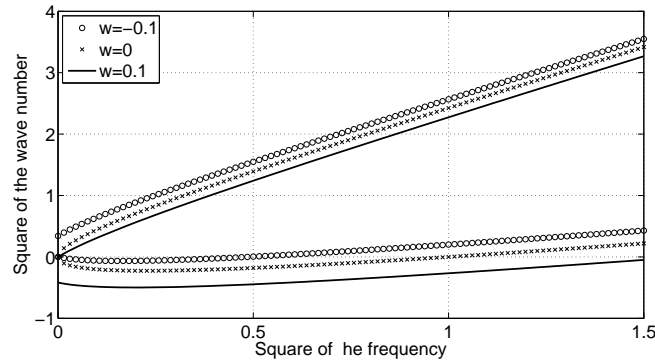


Figure 2 – Poutre encastree : Fréquences propres adimensionnelles vs. pré-contrainte pour les modes oscillants (violet) et modes hyperboliques (bleu). On observe une dépendance de la fréquence de coupure (courbe rouge) vis-à-vis de la pré-contrainte.

de la précontrainte. La compression diminue les fréquences naturelles tandis qu'une pré-tension augmente la valeur de ces fréquences propres. Dans le cas encastree, on retrouve le même comportement mais seulement au dessous de la fréquence de coupure. On observe moins de fréquences propres au voisinage de cette fréquence de coupure. En effet, au voisinage supérieur de cette valeur, la configuration non-chargée admet deux fréquences propres au dessus de λ_c tandis qu'une pour une compression de 5% on a 7 fréquences propres. Pour une pré-tension, aucune fréquence propre. Les deux types de conditions aux limites conduisent à des valeurs très proches pour la première fréquence propre. Ce résultat confirme l'hypothèse du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, pour laquelle les deux types de conditions aux limites sont confondues. Pour la même valeur de précontrainte, la poutre "collée" admet des fréquences propres plus basses que la poutre encastree. Ainsi, l'instabilité peut apparaître plus rapidement pour la poutre collée. L'influence d'une faible précontrainte peut avoir des conséquences importantes sur la réponse vibratoire, en particulier dans le cas d'une poutre encastree. La figure 3 présente le premier mode de déflexion et de

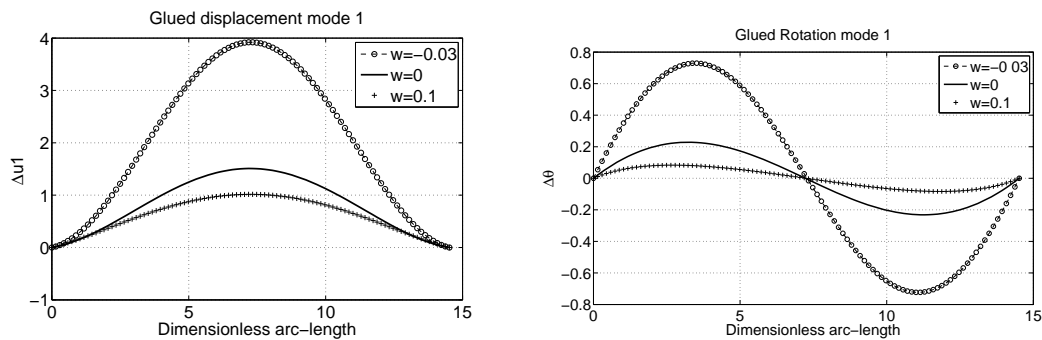


Figure 3 – Premier mode de vibration : Influence de la pré-compression (magenta), de la pré-tension (bleu) par rapport au modèle linéaire (noir).

rotation pour plusieurs états de transformation initiale. On observe que la pré-contrainte influence fortement l'amplitude modale. La propagation est beaucoup plus affectée par la pré-compression que la pré-tension. On remarque une variation non-linéaire de l'amplitude des modes lorsque l'on fait varier l'intensité de la pré-contrainte.

6 Conclusion

Le modèle présenté ici permet au moyen de l'opérateur tangent d'étudier l'influence d'ondes linéaires superposées à une transformation initiale de la poutre de Timoshenko non-linéaire. L'étude a mis en évidence une différence significative, tant sur le plan quantitatif que qualitatif, avec la théorie linéaire de la poutre de Timoshenko. Les fréquences propres de vibrations et le régime de propagation des ondes sont modifiés même pour de faibles valeurs de pré-contrainte. En particulier, l'existence de modes hyperboliques est fortement dépendante de l'intensité de cette pré-contrainte.

Références

- [1] N.G. Stephen. The second spectrum of Timoshenko beam theory - Further assessment. *Journal of Sound and Vibration*, 292, 372–389, 2006.
- [2] A. Bashkar. Elastic waves in Timoshenko beams : the 'lost and found' of an eigenmode. *Proceedings of The Royal Society A*, 465, 295–255, 2009.
- [3] N. Bideau, P. Eyi-Assoumou, L. Le Marrec, L. Rakotomanana. On the dynamics of shearable beams : General considerations and the vibrations of non-linear Timoshenko beam. *Geometrically Non-Linear Vibrations of Structures*, Ribeiro P., Amabili M. (Eds), 233–236, 2007.
- [4] A. Ibrahimbegovic, H. Shakourzadeh, J.L. Batoz, M. Al IMikdad, Y.Q. Guo. On the role of geometrically exact and second-order theories in buckling and post-buckling analysis of three-dimensional beam structures. *Computers and Structures*, 61, 1101–1114, 1996.
- [5] L. R. Rakotomanana. *Éléments de Dynamique des Solides et Structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Collection Mécanique, Lausanne, à paraître 2009.
- [6] J.C. Simo. A finite strain beam formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49, 55–70, 1985.