



HAL
open science

Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la calcul de matériaux multi-phasés aléatoires

Alexandre Clément, Anthony Nouy

► **To cite this version:**

Alexandre Clément, Anthony Nouy. Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la calcul de matériaux multi-phasés aléatoires. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412112

HAL Id: hal-01412112

<https://hal.science/hal-01412112v1>

Submitted on 8 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la calcul de matériaux multi-phasés aléatoires

Alexandre Clément¹, Anthony Nouy¹

¹ GeM - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique UMR CNRS 6183,
Université de Nantes, Centrale Nantes
alexandre.clement@univ-nantes.fr, anthony.nouy@univ-nantes.fr

Résumé — Récemment, une extension de la méthode X-FEM au cadre stochastique a été proposée pour la résolution d'équations aux dérivées partielles stochastiques définies sur un domaine aléatoire. Nous présentons ici le développement de la méthode pour des problèmes d'interface matérielle aléatoire. Nous proposons pour cela d'étendre la méthode de la partition de l'unité au cadre stochastique afin de construire des espaces d'approximation adaptés qui permettent de capturer les irrégularités contenues dans le champ solution et d'obtenir une solution précise.

Mots clés — Mécanique stochastique numérique, X-FEM, PUM, approches spectrales stochastiques.

1 Introduction

Dans le cadre des méthodes éléments finis stochastiques de type Galerkin pour la résolution d'équations aux dérivées partielles stochastiques [1, 6], la prise en compte d'incertitudes portant sur l'opérateur ou les termes sources est aujourd'hui relativement bien maîtrisée. Cependant, la prise en compte d'incertitudes sur la géométrie reste un point encore très peu abordé mais qui peut susciter un intérêt, notamment dans le calcul de structures (modélisation des incertitudes liées à un procédé de fabrication, homogénéisation de matériaux multi-phasés aléatoires, impact d'une fissure aléatoire sur la tenue d'une structure, etc.). Récemment, une extension de la méthode X-FEM [9] au cadre stochastique a été proposée pour traiter le cas d'EDP définies sur des domaines aléatoires [11, 10]. L'utilisation de la technique des level-sets permet une représentation aisée de géométries aléatoires complexes. La reformulation du problème sur un domaine déterministe fictif, indépendant de la géométrie, autorise l'introduction d'espaces d'approximation classiques (éléments finis sur un maillage fixe au niveau déterministe et chaos polynomial au niveau stochastique). La méthode fournit une représentation précise et explicite de la solution autorisant un post-traitement rapide de la solution. Dans ce papier, nous présentons une extension de la méthode X-SFEM au cas de matériaux multi-phasés aléatoires (*i.e.* possédant des interfaces matérielles aléatoires). Pour ce type de problème, une construction classique d'espaces d'approximation s'avère inadaptée. En effet, ces espaces ne permettent pas une représentation correcte des irrégularités de la solution au niveau spatial (discontinuité des dérivées à la traversée de l'interface matérielle) et au niveau stochastique (fonctions non régulières vis-à-vis des paramètres aléatoires). On propose ici une extension au cadre stochastique de la méthode de la partition de l'unité [7] pour l'enrichissement de l'espace d'approximation. On appliquera la méthode au calcul de propriétés homogénéisées d'un volume élémentaire représentatif d'un matériau composite à interface matérielle aléatoire. Cet exemple permettra d'illustrer la précision de la solution X-SFEM.

2 Formulation du problème et représentation implicite de la géométrie

On choisit comme problème modèle un problème d'élasticité linéaire. On considère que le contenu probabiliste est représenté par un ensemble fini de variables aléatoires $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. On travaille alors dans l'espace $(\Xi, \mathcal{B}, P_\xi)$, où $\Xi \in \mathbb{R}^m$, \mathcal{B} est une σ -algèbre et P_ξ la mesure de probabilité associée à ξ . Le domaine d'étude Ω est composé de deux sous-domaines aléatoires disjoints $\Omega_1(\xi)$ et $\Omega_2(\xi)$ séparés par une interface aléatoire $\Gamma(\xi)$. La structure est soumise à des efforts volumiques f sur Ω et à des efforts surfaciques F sur une partie Γ_2 de la frontière $\partial\Omega$. Elle est fixée sur une partie complémentaire Γ_1 de $\partial\Omega$. La formulation variationnelle du problème peut s'écrire : trouver $u(x, \xi) \in \mathcal{W} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{S} := (H_0^1(\Omega))^d \otimes L^2(\Xi, dP_\xi)$ tel que

$$A(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{W} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{S} \quad (1)$$

où

$$A(u, v) = \int_{\Xi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(v) : C(x, \mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(u) \, dx dP_\xi(\mathbf{y}) \quad (2)$$

$$L(v) = \int_{\Xi} \int_{\Omega} v \cdot f \, dx dP_\xi(\mathbf{y}) + \int_{\Xi} \int_{\Gamma_2} v \cdot F \, ds dP_\xi(\mathbf{y}) \quad (3)$$

et où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations et C le tenseur d'élasticité de Hooke. Ce dernier peut s'écrire

$$C(x, \xi) = C_1 I_{\Omega_1(\xi)}(x) + C_2 I_{\Omega_2(\xi)}(x)$$

où C_1 et C_2 sont respectivement les tenseurs d'élasticité de $\Omega_1(\xi)$ et $\Omega_2(\xi)$, et où I_{Ω_1} et I_{Ω_2} sont respectivement les fonctions indicatrices des domaines $\Omega_1(\xi)$ et $\Omega_2(\xi)$:

$$I_{\Omega_i(\xi)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i(\xi) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour représenter la géométrie aléatoire, on utilise la technique des level-sets [12] conduisant à caractériser l'interface matérielle aléatoire par l'iso-zéro d'une fonction level-set aléatoire $\phi(x, \xi)$ représentant classiquement la fonction distance signée à la frontière $\Gamma(\xi)$. Les formes A et L des équations (2) et (3) peuvent être réécrites en remarquant que $C(x, \xi) = C_1 \mathcal{H}(-\phi(x, \xi)) + C_2 \mathcal{H}(\phi(x, \xi))$ où \mathcal{H} est la fonction Heaviside. En pratique, la fonction level-set est interpolée sur un maillage éléments finis de Ω . La géométrie aléatoire est ainsi complètement caractérisée par la donnée des valeurs nodales de la level-set, qui sont des variables aléatoires.

3 Construction des espaces d'approximation

Pour un problème d'interface matérielle aléatoire, l'utilisation d'espaces d'approximation éléments finis stochastiques classiques ne permet pas représenter correctement les irrégularités de la solution au niveau spatial et stochastique. Pour la construction d'espaces d'approximation adaptés, on étend ici au cadre stochastique la méthode de la partition de l'unité [7].

On commence par définir une partition de l'unité sur chaque espace $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Xi, dP_\xi)$. Pour cela, on définit des recouvrements d'ouverts $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ de Ω et $\{\Xi^j\}_{j \in J}$ de Ξ . On définit alors des ensembles de fonctions $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ (définies sur Ω) et $\{\chi_j\}_{j \in J}$ (définies sur Ξ) qui vérifient :

$$\begin{aligned} \text{supp}(\varphi_i) &\subset \Omega_i, & \sum_{i \in I} \varphi_i &= 1 \quad \text{sur } \Omega \\ \text{supp}(\chi_j) &\subset \Xi^j, & \sum_{j \in J} \chi_j &= 1 \quad \text{sur } \Xi \end{aligned}$$

Un espace d'approximation W de $H_0^1(\Omega) \otimes L^2(\Xi, dP_\xi)$ peut alors être défini par

$$W = \sum_{i \in I, j \in J} \varphi_i \chi_j W_{(i,j)}$$

où les $W_{(i,j)} \subset H_0^1(\Omega_i) \otimes L^2(\Xi^j, dP_\xi)$ sont des espaces à choisir. On peut montrer que des bases d'approximation classiques sont des cas particuliers pour les choix de ces espaces : éléments finis au niveau stochastique [3], multi-ondelettes [5], chaos polynomial [4]. Dans la suite, on se contente d'une partition triviale $\{\Xi\}$ au niveau stochastique et on choisit pour les φ_i les fonctions d'interpolation éléments finis classiques. Afin de capturer l'irrégularité de la solution au niveau spatial et stochastique, on introduit des fonctions additionnelles, dites d'enrichissement. On propose de définir les $\{W_i\}_{i \in I}$ par

$$\begin{aligned} W_i &= \text{span}\{H_\alpha(\xi); \alpha \in \mathcal{J}_P\}, \quad i \in I \setminus I^+ \\ W_i &= \text{span}\{H_\alpha(\xi); \alpha \in \mathcal{J}_P\} + \text{span}\{H_\alpha(\xi)\psi(x, \xi); \alpha \in \mathcal{J}_P\}, \quad i \in I^+ \end{aligned}$$

où l'ensemble de P fonctions $\{H_\alpha(\xi)\}_{\alpha \in \mathcal{J}_P}$ est une base de polynômes orthonormés [4], I^+ désigne un sous-ensemble de supports Ω_i enrichis et ψ est la fonction d'enrichissement. Une fonction $u \in W$ pourra alors s'écrire

$$u = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) a_i(\xi) + \sum_{i \in I^+} \varphi_i(x) \psi(x, \xi) a_i^+(\xi), \quad (4)$$

où $a_i, a_i^+ \in \mathcal{S}_P = \text{span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}_P}$. Différents choix pour la fonction ψ , basés sur la level set $\phi(x, \xi)$, ont été proposés et testés dans [2]. Le premier choix consiste à étendre au cadre stochastique la fonction d'enrichissement proposée dans [8]. Dans un cadre déterministe, cette fonction permet d'obtenir des taux de convergence optimaux, *i.e.* identiques à ceux obtenus avec une approche éléments finis classique utilisant des maillages conformes à l'interface. Cependant, cette fonction se révèle mal adaptée dans un cadre stochastique. En effet, sa faible régularité au niveau stochastique conduit à une représentation difficile des degrés de liberté enrichis $\{a_i^+\}$ sur la base du chaos polynomial. Les approximations spectrales stochastiques possèdent alors de mauvaises propriétés de convergence. Dans [2], un autre choix de fonction d'enrichissement, adaptée au cadre stochastique, a été proposé

$$\psi(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{i \in I_1^+} \varphi_i(x) (\beta + \phi_i(\xi)) & \text{si } x \in \Omega_1(\xi) \\ \sum_{i \in I_2^+} \varphi_i(x) (\beta - \phi_i(\xi)) & \text{si } x \in \Omega_2(\xi) \end{cases}$$

avec $I^+ = I_1^+ \cup I_2^+$, où I_1^+ est l'ensemble des noeuds dont le support est possiblement coupés par $\Gamma(\xi)$ et où I_2^+ est un ensemble de noeuds complémentaires connectés aux supports I_1^+ et $\beta \approx \sup_{i \in I^+, \xi \in \Xi} |\phi_i|$. Cette fonction présente l'avantage d'être régulière au niveau stochastique et permet de représenter précisément les degrés de liberté a_i et a_i^+ avec des bases spectrales classiques.

4 Approximation de Galerkin et construction du problème discrétisé

En utilisant l'approximation (4) pour chaque composante de $u \in \mathcal{W}$, on obtient l'espace d'approximation enrichi noté $\mathcal{W}_{h,P}^+$. L'approximation de Galerkin $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_{h,P}^+$ peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{n_1} \varphi_i(x) a_i(\xi) + \sum_{i=1}^{n_2} \varphi_{\sigma(i)}(x) \psi(x, \xi) a_i^+(\xi), \quad a_i, a_i^+ \in \mathcal{S}_P \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \varphi_i(x) H_\alpha(\xi) a_{i,\alpha} + \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \varphi_{\sigma(i)}(x) \psi(x, \xi) H_\alpha(\xi) a_{i,\alpha}^+, \quad a_{i,\alpha}, a_{i,\alpha}^+ \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $\sigma : \{1 \dots n_2\} \rightarrow \{1 \dots n_1\}$ et où les $\boldsymbol{\varphi}_i$ sont les fonctions d'interpolation vectorielles. On note respectivement $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathcal{S}_P$ et $\mathbf{a}^+ \in \mathbb{R}^{n_2} \otimes \mathcal{S}_P$ les vecteurs aléatoires regroupant les degrés de liberté $\{a_i\}$ et $\{a_i^+\}$. On note alors $\mathbf{u} = (\mathbf{a}^T, \mathbf{a}^{+T})^T \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$ avec $n = n_1 + n_2$. L'approximation de Galerkin $\mathbf{u}_{h,P} \in \mathcal{W}_{h,P}^+$ du problème (1) est alors définie par le problème discrétisé suivant : trouver $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$ tel que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$

$$E(\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) = E(\mathbf{v}^T \mathbf{b}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{aa^+} \\ \mathbf{A}_{a^+a} & \mathbf{A}_{a^+a^+} \end{pmatrix} \quad (5)$$

où les coefficients de la matrice aléatoire \mathbf{A} et du vecteur aléatoire \mathbf{b} sont définis par

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{aa})_{ij} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i) : (\mathbf{C}_1 \mathcal{H}(-\phi) + \mathbf{C}_2 \mathcal{H}(\phi)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_j) dx \\ (\mathbf{A}_{aa^+})_{ij} &= (\mathbf{A}_{a^+a})_{ij} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i) : (\mathbf{C}_1 \mathcal{H}(-\phi) + \mathbf{C}_2 \mathcal{H}(\phi)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_{\sigma(j)} \boldsymbol{\psi}) dx \\ (\mathbf{A}_{a^+a^+})_{ij} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_{\sigma(i)} \boldsymbol{\psi}) : (\mathbf{C}_1 \mathcal{H}(-\phi) + \mathbf{C}_2 \mathcal{H}(\phi)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_{\sigma(j)} \boldsymbol{\psi}) dx \\ (\mathbf{b})_i &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \mathbf{f} dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \mathbf{F} ds \end{aligned}$$

La matrice et le second membre du système (5) sont classiquement construits par assemblage de quantités élémentaires $\mathbf{A}_K(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{b}_K(\boldsymbol{\xi})$ associées à un élément fini K . Le calcul de ces quantités nécessite l'utilisation de stratégies d'intégration dédiées à ce problème :

- au niveau spatial, on peut utiliser un sous-découpage de l'élément K [13];
- au niveau stochastique, les composantes de \mathbf{A}_K et \mathbf{b}_K ne sont pas des fonctions régulières pour les éléments possiblement coupés par la l'interface. Des stratégies particulières permettant d'intégrer convenablement ces quantités sont données dans [10].

5 Exemple : homogénéisation d'un VER avec inclusion aléatoire

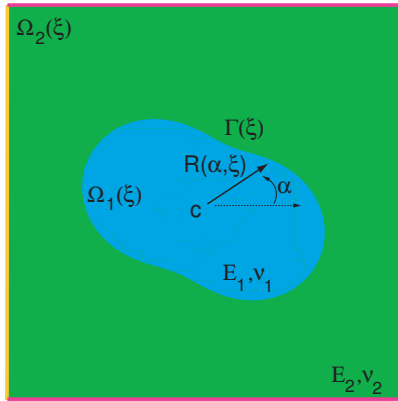


Figure 1 – Présentation du volume élémentaire avec inclusion aléatoire.

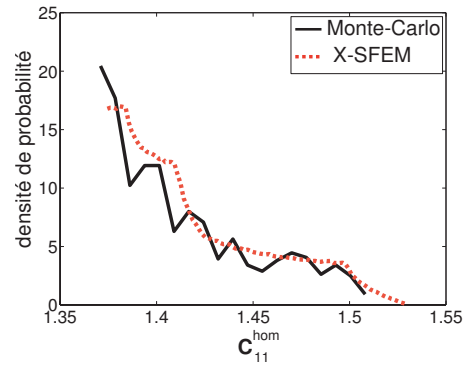


Figure 2 – Densités de probabilité de la composante C_{11}^{hom} .

Le milieu étudié est un volume élémentaire d'un matériau hétérogène, qui occupe un domaine déterministe $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Ce domaine est composé de deux sous-domaines $\Omega_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Omega_2(\boldsymbol{\xi})$ aux caractéristiques matérielles différentes. Les sous-domaines $\Omega_1(\boldsymbol{\xi})$ et $\Omega_2(\boldsymbol{\xi})$ sont séparés par une interface aléatoire $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ caractérisée par l'iso-zéro de la fonction level-set $\phi(x, \boldsymbol{\xi})$ suivante : $\phi(x, \boldsymbol{\xi}) = R(\alpha(x), \boldsymbol{\xi}) - \|x - \mathbf{c}\|$ où $\mathbf{c} = (0.5, 0.5)$ et où

$$R(\alpha(x), \boldsymbol{\xi}) = 0.25 + \frac{1}{10} (\xi_1(\theta) \cos(2\alpha(x)) + \xi_2(\theta) \sin(2\alpha(x)))$$

(c.f. détails sur la figure 1). Les variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 sont statistiquement indépendantes et suivent des lois uniformes sur $(-1, 1)$. Nous faisons l'hypothèse des contraintes planes et nous considérons les deux matériaux homogènes élastiques isotropes avec des modules d'Young et coefficients de Poisson déterministes : $E_1 = 1$ et $\nu_1 = 0.3$ dans $\Omega_1(\xi)$ et $E_2 = 10$ et $\nu_2 = 0.3$ dans $\Omega_2(\xi)$. Pour l'approximation stochastique, nous utilisons un chaos polynomial généralisé de degré $p = 3$. On souhaite calculer l'opérateur de rigidité homogénéisé aléatoire C^{hom} . Pour cela, on choisit une approche d'homogénéisation par contraintes homogènes aux bords. La figure 2 présente les densités de probabilité de la composante C_{11}^{hom} obtenues avec X-SFEM et avec un approche de Monte-Carlo couplée à un code X-FEM déterministe. On observe une bonne concordance des résultats. La figure 3 présente les surfaces de réponse de cette même composante obtenues avec la solution X-SFEM et un ensemble de calculs X-FEM déterministes. On constate que ces surfaces de réponse sont très proches, ce qui montre la qualité de l'approximation enrichie X-SFEM. Enfin, la figure 4 présente une comparaison des surfaces de réponse du déplacement horizontal du point $P_1 = (0.7, 0.7)$, pouvant se situer dans l'un ou l'autre des sous-domaines. On constate que la méthode capte bien l'irrégularité de la solution vis-à-vis des variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 .

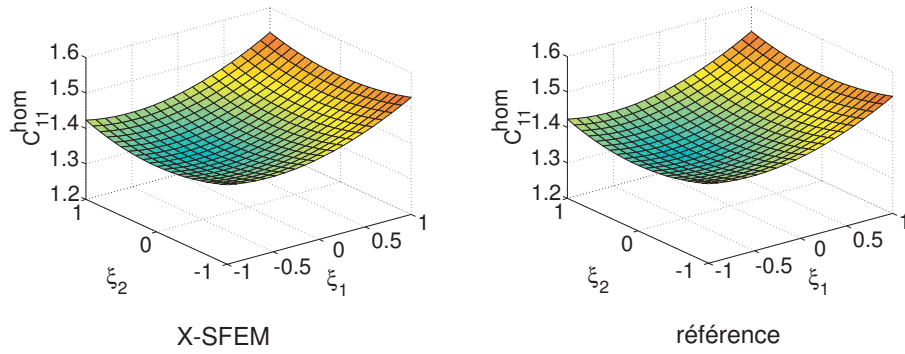


Figure 3 – Surfaces de réponse de la composante C_{11}^{hom} obtenues avec X-SFEM et la solution de référence X-FEM.

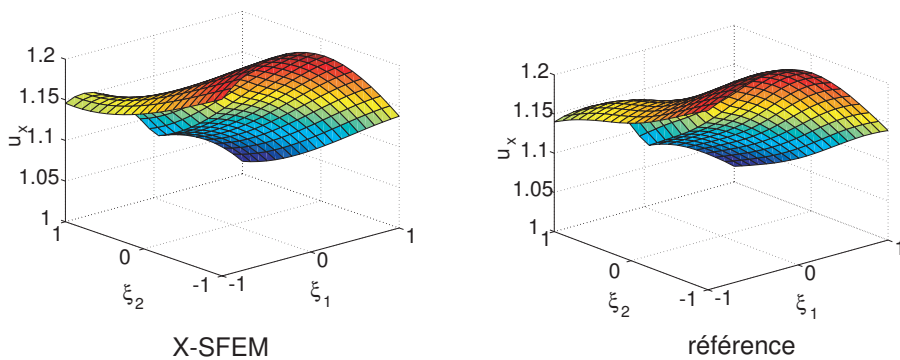


Figure 4 – Surfaces de réponse du déplacement horizontal du point P_1 obtenues avec X-SFEM et la solution de référence X-FEM.

6 conclusion

Nous avons proposé une extension au cadre stochastique de la méthode de la partition de l'unité. Cette méthode permet la construction d'espaces d'approximation adaptés à la résolution de

problèmes d'interface matérielle aléatoire dont les solutions présentent des irrégularités au niveau spatial et stochastique. L'exemple numérique a permis de montrer la précision de la méthode. Une extension naturelle de ces travaux permettra de traiter la résolution de problèmes à fissures aléatoires.

Remerciements

Ces travaux sont soutenus par l'Agence National de la Recherche (projet ANR-06-JCJC-0064).

Références

- [1] I. Babuska, R. Tempone, and G. E. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :1251–1294, 2005.
- [2] A. Clément. *Éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structures à géométrie aléatoire*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, France, 2008.
- [3] M. Deb, I. Babuska, and J. T. Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6359–6372, 2001.
- [4] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin, 1991.
- [5] O. P. Le Maitre, O. M. Knio, H. N. Najm, and R. G. Ghanem. Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions. *Journal of Computational Physics*, 197(1) :28–57, 2004.
- [6] H. G. Matthies and A. Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) :1295–1331, 2005.
- [7] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 :289–314, 1996.
- [8] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 192 :3163–3177, 2003.
- [9] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [10] A. Nouy, A. Clément, F. Schoefs, and N. Moës. An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52) :4663–4682, 2008.
- [11] A. Nouy, F. Schoefs, and N. Moës. X-sfem, a computational technique based on x-fem to deal with random shapes. *European Journal of Computational Mechanics*, 16(2) :277–293, 2007.
- [12] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [13] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6183–6200, 2001.