



HAL
open science

Optimisation de plaques stratifiées en représentation polaire

Ali Jibawy, Cédric Julien, Boris Desmorat, Angela Vincenti, Françoise Lene

► **To cite this version:**

Ali Jibawy, Cédric Julien, Boris Desmorat, Angela Vincenti, Françoise Lene. Optimisation de plaques stratifiées en représentation polaire. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412111

HAL Id: hal-01412111

<https://hal.science/hal-01412111>

Submitted on 8 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Optimisation de plaques stratifiées en représentation polaire

A. Jibawy^{1,2,4}, C. Julien^{1,2,4}, B. Desmorat^{1,2,3}, A. Vincenti^{1,2}, F. Lene^{1,2}

¹ UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert
4 place Jussieu, Case 161, F-75252 CEDEX Paris, France
ali.jibawy@etu.upmc.fr, cedric.julien@etu.upmc.fr, francoise.lene@upmc.fr

² CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert,
4 place Jussieu, Case 161, F-75252 CEDEX Paris, France
angela.vincenti@upmc.fr

³ Univ Paris-Sud 11
F-91405 Orsay, France
boris.desmorat@upmc.fr

⁴ Segula Technologies
5 rue Albert Durant, F-31700 Blagnac, France

Résumé — Une méthodologie de conception optimale de plaques stratifiées sollicitation de membrane ou de flexion est proposée. Cette méthode originale s'appuie sur la représentation polaire en anisotropie. Dans un premier temps, une optimisation topologique dont le but est la maximisation de la rigidité de la structure permet de déterminer la répartition des paramètres polaires optimaux. Dans un deuxième temps, une stratification optimale fabricable est déterminée en adéquation avec les résultats structuraux.

Mots clés — Optimisation, Représentation polaire, Stratifié, Orthotropie, Propriétés élastiques.

1 Problématique de conception de structures minces composites

L'optimisation est le processus de conception de structures répondant au mieux à un ensemble de critères donnés. Associée à des méthodes variationnelles, elle devient optimisation topologique, lorsqu'elle consiste à définir la répartition optimale de matière, au sein d'un domaine donné et pour un chargement donné, maximisant par exemple la rigidité globale d'une structure. Appliquée aux structures composites, cette démarche d'optimisation concerne aussi bien la conception de la structure que la définition de l'architecture locale du matériau (distribution et orientation des renforts). C'est pourquoi le procédé d'optimisation appliqué dans ce travail s'articule en deux phases : l'optimisation topologique de la structure dans un premier temps, puis la conception optimale du matériau constitutif, dont la structure interne est susceptible de varier d'un point à un autre (stratifiés à rigidité variable). La première phase d'optimisation topologique est réalisée par des algorithmes itératifs performants et convergents [1]. Chaque itération est constituée de deux étapes d'optimisation du critère, qui est ici la minimisation de l'énergie complémentaire :

- i. minimisations locales à contraintes fixées,
- ii. minimisation globale à paramètres du matériau fixés.

L'un des points d'originalité de ce travail est l'utilisation de la méthode de représentation polaire en anisotropie plane afin de minimiser l'énergie complémentaire. D'abord, ceci permet de résoudre l'étape de minimisation locale de manière analytique dans le cas d'un matériau orthotrope, tout en prenant en compte les conditions sur la forme d'orthotropie qui assurent de pouvoir réaliser des matériaux stratifiés solutions du problème d'optimisation [6], [7]. De plus, cette approche via les paramètres polaires permet d'étendre la méthode d'optimisation de plaques sous sollicitations planes (comportement membranaire, [4, 5]) aux plaques sous sollicitations de flexion.

D'autre part, on montre dans ce travail comment l'utilisation des paramètres polaires permet de traiter de manière indépendante la conception de stratifiés solutions pour la structure optimisée.

En fait, les solutions de l'algorithme d'optimisation structurale sont des champs de valeurs optimales de modules polaires de la plaque, et ensuite le problème de conception consiste en la recherche de stratifications répondant point par point aux jeux de paramètres polaires optimaux. Cette étape de conception devra aussi prendre en compte des contraintes de faisabilité du stratifié et des règles industrielles de drapage.

Dans ce travail, on montre comment ce problème de conception peut être résolu en utilisant des stratifications remarquables, de type alternées ou orthogonales, et quasi-triviales [11].

2 Méthode polaire

La représentation polaire des tenseurs de l'élasticité plane est une représentation par invariants, obtenue par une transformation de coordonnées dans un champ de variables complexes : les composantes polaires ont alors une signification physique liée aux symétries élastiques du matériau [12].

Dans un repère cartésien, le vecteur V est représenté par ses composantes (V_1, V_2) et aussi par ses 2 composantes polaires (R, α) , tel que :

$$\begin{aligned} V_1 &= R \cos \alpha \\ V_2 &= R \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

Le lien entre les composantes cartésiennes d'un tenseur du second ordre et ses composantes polaires R , T et Φ , est exprimé par les relations [8] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = T + R \cos 2\Phi \\ \sigma_{12} = R \sin 2\Phi \\ \sigma_{22} = T - R \cos 2\Phi \\ 2T = \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ 2Re^{2i\Phi} = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} \end{array} \right. \quad (2)$$

Un tenseur d'élasticité d'ordre 4 (rigidité Q ou souplesse S) peut être représenté par 5 invariants polaires. On appelle T_0, T_1, R_0, R_1 et $\Phi_0 - \Phi_1$ les invariants polaires de Q et $t_0, t_1, r_0, r_1, \varphi_0 - \varphi_1$ ceux de S . Les composantes cartésiennes de Q sont fonctions des composantes polaires :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1 \\ Q_{12} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0 \\ Q_{13} &= R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1 \\ Q_{22} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1 \\ Q_{23} &= -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1 \\ Q_{33} &= T_0 - R_0 \cos 4\Phi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

3 Homogénéisation d'un stratifié

Une plaque composite stratifiée est un empilement de plis élémentaires. Chaque pli est caractérisé par sa cote z et son orientation $\delta(z)$ dans l'empilement, ses propriétés élastiques $Q(z)$ et son épaisseur $h(z)$.

L'homogénéisation d'un stratifié consiste à déterminer le comportement d'un matériau homogène de rigidité équivalente au comportement de flexion ou de membrane. Les rigidités de flexion D et de membrane A sont liées aux propriétés élastiques de rigidité $Q(z)$ et l'épaisseur $h(z)$ des plis élémentaires par les relations suivantes :

$$D = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 Q(z) dz \quad ; \quad A = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} Q(z) dz \quad (4)$$

De plus, les matrices de rigidité homogénéisées A^* en membrane et D^* en flexion sont :

$$A^* = \frac{1}{H} A \quad D^* = \frac{12}{H^3} D \quad (5)$$

H est l'épaisseur totale du stratifié. On note a et d les souplesses en membrane et en flexion du stratifié.

3.1 Paramètres polaires d'un stratifié

En exprimant les composantes de la matrice de rigidité $Q(z)$ dans l'équation (4) en fonction des paramètres polaires suivant l'équation (3) et de l'orientation $\delta(z)$ du repère du pli par rapport au système de référence du stratifié, on obtient les paramètres polaires de rigidité du stratifié en fonction des paramètres polaires des plis ($T_0(z)$, $T_1(z)$, $R_0(z)$, $R_1(z)$, $\Phi_0(z)$ et $\Phi_1(z)$) :

– en membrane :

$$\begin{cases} \bar{T}_0 = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} T_0(z) dz & ; \quad \bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} R_0(z) e^{4i(\Phi_0(z)+\delta(z))} dz \\ \bar{T}_1 = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} T_1(z) dz & ; \quad \bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} R_1(z) e^{2i(\Phi_1(z)+\delta(z))} dz \end{cases} \quad (6)$$

– en flexion :

$$\begin{cases} \tilde{T}_0 = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 T_0(z) dz & ; \quad \tilde{R}_0 e^{4i\tilde{\Phi}_0} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 R_0(z) e^{4i(\Phi_0(z)+\delta(z))} dz \\ \tilde{T}_1 = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 T_1(z) dz & ; \quad \tilde{R}_1 e^{2i\tilde{\Phi}_1} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 R_1(z) e^{2i(\Phi_1(z)+\delta(z))} dz \end{cases} \quad (7)$$

3.2 Paramètres polaires d'un stratifié à couches identiques

Les paramètres polaires d'un stratifié à couches identiques sont :

– en membrane :

$$\bar{T}_0 = H T_0^{\text{CB}} \quad \bar{T}_1 = H T_1^{\text{CB}} \quad (8)$$

– en flexion :

$$\tilde{T}_0 = \frac{H^3}{12} T_0^{\text{CB}} \quad \tilde{T}_1 = \frac{H^3}{12} T_1^{\text{CB}} \quad (9)$$

où T_0^{CB} , T_1^{CB} , R_0^{CB} , R_1^{CB} , Φ_0^{CB} et Φ_1^{CB} sont les paramètres polaires de la couche de base.

3.3 Paramètres polaires d'un stratifié à couches orthogonales

Dans le cas d'un stratifié symétrique d'épaisseur totale H et à trois couches unidirectionnelles orthogonales d'orientation $\delta_0 = 0$ et $\delta_1 = \frac{\pi}{2}$, les paramètres polaires homogénéisés (notés avec une *) s'expriment :

– en membrane :

$$\begin{aligned} \bar{T}_0^* &= T_0^{\text{CB}} & \bar{\Phi}_0^* &= \Phi_0^{\text{CB}} \\ \bar{T}_1^* &= T_1^{\text{CB}} & \bar{R}_0^* &= R_0^{\text{CB}} \\ \text{si } h &\in [0, \frac{1}{2}], & \bar{\Phi}_0^* - \bar{\Phi}_1^* &= \frac{\pi}{2} \text{ et } \bar{R}_1^* = R_1^{\text{CB}}(1 - 2h) \\ \text{si } h &\in [\frac{1}{2}, 1], & \bar{\Phi}_0^* - \bar{\Phi}_1^* &= 0 \text{ et } \bar{R}_1^* = R_1^{\text{CB}}(2h - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

– en flexion :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0^* &= T_0^{\text{CB}} & \tilde{\Phi}_0^* &= \Phi_0^{\text{CB}} \\ \tilde{T}_1^* &= T_1^{\text{CB}} & \tilde{R}_0^* &= R_0^{\text{CB}} \\ \text{si } h &\in [0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}], & \tilde{\Phi}_0^* - \tilde{\Phi}_1^* &= \frac{\pi}{2} \text{ et } \tilde{R}_1^* = R_1^{\text{CB}}(1 - 2h^3) \\ \text{si } h &\in [\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 1], & \tilde{\Phi}_0^* - \tilde{\Phi}_1^* &= 0 \text{ et } \tilde{R}_1^* = R_1^{\text{CB}}(2h^3 - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

où $h = \frac{H_0}{H}$ est l'épaisseur relative du pli central à 0° et $1 - h = \frac{H_{90}}{H}$ est celle des plis externes à 90° .

4 Problème d'optimisation structurale

4.1 Critère

L'objectif visé est de maximiser la rigidité globale d'une structure élastique. Cet objectif peut être réalisé en minimisant la compliance qui est le travail des efforts extérieurs appliqués à la structure et qui est égale au double de l'énergie de déformation en élasticité linéaire.

$$G = \int_S \alpha S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dS \quad (12)$$

Pour des conditions aux limites en déplacements imposés nuls, le théorème de l'énergie complémentaire implique :

$$G = \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \left[\int_S \alpha S_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} \right] dS$$

Les contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ et la matrice de souplesse S homogénéisée sont définis tel que :

- en membrane : $\sigma_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}$ (contraintes de membrane), $S = a^*$ et $\alpha = \frac{1}{H}$
- en flexion : $\sigma_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}$ (moments de flexion), $S = d^*$ et $\alpha = \frac{12}{H^3}$

4.2 Paramètres d'optimisation

Pour simplifier les notations, on notera pour le reste de l'article, $t_0, t_1, r_0, r_1, \varphi_0$ et φ_1 les paramètres polaires de S et T_0, T_1, R_0, R_1 et Φ_0 et Φ_1 ceux de $Q = S^{-1}$.

L'étude est faite sur un stratifié orthotrope, alors

$$\Phi_0 - \Phi_1 = K \frac{\pi}{4} \quad \varphi_0 - \varphi_1 = k \frac{\pi}{4} \quad (13)$$

où K et k représentent respectivement les caractéristiques de la forme d'orthotropie en rigidité et en souplesse.

Le stratifié étant à couches identiques, les paramètres polaires de la couche de base T_0^{CB} , T_1^{CB} , R_0^{CB} et R_1^{CB} sont constants et les paramètres polaires T_0 et T_1 sont :

$$T_0 = T_0^{CB} \quad \text{et} \quad T_1 = T_1^{CB} \quad (14)$$

Les paramètres d'optimisation sont les paramètres polaires (R_0, R_1) et l'orientation du stratifié homogénéisé orthotrope Φ_1 .

4.3 Contraintes d'optimisation

Les contraintes d'optimisation sont définies comme étant les bornes sur les paramètres d'optimisation :

$$\begin{cases} R_0 \in [0, R_0^{CB}] \\ R_1 \in [0, R_1^{CB}] \end{cases} \quad (15)$$

En plus les paramètres polaires R_0 et R_1 vérifient les conditions d'admissibilité thermodynamiques :

$$\begin{cases} T_0^{CB} > R_0 \\ R_1 < \sqrt{\frac{T_1^{CB}(T_0^{CB} + R_0)}{2}} \end{cases} \quad (16)$$

4.4 Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation se met sous la forme d'une double minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation (R_0, R_1, Φ_1) et par rapport aux contraintes τ_{ij} [1] :

$$\min G = \min_{(R_0, R_1, \Phi_1)} \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \left[\int_{\Omega} \alpha S_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} dS \right] \quad (17)$$

5 Algorithme d'optimisation

5.1 Description de l'algorithme

Ce problème d'optimisation est résolu en utilisant un algorithme d'optimisation (Figure 1) qui se compose de deux parties :

- **Initialisation** :
Dans cette partie, on définit le maillage, les conditions aux limites en déplacement et en effort appliquées sur la plaque, le champ initial des paramètres d'optimisation et on exécute le premier calcul élément finis.
- **Itération** :
chaque itération est composée de deux parties :
 - minimisations locales à contraintes fixées.
 - minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés.

5.2 Convergence

En appliquant le théorème de l'énergie complémentaire et les propriétés des minimisations locales, on démontre que l'algorithme (Figure 1) est convergent.

Démonstration : On note $\beta_i^{(n)}$ les paramètres d'optimisation à l'itération n . La minimisation du critère local $W(\beta_i)$ à contraintes $\sigma^{(n)}$ fixées s'écrit sous la forme suivante :

$$\min_{\beta_i} [W(\beta_i)] = \min_{\beta_i} [S_{ijkl}(\beta_i) \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)}] \quad (18)$$

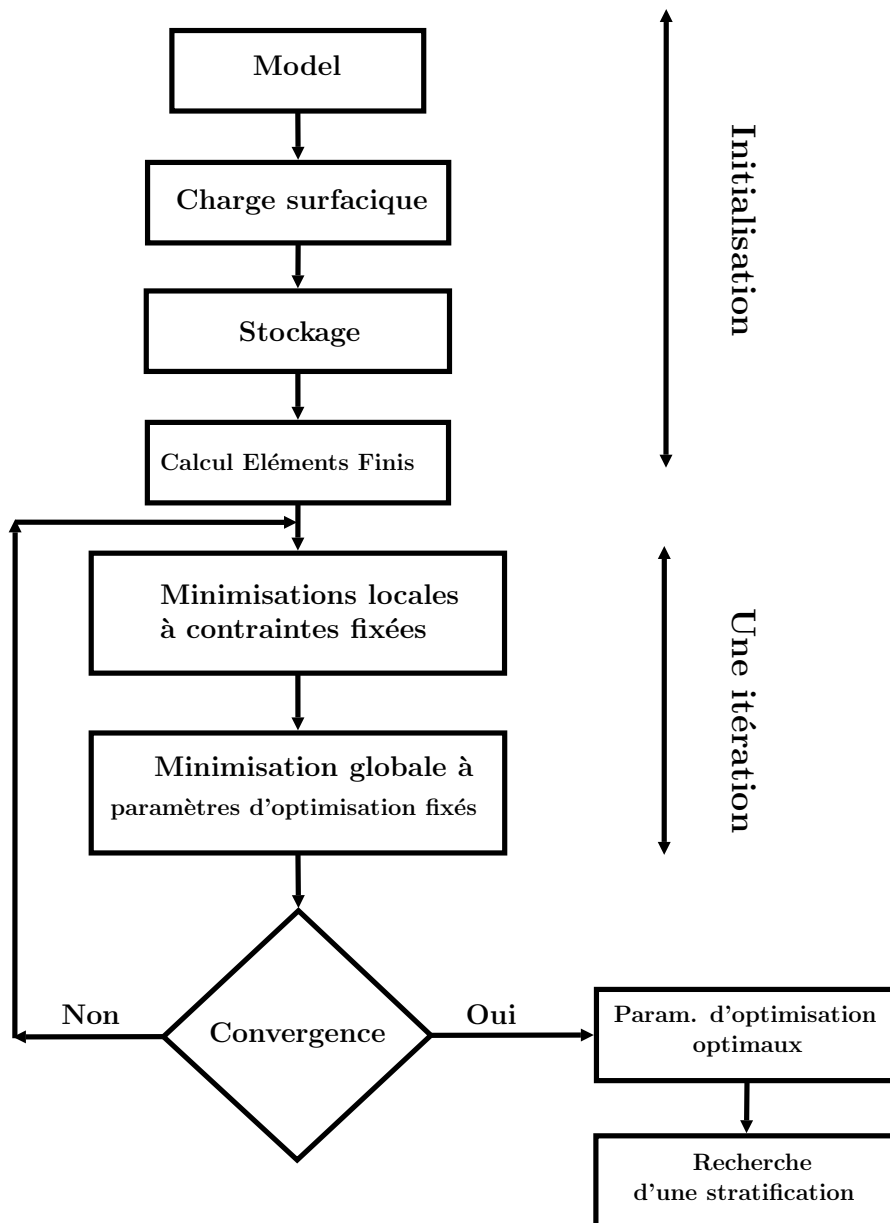


Figure 1 – Algorithme d'optimisation

Le minimum est obtenu pour $\beta^{(n+1)}$, donc

$$S(\beta_i^{(n+1)})\sigma^{(n)}\sigma^{(n)} \leq S(\beta_i^{(n)})\sigma^{(n)}\sigma^{(n)} \quad (19)$$

En intégrant sur tous les points de la structure Ω , on obtient :

$$\int_S S_{ijkl}(\beta_i^{(n+1)})\sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{kl}^{(n)} dS \leq \int_S S_{ijkl}(\beta_i^{(n)})\sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{kl}^{(n)} dS \quad (20)$$

Lors de l'étape de minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés, on minimise le critère d'optimisation par rapport aux contraintes à paramètres d'optimisation $\beta_i^{(n+1)}$ fixés. Pour $\beta_i^{(n+1)}$ constant, on calcule les contraintes $\sigma^{(n+1)}$. On applique le théorème de l'énergie complémentaire en choisissant comme champs de contraintes statiquement admissible $\sigma^{(n)}$, pour avoir la relation suivante :

$$\int_S S_{ijkl}^{(n+1)}\sigma_{ij}^{(n+1)}\sigma_{kl}^{(n+1)} dS \leq \int_S S_{ijkl}^{(n+1)}\sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{kl}^{(n)} dS \quad (21)$$

En prenant en compte les 2 inéquations (20) et (21), on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_S S_{ijkl}(\beta_i^{(n+1)})\sigma_{ij}^{(n+1)}\sigma_{kl}^{(n+1)} dS \leq \int_S S_{ijkl}(\beta_i^{(n)})\sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{kl}^{(n)} dS \quad (22)$$

ce qui implique la relation :

$$G(\beta_i^{(n+1)}) \leq G(\beta_i^{(n)}) \quad (23)$$

Le critère décroît à chaque itération. Etant une grandeur positive, l'algorithme est convergent.

5.3 Minimisations locales

L'orientation optimale Φ_1^{opt} correspond à la direction des contraintes principales maximales en valeur absolue.

$$\Phi_1^{opt} = \text{direction}(\max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|)) \quad (24)$$

où σ_I , σ_{II} représentent les contraintes principales en membrane ou en flexion.

Au niveau local, l'état de contraintes est décrit par les paramètres polaires T et R , et caractérisé par le paramètre X , défini comme suit :

$$X = \frac{R}{|T|} \quad (25)$$

La minimisation de l'énergie complémentaire s'effectue à X fixé, cependant les solutions en (R_0, R_1) ne sont pas les mêmes selon la valeur de X . Ainsi, pour X croissant, on aura quatre types de solutions :

- **Cas 1** (Stratification libre) : $0 \leq X \leq \sqrt{\frac{T_0^{CB}}{2T_1^{CB}}}$
 - $K = 0$: $0 \leq R_0^{opt} \leq R_0^{CB}$ et $R_1^{opt} = T_1^{CB}X$
 - $K = 1$: $0 \leq R_0^{opt} \leq T_0^{CB} - 2T_1^{CB}X^2$ et $R_1^{opt} = T_1^{CB}X$
- **Cas 2** (Stratification libre) : $\sqrt{\frac{T_0^{CB}}{2T_1^{CB}}} \leq X \leq \frac{R_1^{CB}}{T_1^{CB}}$
 - $K = 0$: $2T_1^{CB}X^2 - T_0^{CB} \leq R_0^{opt} \leq R_0^{CB}$ et $R_1^{opt} = T_1^{CB}X$
 - $K = 1$: **Pas de solutions**
- **Cas 3** (Stratification Unidirectionnelle) : $\frac{R_1^{CB}}{T_1^{CB}} \leq X \leq \frac{T_0^{CB} + R_0^{CB}}{2R_1^{CB}}$

$$R_0^{opt} = R_0^{CB} \quad \text{et} \quad R_1^{opt} = R_1^{CB}$$

– **Cas 4** (Stratification de type bicouche orthogonal) : $\frac{T_0^{\text{CB}} + R_0^{\text{CB}}}{2R_1^{\text{CB}}} \leq X$

$$R_0^{\text{opt}} = R_0^{\text{CB}} \quad \text{et} \quad R_1^{\text{opt}} = \frac{T_0^{\text{CB}} + R_0^{\text{CB}}}{2X}$$

les résultats ci-dessus sont déterminés analytiquement [7, 10] en prenant en compte les contraintes d'optimisation (15) et (16).

6 Conception optimale de la stratification

Le problème de l'optimisation locale du matériau se pose comme la recherche de la stratification, qui respecte en chaque point de la structure les valeurs précédemment définies des paramètres polaires. Cela passe en premier lieu par la formulation du problème d'optimisation correspondant, exprimé en termes des angles d'orientation des couches qui sont donc les véritables variables de conception. Des contraintes de faisabilité, telles que la continuité des fibres d'un point à un autre seront également imposées au niveau global.

Dans un deuxième temps, il faudra développer une méthodologie de résolution pour le problème ainsi formulé, afin de trouver un champ de paramètres de stratification, variables continûment dans le domaine géométrique de la structure, et répondant aux critères fixés par l'optimisation topologique au niveau global. La solution du problème sera alors constituée par l'ensemble des paramètres constitutifs du stratifié (matériaux de base, nombre de couches, angles, séquences) qui seront directement utiles à la fabrication du matériau.

6.1 Formulation du problème d'optimisation de la stratification

Considérons un élément de la plaque à optimiser, soumis à un chargement de membrane ou de flexion. L'étape d'optimisation topologique a produit pour cet élément deux modules polaires optimaux $(\bar{R}_0^{\text{opt}}; \bar{R}_1^{\text{opt}})$ pour un chargement de membrane — $(\tilde{R}_0^{\text{opt}}; \tilde{R}_1^{\text{opt}})$ pour un chargement de flexion.

Le matériau choisi pour répondre au problème d'optimisation locale est un stratifié à n plis identiques, localement orthotrope en membrane — en flexion — et découplé. On rappelle que les modules polaires T_0 et T_1 sont constants et égaux à ceux du pli de base, car toutes les couches sont identiques. En conséquence, le problème de l'optimisation locale de la stratification peut se poser comme suit pour un chargement de membrane :

Etant donnés $(\bar{R}_0^{\text{opt}}; \bar{R}_1^{\text{opt}})$, trouver $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ tels que :

$$\begin{aligned} \bar{R}_0 &= \bar{R}_0^{\text{opt}} \\ \bar{R}_1 &= \bar{R}_1^{\text{opt}} \end{aligned}$$

où les $\{\delta_k\}_{k=1, \dots, n}$ sont les angles d'orientation des n plis du stratifié, exprimés dans le repère local de l'élément.

On peut formuler d'une manière strictement identique le problème d'optimisation dans le cas d'un chargement de flexion, en utilisant les notations consacrées $(\tilde{R}_0^{\text{opt}}; \tilde{R}_1^{\text{opt}})$. La conception de la stratification se déroule en effet de manière identique, à condition que la stratifié soit homogène, c'est-à-dire que les comportements homogénéisés de membrane et de flexion soient identiques. Cette condition rajoute alors une contrainte d'optimisation au problème en plus de l'orthotropie et du découplage, mais peut être facilement contournée en se limitant à des séquences de stratification particulières, dites quasi-triviales, qui assurent automatiquement l'homogénéité [9]. Une conception tout à fait générale de stratifiés soumis à un comportement de flexion est possible mais requiert une méthode de résolution numérique qui ne rentre pas dans le cadre de ce travail.

6.2 Résolution du problème d'optimisation par des stratifications remarquables

Dans cet article, nous présenterons les résultats obtenus en résolvant ce problème de manière analytique. Cette résolution n'est néanmoins possible qu'en considérant des stratifications particulières, que nous appellerons stratifications remarquables, et pour lesquelles le lien entre les paramètres de stratification et les modules (R_0, R_1) est facilement exploitable.

Ces stratifications sont de deux types :

- les stratifications à couches orthogonales (cross-ply),
- les stratifications à couches alternées (angle ply) équilibrées.

Dans les deux cas, la stratification est décrite à l'aide de seulement deux orientations (la séquence d'empilement elle-même reste néanmoins libre) :

- $\{0^\circ, 90^\circ\}$ pour le cross-ply
- $\{\alpha, -\alpha\}$ pour l'angle-ply, avec $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$

Le nombre des variables indépendantes de l'optimisation est réduit, pour ces deux types de stratification, à un seul :

- l'épaisseur relative h pour les cross-ply,
- l'orientation α pour les angle-ply.

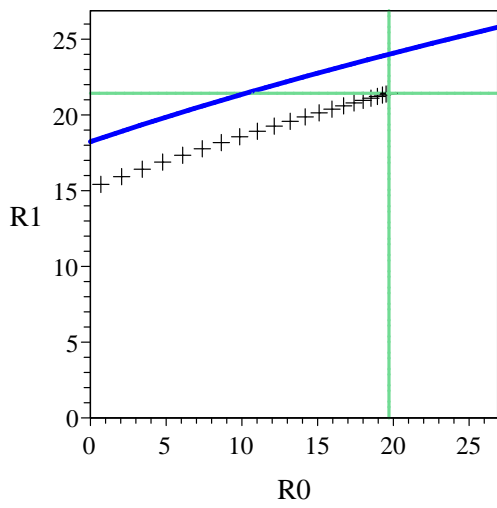
En conséquence, le problème d'optimisation se simplifie grandement du fait de la possibilité d'exprimer directement le lien entre ces variables et les modules (R_0, R_1) à satisfaire. Ainsi, si l'on s'intéresse d'abord aux stratifiés à couches orthogonales, ce lien est donné par les équations (10) et (11). Pour les stratifications de type angle-ply, il vient les équations suivantes, valables à la fois pour les comportements de membrane et de flexion :

$$\begin{aligned} (-1)^K R_0 &= R_0^{\text{CB}} \cos 4\alpha \\ R_1 &= R_1^{\text{CB}} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

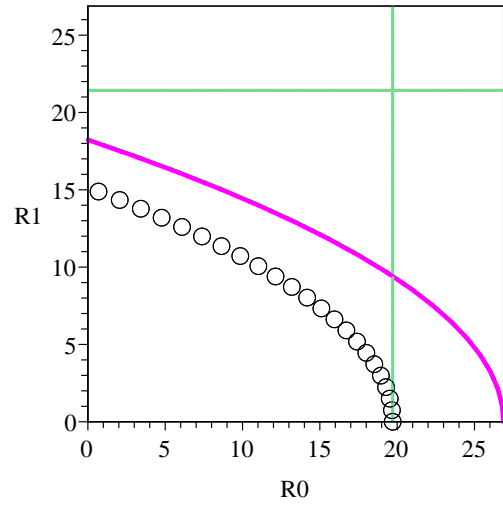
Pour visualiser plus précisément le lien qui relie les paramètres de la stratification aux modules polaires, on montre la Figure 2.

Sur celle-ci, on représente, dans le plan $(R_0 - R_1)$, le domaine de conception des stratifiés. Celui-ci est limité par les valeurs maximales des modules qui sont ceux de la couche de base (en vert sur la Figure), mais également par des conditions d'admissibilité thermodynamique représentées par les courbes bleue et rose. Notons que le domaine de conception prend une forme différente en fonction de la forme d'orthotropie K (cf. section 4.2). A l'intérieur de ces domaines de conception, on représente les points correspondants aux modules polaires pour un cross-ply ou un angle-ply pour plusieurs valeurs du paramètre de stratification. Notons que pour α compris dans l'intervalle $[0^\circ, 22,5^\circ]$, l'angle-ply a une forme d'orthotropie telle que $K = 0$, alors que pour les valeurs supérieures, on aura $K = 1$. On remarque que ces stratifications remarquables constituent des solutions admissibles pour tous les types de solution, du cas 1 au cas 4. Ces graphiques confirment également que seul un stratifié à couches orthogonales peut constituer une solution au cas 4 (cf. section 5.3).

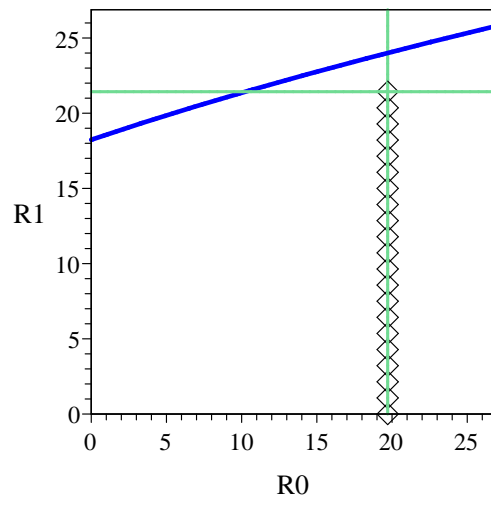
Finalement on dispose, à la fois pour les comportements de membrane et de flexion, de relations aisément inversibles qui permettent de trouver les solutions au problème d'optimisation de la stratification sous la forme de stratifiés angle-ply ou à couches orthogonales.



(a) Angle-ply, $\alpha \in [0^\circ, 22,5^\circ]$ (K pair)



(b) Angle-ply, $\alpha \in [22,5^\circ, 45^\circ]$ (K impair)



(c) Cross-ply (K pair)

Figure 2 – Admissibilité des solutions remarquables en fonction du paramètre de stratification

7 Exemples numériques

Notre code d'optimisation utilise le code EF Openfem dans l'environnement Matlab. On présente deux exemples numériques : d'abord une plaque trouée soumise à un chargement en membrane, puis une plaque encastrée sous sollicitation de flexion. Pour chacun de ces exemples, on représentera la répartition des paramètres polaires optimaux et les paramètres de stratification associés. (Pour l'optimisation du stratifié à couche orthogonales, voir [4, 5]).

7.1 Exemple de plaque trouée en membrane

On prends une plaque trouée de dimensions $180mm * 180mm$. On exerce deux efforts linéiques F_x et F_y sur deux bords. La géométrie de la plaque en membrane et les conditions aux limites en déplacements et efforts sont représentées sur la Figure 3 en tenant compte de la symétrie du problème.

La répartition des paramètres polaires optimaux, dans le cas d'une plaque en membrane sont présents dans les Figures 4(b), 4(c) et 4(d).

Les paramètres polaires de la couche de base du Carbone/Epoxyde sont définis dans le tableau 1 et on initialise notre calcul par les paramètres polaires d'un matériau unidirectionnel ($R_0 = R_0^{CB}$, $R_1 = R_0^{CB}$ et $\Phi_1 = 0$).

On note que le choix de R_0 dans le cas 1 de la minimisation locale est très important car en faisant varier R_0 , on peut avoir une zone de cas 1 plus grande, ce qui nous donne un choix plus grand de la stratification libre.

Conception de la stratification Nous nous plaçons d'abord dans l'hypothèse où nous recherchons une solution sous la forme d'un angle-ply. La séquence qui est proposée comme solution est la suivante :

$$[\delta_1/\delta_2/\delta_2/\delta_1/\delta_2/\delta_1/\delta_1/\delta_2] \quad \text{avec} \quad \delta_{1,2} = \Phi_1^{opt} \pm \alpha \quad (27)$$

Cette séquence de stratification est découplée, orthotrope en membrane de direction principale d'orthotropie Φ_1^{opt} . Elle satisfait donc aux hypothèses de la minimisation locale de la compliance. Elle est de plus quasi-homogène, ce qui signifie qu'elle pourrait également être utilisée pour un chargement de flexion. Les deux images qui composent la Figure 5 montrent les orientations des fibres dans chaque pli orienté respectivement à δ_1 et δ_2 .

Si l'on recherche maintenant les solutions sous la forme de « cross-ply », alors les orientations des fibres dans les plis sont déjà déterminées. En chaque point elles valent précisément $\{\Phi_1^{opt}; \Phi_1^{opt} + \frac{\pi}{2}\}$. Le paramètre de stratification est l'épaisseur relative des plis à 0° . C'est cette grandeur que nous avons représentée sur la Figure 6. Compte-tenu des relations présentées dans le paragraphe 3.3, qui lient h au module R_1 , il est logique de constater que les variations d'épaisseur relative sont strictement identiques à celles de R_1^{opt} .

Finalement, on a montré qu'il était possible de concevoir des plaques stratifiées « angle-ply » ou « cross-ply », qui répondent de manière optimale au problème mécanique de la plaque trouée en traction biaxiale.

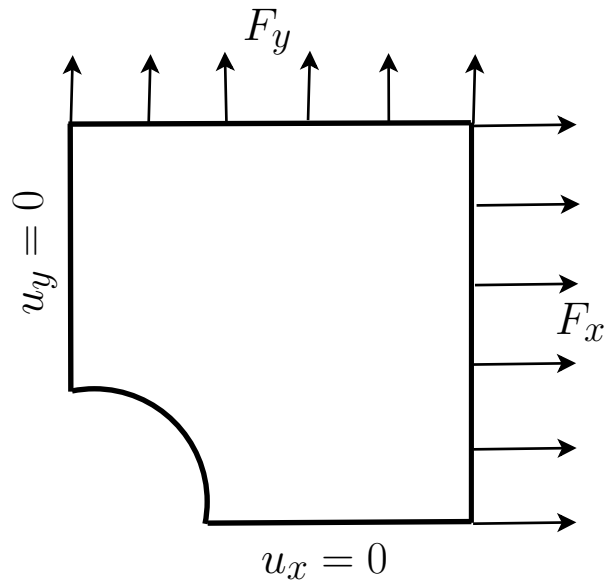


Figure 3 – Plaque sous conditions de symétrie et sous deux efforts F_x et F_y

| T_0^{CB} (Gpa) | T_1^{CB} (Gpa) | R_0^{CB} (Gpa) | R_1^{CB} (Gpa) | Φ_1^{CB} (rad) |
|------------------|------------------|------------------|------------------|---------------------|
| 26.88 | 24.74 | 19.71 | 21.43 | 0 |

Tableau 1 – Paramètres polaires de la couche de base

| Charge linéique | Position du chargement |
|-------------------|------------------------|
| $F_x = 20000$ Mpa | $0 < y < 90$ mm |
| $F_y = 10000$ Mpa | $0 < x < 90$ mm |

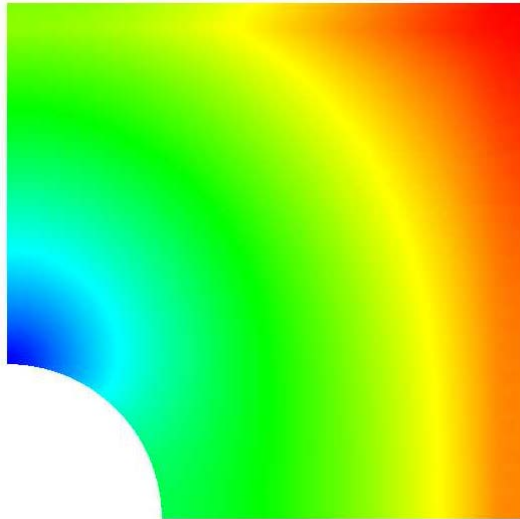
Tableau 2 – Charges appliquées

| Dimensions de la plaque | Elément | Nb Elt | Nb iter | temps |
|-------------------------|---------|--------|---------|-------|
| $90 * 90$ mm * mm | $t3p$ | 3184 | 10 | 3 min |

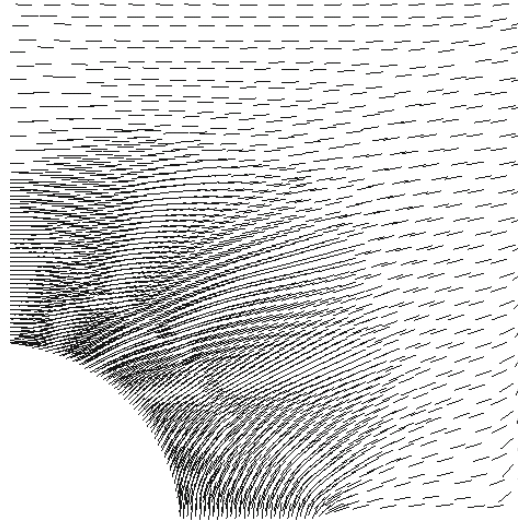
Tableau 3 – Propriétés du calcul EF

| nbiter = 10 | Etat initial | Etat optimal | Baisse |
|-------------|--------------|--------------|--------|
| critère | 12925 | 4538 | 65% |
| Dépl. max. | 1 mm | 0.2 mm | 80% |

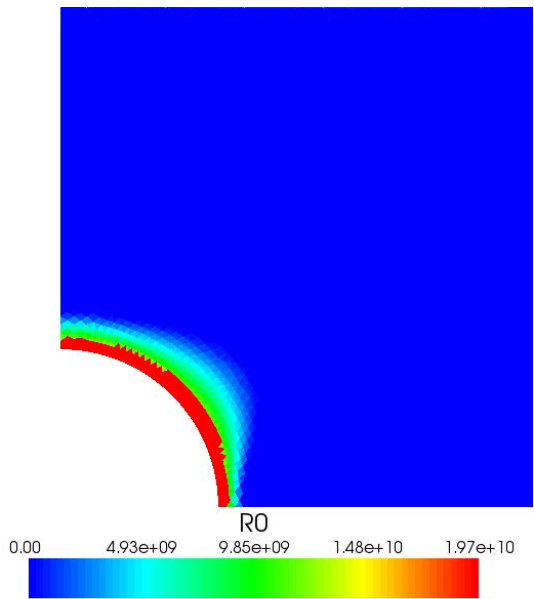
Tableau 4 – Critères et déplacements maximum



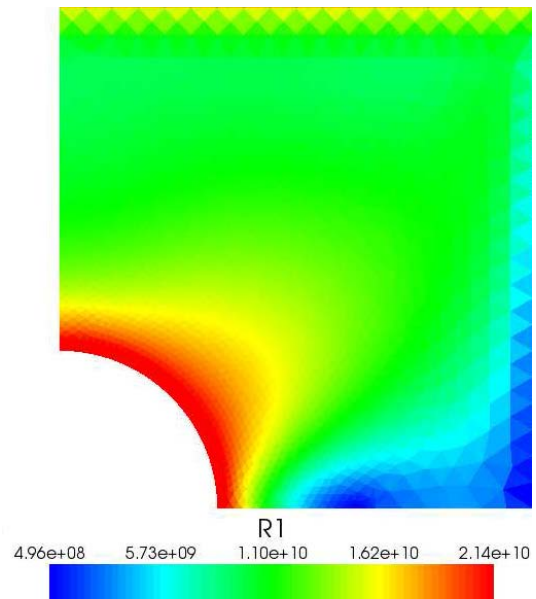
(a) Déformée optimale



(b) Φ_1 optimal

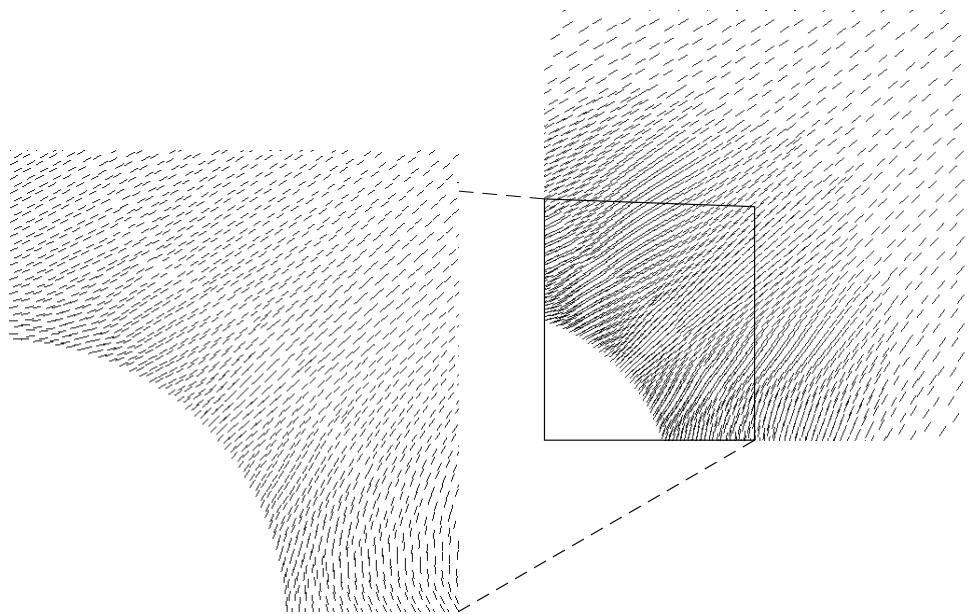


(c) R_0 optimal

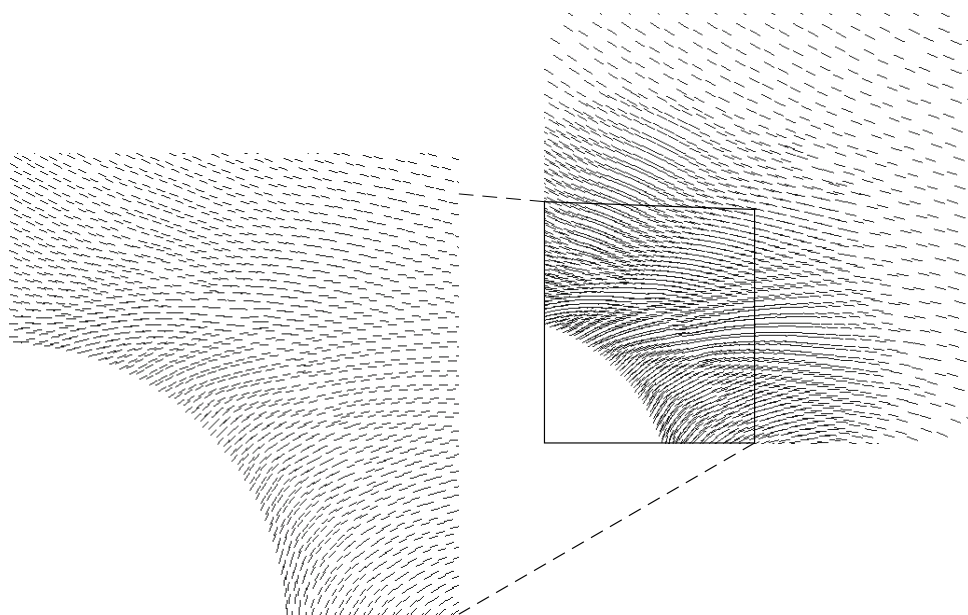


(d) R_1 optimal

Figure 4 – Paramètres polaires optimaux



(a) Plis orientés à $\delta_1 = \Phi_1^{opt} + \alpha$



(b) Plis orientés à $\delta_2 = \Phi_1^{opt} - \alpha$

Figure 5 – Représentation des orientations locales des fibres dans les plis δ_1/δ_2 d'un « angle-ply »

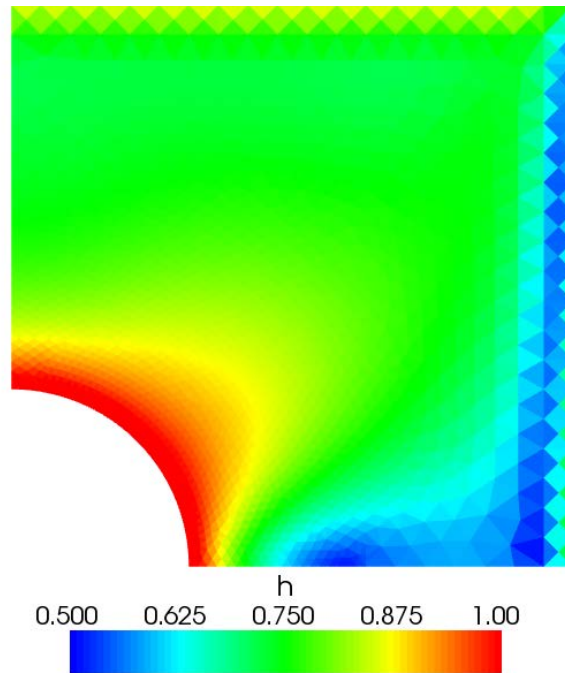


Figure 6 – Variations de l'épaisseur relative des plis à 0°

7.2 Exemple de plaque encastrée en flexion

La plaque considérée est encastrée sur ses deux petits côtés ($x = 0$ et $x = 0.2\text{mm}$), et chargée par des efforts hors plan opposés constants sur les deux zones d'application des efforts (Figure 7). La répartition des paramètres polaires optimaux, dans le cas d'une plaque sous sollicitation de flexion est présentée dans les Figures 8(b), 8(c) et 8(d). Comme pour l'exemple précédent, la couche de base est constituée du Carbone/Epoxyde, voir tableau 1 et on initialise notre calcul par les paramètres polaires d'un matériau isotrope (R_0 , R_1 et Φ_1 sont nuls).

Conception de la stratification Le principe de la conception d'un « angle-ply » solution est, du fait du caractère quasi-homogène de la séquence choisie, identique par rapport à l'exemple de la plaque trouée. Cependant, il faut constater que le stratifié représenté n'est pas le stratifié optimal sur l'ensemble de la structure. En effet, dans les zones où règne le cas 4, nous avons, par défaut, gardé une stratification unidirectionnelle, où les modules polaires valent (R_0^{CB}, R_1^{CB}) . Ces modules ne correspondent pas aux modules optimaux présentés dans le paragraphe 5.3, car une stratification de type angle-ply ne permet pas de satisfaire à ces conditions. La solution présentée est donc une solution « approchée ». Les épaisseurs relatives sont visibles sur la Figure 10. Notons que, contrairement au cas de l'angle-ply, le stratifié présenté ici est le stratifié optimal.

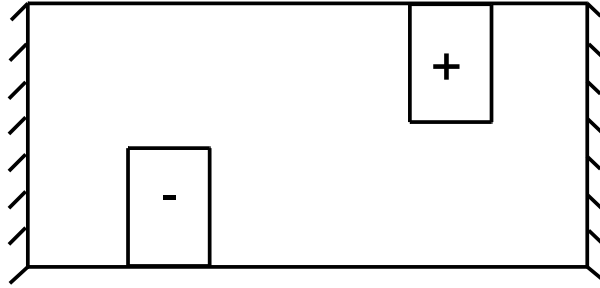


Figure 7 – Plaque encastree et sous deux efforts F_1 et F_2

| Dimensions de la plaque | Elément | Nb Elt | Nb iter | temps |
|-------------------------|---------|--------|---------|-------|
| 200 * 100 mm * mm | Dkt | 7335 | 10 | 3 min |

Tableau 5 – Propriétés du calcul EF

| Charge surfacique | Position du chargement |
|-------------------|--------------------------------------|
| -13.115 Mpa | $0.04 < x < 0.06$; $0 < y < 0.05$ |
| 13.115 Mpa | $0.14 < x < 0.16$; $0.05 < y < 0.1$ |

Tableau 6 – charges surfaciques et zones d'application

| nbiter = 10 | Etat initial | Etat optimal | Baisse |
|-------------|--------------|--------------|--------|
| critère | 12.24 | 5.26 | 57% |
| Dépl. max. | 17 mm | 7 mm | 58.4% |

Tableau 7 – Critères et déplacements maximum

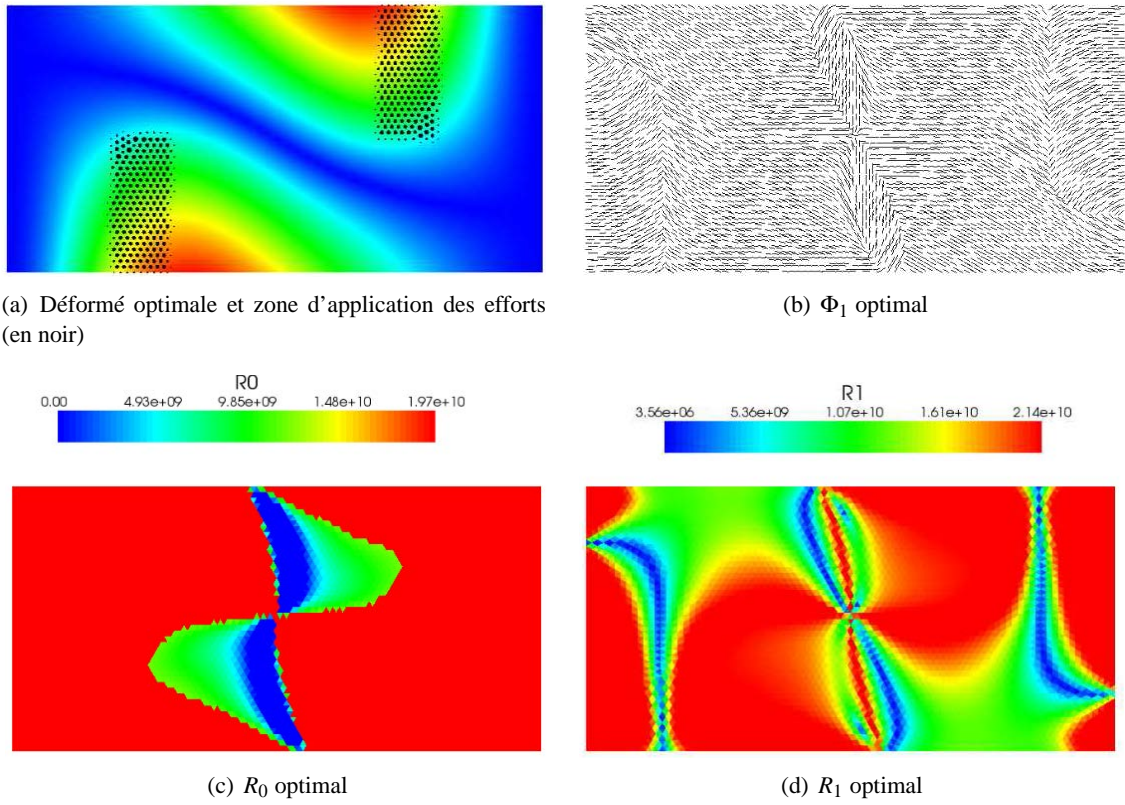


Figure 8 – Paramètres polaires optimaux

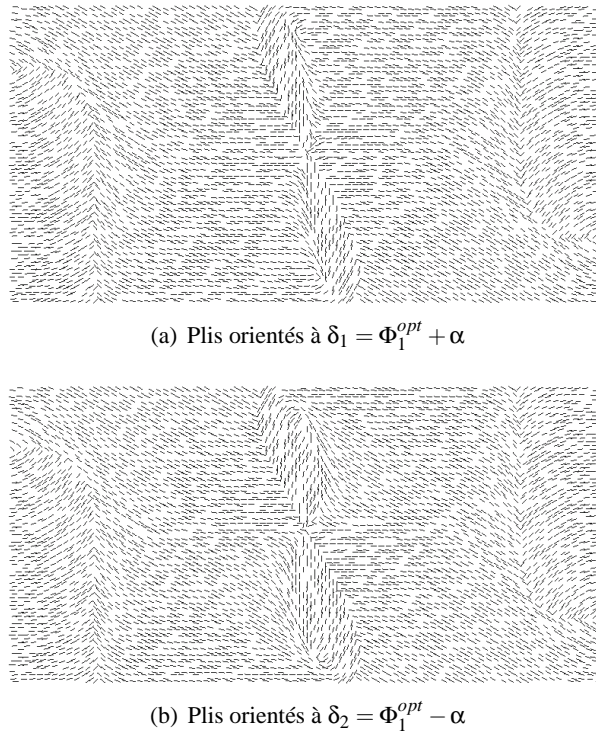


Figure 9 – Représentation des orientations locales des fibres dans les plis δ_1/δ_2 d'un « angle-ply »

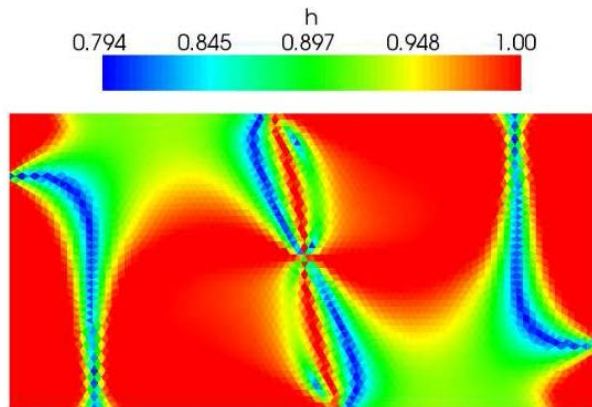


Figure 10 – Variations de l'épaisseur relative des plis à 0°

Références

- [1] G. Allaire, R. V.Kohn. Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using external micro structures, *Eur. J. Mech.,A/solids*, 839-878, V.12, 1993.
- [2] G. Cheng, P. Pedersen. On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principes of mechanics, *J. Mech. Phys. solids*, 135-150, V.45, 1997
- [3] B. Desmorat, G. Duvaut. Optimization of the reinforcement of a 3D medium with thin composite plates, *J. Eng. Mater. Techn.*, 407-415, V.28, 2004.
- [4] V. Hammer. Optimal laminate design subject to single membrane loads, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 65-73, V.17, 1999.
- [5] V. Hammer, M. Bendsoe, R. Lipton, P. Pedersen. Parametrization in Laminate Design for Optimal Compliance, *Int. J. Solids Structures*, 415-434 , V.34, 1997.
- [6] A. Jibawy, B. Desmorat, A. Vincenti. Composite laminated plate optimization with respect to polar parameters, *In the 7th ASMO-UK/ISSMO International Conference on Engineering Design Optimization*, 2008.
- [7] C. Julien, A. Vincenti, B. Desmorat. Design of composite laminates for minimal elastical energy by the use of the polar method, *In the 7th ASMO-UK/ISSMO International Conference on Engineering Design Optimization*, 2008.
- [8] G. Verchery. Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'Ã©lasticitÃ©, *Proceedings of the Euromech Colloquium*, 93-104, V.31, 1979.
- [9] A. Vincenti. Conception et Optimisation des Composites Stratifiés par Méthode Polaire et Algorithme Génétique, *Université de Bourgogne*, 2002
- [10] A. Vincenti, B. Desmorat. Optimal orthotropic material orientation by the use of polar representation, *In 5th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering*, 2008.
- [11] P. Vannucci, G. Verchery. A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates, *Comp. Sci. Tech.*, 1465-1473, V.61, 2001.
- [12] P. Vannucci, A. Vincenti. The design of laminates with given thermal/hygral expansion coefficients : a general approach based upon the polar-genetic method, *Comp. Struct.*, 454-466, V.79, 2007.