



**HAL**  
open science

## Méthode énergétique pour la réduction d'un modèle d'endommagement en modèle de fissuration

Fabien Cazes, Michel Coret, Anthony Gravouil, Alain Combescure

### ► To cite this version:

Fabien Cazes, Michel Coret, Anthony Gravouil, Alain Combescure. Méthode énergétique pour la réduction d'un modèle d'endommagement en modèle de fissuration. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01412108

**HAL Id: hal-01412108**

**<https://hal.science/hal-01412108>**

Submitted on 8 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Méthode énergétique pour la réduction d'un modèle d'endommagement en modèle de fissuration

F. Cazes<sup>1</sup>, M. Coret<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, A. Combescure<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LaMCoS UMR5259 (Université de Lyon, CNRS INSA-Lyon)  
18-20 allée des sciences, F-69621, Villeurbanne  
{fabien.cazes,michel.coret,anthony.gravouil,alain.combescure}@insa-lyon.fr

---

**Résumé** — À partir d'un modèle d'endommagement régularisé, un modèle équivalent combinant un endommagement non régularisé et une zone cohésive est construit. L'initiation de la zone cohésive permet d'éviter la localisation des déformations dans le modèle équivalent. La loi cohésive est une inconnue du problème, elle est construite à partir d'une solution du problème de référence de telle sorte que le bilan énergétique global de la structure soit préservé par le changement de modèle. Aucune hypothèse n'est faite au préalable sur la forme de la loi cohésive.

**Mots clés** — Limiteur de localisation, Fissure équivalente, Endommagement, Modèle cohésif.

---

## 1 Introduction

Les modèles de Griffith et les modèles cohésifs permettent de traiter la rupture d'un matériau en introduisant une discontinuité dans la structure. Les modèles d'endommagement et de plasticité conservent eux une description continue du matériau pendant tout le processus de rupture et sont généralement munis d'un limiteur de localisation pour traiter la partie adoucissante du comportement du matériau. Tous ces modèles peuvent être utilisés pour modéliser les mêmes phénomènes. Le choix d'un modèle peut se baser sur le rapport entre la dimension de la structure  $D$  et la taille de la zone d'élaboration de la fissure  $l$ . Suivant les règles proposées dans [2], la classification suivante peut être faite :

- Si  $100 < D/l$  : modèle de Griffith,
- Si  $5 < D/l < 100$  : modèle cohésif,
- Si  $D/l < 5$  : modèle continu régularisé.

Au delà de cette classification, les modèles continus et discontinus semblent mieux adaptés à modéliser respectivement le début et la fin du processus de rupture. De nombreux travaux ont donc visé à coupler les deux manières de traiter la rupture pour profiter des qualités de chaque modèle. Si l'idée semble naturelle, la manière d'effectuer ce couplage pose quelques questions :

– *Les modèles continus et discontinus doivent-ils être juxtaposés ou superposés ?*

Une première façon d'effectuer un couplage continu-discontinu est d'introduire une discontinuité dans un matériau endommagé lorsqu'un critère d'initiation est atteint (juxtaposition des modèles). Ceci permet d'améliorer la qualité de la solution, par exemple en évitant le phénomène de blocage du à l'incompressibilité du modèle continu ou, pour un modèle non-local, en empêchant la régularisation entre des points situés de part et d'autre de la discontinuité. Une autre approche est la superposition des modèles pour obtenir un modèle discontinu équivalent à un modèle continu de référence [6, 7].

– *Quel type de modèle discontinu utiliser ?*

Les modèles de Griffith sont d’une implémentation numérique plus simple que les modèles cohésifs mais ces derniers rendent mieux compte des champs mécaniques au voisinage de la pointe de la fissure. La capacité à modéliser correctement l’initiation d’une fissure sera le critère principal pour cet étude.

– *Quel formalisme commun utiliser pour décrire les modèles ?*

Les modèles continus sont systématiquement écrits dans un cadre thermodynamique général [5]. Les modèles discontinus ont fait l’objet d’études mathématiques poussées, mais la description énergétique se limite souvent à la définition d’une énergie de surface dont la nature est mal définie (énergie stockée ou dissipée ?).

– *Quel rôle joue la stabilité matérielle dans l’étude ?*

La perte de la stabilité matérielle marque l’entrée dans la phase adoucissante du comportement et le début des phénomènes entraînant la rupture complète du matériau, c’est à dire la coalescence des micro-défauts et la formation d’une macro-fissure. L’étude de la stabilité sera un élément important de l’étude déterminant la nécessité d’utiliser un limiteur de localisation ou de faire apparaître une fissure dans le matériau.

Les domaines de validité des modèles sont d’abord étudiés dans le but de choisir les modèles utilisés dans l’étude. Ceci conduit à la définition d’un problème équivalent devant être construit à partir d’un problème de référence. Ensuite, la méthode utilisée pour le changement de modèle est mise en place, avec la définition d’un critère énergétique tel que les incréments d’énergie dissipée sont préservés par le changement de modèle. Enfin, un exemple d’utilisation de la méthode est présenté pour un cas test unidimensionnel avec un modèle de référence de second-gradient implicite.

$\Omega$	Domaine
$\Gamma_s$	Discontinuité
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Déformation (sur $\Omega$ )
$\underline{\underline{\sigma}}$	Contrainte (sur $\Omega$ )
$\llbracket u \rrbracket$	Saut de déplacement (sur $\Gamma_s$ )
$\underline{\underline{\sigma}}^s$	Contrainte cohésive (sur $\Gamma_s$ )
$\phi, \phi_s, \Phi$	Énergies dissipées volumique, surfacique et totale

Tableau 1 – Nomenclature

## 2 Choix des modèles utilisés

L’observation de la rupture permet souvent d’identifier une première phase où l’endommagement du matériau est diffus suivie d’une phase d’endommagement localisé. Il est généralement admis que le passage d’une phase à l’autre est du au regroupement des défauts microscopiques et correspond à la perte de la stabilité matérielle. Le domaine de validité des modèles est étudié en fonction de la capacité à modéliser ces deux phases de l’endommagement.

– *Modèle continu :*

Les modèles continus modélisent parfaitement la partie durcissante du comportement du matériau. La partie adoucissante peut également être modélisée à condition d’utiliser un moyen de limiter la localisation (non-local, second-gradient, ...). On pourrait contester la validité de ces modèles lorsque l’endommagement se rapproche de 1 mais dans une première approximation nous considérons qu’ils offrent une description complète du processus de rupture.

– *Modèle cohésif :*

Le modèle cohésif est une représentation discontinue de la rupture, il ne peut donc modéliser que la phase d’endommagement localisé, lorsque le comportement du matériau est adoucissant. On

peut considérer que la contrainte d'initiation de la zone cohésive correspond au moment où la stabilité matérielle est perdue.

– *Modèle de Griffith* :

Pour ce modèle, les efforts cohésifs entre les deux lèvres de la fissure ne sont pas pris en compte dans l'écriture des équations d'équilibre de la structure. Il y a propagation lorsqu'une avancée de la fissure restitue suffisamment d'énergie élastique pour compenser la production d'énergie de surface induite [3]. Cette énergie de surface étant considérée augmenter proportionnellement à l'aire de la fissure, le critère énergétique de propagation n'est valide que si la propagation se fait sans variation la forme de la pointe de la fissure (propagation stationnaire, ou autonome). Cette hypothèse n'étant pas vérifiée au moment de l'initiation, les modèles cohésifs ne peuvent être considérés valides qu'à partir du moment où la fissure a atteint une certaine longueur.

Afin de traiter correctement la phase d'initiation de la fissure, le modèle de Griffith a dans un premier temps été écarté de l'étude. Les modèles régularisés donnant la description la plus complète du processus de rupture permettent de définir un modèle de référence à l'étude. À partir du modèle de référence, un modèle équivalent couplant un endommagement "local" et une zone cohésive est construit. La figure 1 représente les domaines de validité de ces deux modèles.

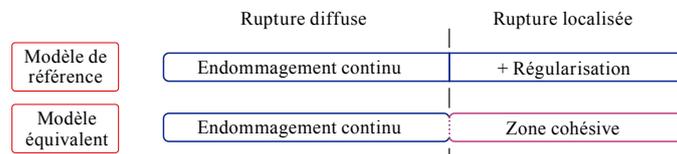


Figure 1 – Modèle de référence et modèle équivalent

Un modèle de référence endommageable avec régularisation de la déformation équivalente selon une méthode de second-gradient implicite est choisi. La partie continue du modèle équivalent est identique au modèle de référence mais sans l'étape de régularisation par second-gradient. La dissipation volumique de ces modèles vaut :

$$d\phi = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}} : d\underline{\underline{\sigma}}).$$

Pour faciliter le transfert d'informations du modèle de référence vers le modèle équivalent, une description thermodynamique de la zone cohésive basée sur les travaux de Gurtin [4] est adoptée. Pour être cohérent avec le modèle de référence endommageable, on suppose qu'une décharge se fait de manière linéaire. Cette hypothèse permet d'obtenir l'expression suivante d'un incrément surfacique d'énergie dissipée :

$$d\phi^s = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^s d[[\underline{\underline{u}}]] - [[\underline{\underline{u}}]] d\underline{\underline{\sigma}}^s).$$

La figure 2 schématise pour un exemple unidimensionnel le calcul de ces incréments d'énergie dissipée.

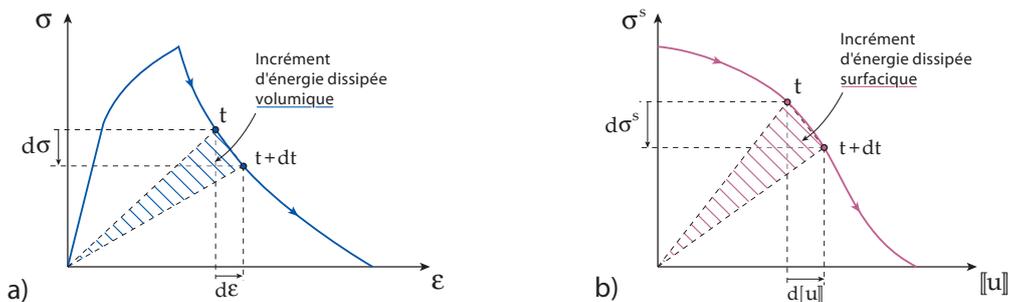


Figure 2 – Incréments volumiques (a) et surfaciques (b) d'énergie dissipée

### 3 Méthode pour le changement de modèle

L'énergie dissipée totale  $\Phi$  est égale à

$$\Phi = \int_{\Omega} \phi \, dV + \int_{\Gamma_s} \phi_s \, dS.$$

Pour le modèle de référence, la contribution des intégrales sur  $\Gamma_s$  est nulle car ce modèle ne comporte pas de discontinuité. D'après le concept de fissure équivalente ([6, 7]), le critère de changement de modèle doit être tel que l'énergie dissipée par le modèle équivalent soit égale à l'énergie dissipée par le modèle de référence, ce qui s'écrit sous forme incrémentale :

$$d\Phi^{eq} = d\Phi^{ref}.$$

Si cette équation est vérifiée, et si le chargement est radial en déplacements imposés, il est possible de montrer que les autres termes intervenant dans l'écriture du bilan énergétique de la structure sont également préservés lors du changement du modèle. Ces termes sont le travail des efforts extérieurs et l'énergie libre de la structure. Le critère de changement de modèle est construit à partir des deux hypothèses suivantes :

- Lorsque le comportement est durcissant (endommagement diffus), les modèles d'endommagement régularisés et non régularisés sont identiques,
- L'ouverture de la zone cohésive du modèle équivalent provoque la décharge des points avoisinant, il n'y a donc pas de dissipation d'énergie autour de la zone cohésive.

Si ces deux hypothèses sont vérifiées, la zone cohésive doit apparaître dans le modèle équivalent lorsque le comportement du modèle de référence devient adoucissant. À partir de ce moment, toute l'énergie dissipée par le modèle de référence est transmise à la zone cohésive. Un indicateur d'endommagement localisé  $I_{loc}$  est introduit. Cet indicateur est initialement nul et prend la valeur 1 dès que le comportement devient adoucissant en un point du modèle de référence. Si on note  $\Phi_s^{eq}$  l'énergie dissipée sur la discontinuité du modèle équivalent, le critère de changement de modèle, schématisé sur la figure 3, s'écrit :

$$d\Phi_s^{eq} = I_{loc} \, d\Phi^{ref}.$$

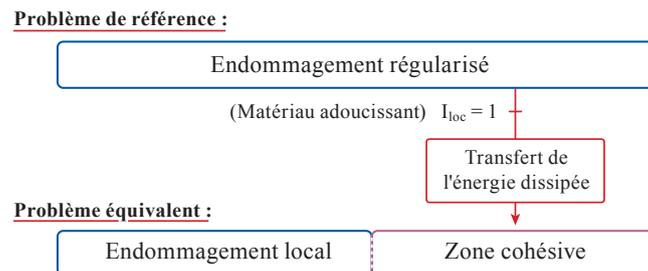


Figure 3 – Méthode pour le changement de modèle

### 4 Exemple unidimensionnel

On considère un cas test simple de poutre en traction. Un premier calcul est réalisé pour obtenir la solution de référence donnée par le modèle de second-gradient implicite. Les matrices tangentes de ce problème sont calculées selon [8]. L'élément central est un peu plus fin que les autres pour imposer que le point le plus endommagé soit au milieu de la poutre. Un pilotage du calcul est effectué sur la déformation de l'élément central du maillage pour pouvoir traiter les

cas de snap-back. La figure 4 montre la courbe de traction du modèle continu et quelques profils d'endommagement obtenus.

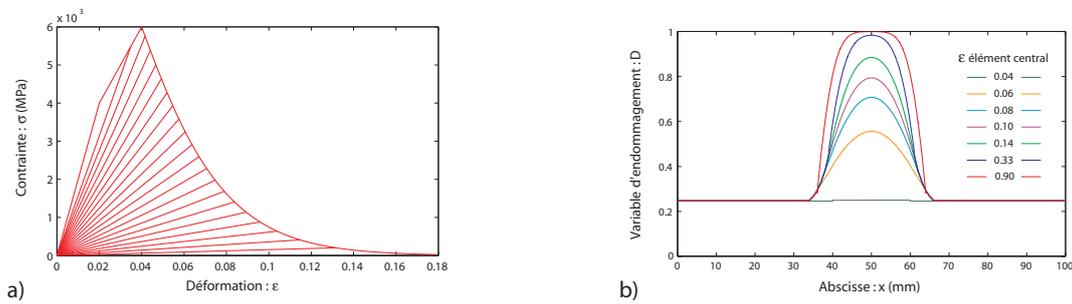


Figure 4 – Courbe de traction du modèle continu (a) et profil de l'endommagement (b)

La partie continue du modèle équivalent est implémentée de manière classique (locale), la zone cohésive jouant le rôle de limiteur de localisation. La loi cohésive n'étant pas connue par avance, elle est déterminée de manière incrémentale à partir du critère de changement de modèle qui donne entre chaque pas de temps l'énergie devant être dissipée par la zone cohésive. Pour cela, un multiplicateur de Lagrange représentant les efforts cohésifs dans la discontinuité est introduit dans une formulation faible du problème. Tant que l'énergie dissipée transmise à la zone cohésive est nulle, le multiplicateur ne sert qu'à imposer le contact des deux noeuds en vis à vis de la discontinuité. Dès que la zone cohésive reçoit de l'énergie dissipée, il y a ouverture de la fissure. La loi cohésive obtenue est représentée en Figure 5.

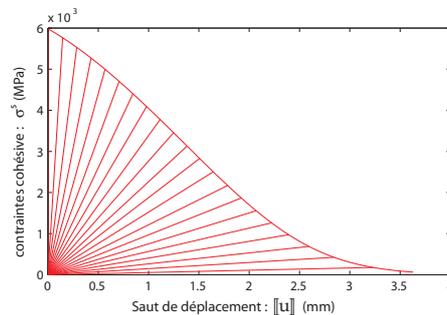


Figure 5 – Courbe de traction de la zone cohésive

## 5 Conclusion

À partir d'un modèle d'endommagement régularisé de référence, un modèle équivalent combinant un endommagement local et une zone cohésive a été identifié. Le modèle équivalent est une description moins précise du comportement du matériau que le modèle régularisé de référence car il repose sur l'hypothèse que tous les phénomènes dissipatifs sont condensés sur une surface dès que le comportement devient adoucissant. Cette approche surfacique de la rupture a cependant montré qu'elle pouvait donner de bonnes prédictions, avec l'avantage d'être moins coûteuse numériquement qu'un modèle continu régularisé nécessitant un maillage fin dans la zone d'endommagement localisé. La méthode repose sur la notion de fissure équivalente [6, 7] affirmant que deux états de fissuration peuvent être considérés équivalents si la même quantité d'énergie est dissipée. Ce concept a été adapté pour que la loi cohésive soit déterminée sans faire d'hypothèse préalable sur sa forme. Ceci nécessite :

- Une description thermodynamique de la zone cohésive (selon [4]),

- Une hypothèse sur la décharge du modèle cohésif devant se faire de manière linéaire,
- Un critère incrémental de changement de modèle prenant en compte la nature de l'endommagement (diffus ou localisé),
- L'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange pour imposer les incréments d'énergie dissipée dans la zone cohésive entre chaque pas de temps.

La généralisation de la méthode à des problèmes multi-dimensionnels semble possible à condition de remplacer le critère énergétique global par un critère local défini en chaque point de la discontinuité. Ceci pourrait donner des indications supplémentaires sur le comportement des zones cohésives, comme par exemple la relation entre les comportements normal et tangentiel.

## Références

- [1] G.I. Barenblatt. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7, 55–129, 1962.
- [2] Z.P. Bažant. Concrete fracture models : testing and practice. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 165–205, 2002.
- [3] A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, CCXXI (A), 163–198, 1920.
- [4] M.E. Gurtin. Thermodynamics and the cohesive zone in fracture. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 30, 991–1003, 1979.
- [5] J. Lemaitre, J-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1988.
- [6] J. Mazars. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure. *ENSET*, 1984.
- [7] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot. From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 3327–3342, 1996.
- [8] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. de Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 3391–3403, 1996.